

**Université Pierre et Marie Curie, Master de Mathématiques, M1,
4M004 Fonctions classiques, corrigé de l'examen final, première session,
jeudi 15 décembre 2016, 9:00 – 12:00.**

Exercice 1.

Déterminer l'ensemble E des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\cos z = e^{iz}$.

On a $\cos z - e^{iz} = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) - e^{iz} = \frac{1}{2}(e^{-iz} - e^{iz}) = -i \sin z$, et donc $E = \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

2.1. Soit f une fonction holomorphe sur $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Montrer que pour $z \in D$, on a

$$f(z) - f(0) = z \int_0^1 f'(tz) dt.$$

Montrer que pour $z \in D$, on a $\text{Log}(1+z) = z \int_0^1 \frac{dt}{1+tz}$.

Pour $z \in D, z \neq 0$, la fonction $[0, 1] \ni t \mapsto f(tz) = g_z(t)$ est différentiable de dérivée $f'(tz)z$ car pour $t, t+h \in [0, 1]$,

$$\frac{f((t+h)z) - f(tz)}{h} = z \frac{f(tz+hz) - f(tz)}{hz} \xrightarrow{h \rightarrow 0} z f'(tz).$$

Si $z = 0$, le quotient ci-dessus est nul et pour tout $z \in D$, la fonction g_z est continûment différentiable de dérivée $f'(tz)z$. Il vient pour $z \in D$,

$$f(z) - f(0) = g_z(1) - g_z(0) = \int_0^1 g'_z(t) dt = z \int_0^1 f'(tz) dt.$$

En appliquant cela à la fonction f définie sur D par $f(z) = \text{Log}(1+z)$, on obtient la seconde formule.

2.2. On pose $\Omega = (-\infty, -1]^c = \{z \in \mathbb{C}, z \text{ n'est pas un réel } \leq -1\}$. Montrer que la fonction $\Omega \ni z \mapsto \text{Log}(1+z)$ est bien définie et holomorphe sur Ω . Montrer que la fonction $\Omega \ni z \mapsto z \int_0^1 \frac{dt}{1+tz}$ est bien définie et holomorphe sur Ω . Montrer que pour $z \in \Omega$,

$$(*) \quad \text{Log}(1+z) = z \int_0^1 \frac{dt}{1+tz}.$$

La fonction Logarithme est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $1+z \in \mathbb{R}_-$ équivaut à $z \in (-\infty, -1]$. Par ailleurs, $\exists t \in [0, 1], 1+tz = 0$ équivaut à $\exists t \in]0, 1], z = -1/t$ soit à $z \in (-\infty, -1]$. Par conséquent,

- pour tout $z \in \Omega$, la fonction $[0, 1] \ni t \mapsto 1/(1+tz)$ est la restriction d'une fraction rationnelle sans pôle sur $[0, 1]$, donc dans $L^1([0, 1])$,
- pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $\Omega \ni z \mapsto z/(1+tz)$ est la restriction à Ω d'une fraction rationnelle sans pôle sur Ω , donc est holomorphe sur Ω ,
- si K est un compact $\subset \Omega$, $[0, 1] \times K$ est compact et comme $1+tz$ ne s'annule pas sur $[0, 1] \times \Omega$

$$\min_{t \in [0, 1], z \in K} |1+tz| = \beta_K > 0,$$

ce qui implique $\forall t \in [0, 1], \sup_{z \in K} |1 + tz|^{-1} \leq \beta_K^{-1} \in L^1([0, 1])$. Par suite, les deux membres de (*) sont des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω (étoilé par rapport à 0) qui coïncident sur l'ouvert non vide D (question 2.1) ; par le principe du prolongement analytique, ces deux fonctions coïncident sur Ω .

2.3. Montrer que pour $\sigma \in [0, \pi/3]$, on a $\cos \sigma \leq 1 - \frac{\sigma^2}{4}$. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}, |\arg z| \leq \pi - \varepsilon_0, \varepsilon_0 \in]0, \pi/3], t \in [0, 1]$, on a

$$|1 + tz|^2 \geq |z|t\varepsilon_0^2/2.$$

Posant $\phi(\sigma) = 4 \cos \sigma + \sigma^2$, il vient $\phi'(\sigma) = -4 \sin \sigma + 2\sigma$,

$$\phi''(\sigma) = -4 \cos \sigma + 2 = -4(\cos \sigma - \cos(\pi/3)) \leq 0 \quad \text{pour } \sigma \in [0, \pi/3].$$

Donc ϕ' est décroissante sur $[0, \pi/3]$ et $\phi'(\sigma) \leq \phi'(0) = 0$, prouvant que ϕ est décroissante sur $[0, \pi/3]$ et donc

$$\phi(\sigma) \leq \phi(0) = 4, \quad \text{ce qui donne la première inégalité cherchée.}$$

On a $z = re^{i\theta}, r \geq 0, |\theta| \leq \pi - \varepsilon_0$ et $\cos \theta \geq \cos(\pi - \varepsilon_0) = -\cos \varepsilon_0 \geq -1 + \frac{\varepsilon_0^2}{4}$, et pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |1 + tz|^2 &= (1 + tr \cos \theta)^2 + (tr \sin \theta)^2 = 1 + 2tr \cos \theta + t^2 r^2 \\ &\geq 1 + t^2 r^2 - 2tr + tr\varepsilon_0^2/2 = (1 - tr)^2 + tr\varepsilon_0^2/2 \geq tr\varepsilon_0^2/2. \end{aligned}$$

ce qui donne la seconde inégalité.

2.4. Soit $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, |\arg z| \leq \pi - \varepsilon_0, \varepsilon_0 \in]0, \pi/3]$ et soit $t \in [0, 1[$. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k z^k = \frac{1}{1 + tz},$$

et que

$$|z \sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k z^k| \leq t^{-1/2} 2\sqrt{2}\varepsilon_0^{-1}.$$

On a pour $|z| = 1, t \in [0, 1[$,

$$\sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k z^k = \frac{1 - (-tz)^{N+1}}{1 + tz},$$

ce qui implique la première égalité car $|tz| < 1$. De plus pour $|\theta| \leq \pi - \varepsilon_0, \varepsilon_0 \in]0, \pi/3]$, on a de 2.2,

$$\text{Log}(1 + e^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{dt}{1 + te^{i\theta}}.$$

En outre, on a pour $t \in [0, 1[$,

$$\frac{1}{1 + te^{i\theta}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k e^{ik\theta},$$

et de 2.3,

$$\left| \sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k e^{ik\theta} \right| = \frac{|1 - (-1)^{N+1} t^{N+1}|}{|1 + te^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1 + te^{i\theta}|} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon_0} t^{-1/2} \in L^1([0, 1]; dt).$$

Il vient par conséquent, pour $|z| = 1, |\arg z| \leq \pi - \varepsilon_0, \varepsilon_0 \in]0, \pi/3], t \in]0, 1[$,

$$\frac{|z|}{|1 + tz|} \leq \frac{|z|2\sqrt{2}}{|z|^{1/2}t^{1/2}\varepsilon_0} = \frac{|z|^{1/2}2\sqrt{2}}{\varepsilon_0}t^{-1/2}.$$

2.5. Soit $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq -1$. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}z^k}{k}$ est convergente et que

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}z^k}{k}.$$

On a pour $|\theta| \leq \pi - \varepsilon_0, \varepsilon_0 \in]0, \pi/3]$, de 2.2,

$$\text{Log}(1 + e^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{dt}{1 + te^{i\theta}} = e^{i\theta} \int_0^1 \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k e^{ik\theta} \right) dt,$$

et de 2.3, pour $t \in [0, 1[$,

$$\left| \sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k e^{ik\theta} \right| = \frac{|1 - (-1)^{N+1}t^{N+1}|}{|1 + te^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1 + te^{i\theta}|} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon_0} t^{-1/2} \in L^1([0, 1]; dt).$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui implique, pour $|\theta| \leq \pi - \varepsilon_0, \varepsilon_0 \in]0, \pi/3]$,

$$\begin{aligned} \text{Log}(1 + e^{i\theta}) &= e^{i\theta} \int_0^1 \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k t^k e^{ik\theta} \right) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq N} \int_0^1 \left(\sum_{0 \leq l \leq N} (-1)^l t^l e^{il\theta} \right) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq N} (-1)^k \frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la convergence de la série de terme général $(-1)^k e^{i(k+1)\theta} / (k+1)$ et par suite

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad \text{Log}(1 + e^{i\theta}) = \sum_{l \geq 1} (-1)^{l+1} \frac{e^{il\theta}}{l}.$$

Exercice 3.

3.1. Soit $x \in \mathbb{R}, R > 0$. On pose $f_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \cos(x\xi + \frac{\xi^3}{3}) d\xi$. Montrer que

$$\pi f_R(x) = \operatorname{Re} \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi + \operatorname{Re} \int_{[Re^{i\pi/6}, R]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi.$$

Comme la fonction $\xi \mapsto e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})}$ est entière, on a

$$\pi f_R(x) = \operatorname{Re} \int_{[0, R]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi = \operatorname{Re} \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi + \operatorname{Re} \int_{[Re^{i\pi/6}, R]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi.$$

3.2. Pour $x \in \mathbb{R}, R > 0$, on pose $I(x, R) = \int_{[Re^{i\pi/6}, R]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi$. Montrer que, pour $|x| \leq M, R \geq \sqrt{M\pi}$, on a

$$|I(x, R)| \leq \int_0^{\pi/6} R e^{-\theta R^3/3} d\theta,$$

Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} I(x, R) = 0$.

On a pour $x \in \mathbb{R}, \int_{[R, Re^{i\pi/6}]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi = \int_0^{\pi/6} e^{i(xRe^{i\theta} + \frac{1}{3}R^3e^{i3\theta})} iRe^{i\theta} d\theta$, et par conséquent

$$\left| \int_{[R, Re^{i\pi/6}]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi \right| \leq \int_0^{\pi/6} e^{-xR \sin \theta} e^{-\frac{1}{3}R^3 \sin(3\theta)} d\theta R.$$

Comme $3\theta \in [0, \pi/2]$, on a $\sin(3\theta) \geq \frac{2}{\pi}3\theta$ et donc

$$\left| \int_{[R, Re^{i\pi/6}]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi \right| \leq \int_0^{\pi/6} e^{-xR \sin \theta} e^{-\frac{2}{\pi}R^3\theta} d\theta R \leq \int_0^{\pi/6} e^{|x|R\theta} e^{-\frac{2}{\pi}R^3\theta} d\theta R.$$

Si $|x| \leq M$, on obtient si $R \geq \sqrt{M\pi}$, que $-|x|R + \frac{2}{\pi}R^3 \geq \frac{1}{\pi}R^3$ et donc

$$\left| \int_{[R, Re^{i\pi/6}]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi \right| \leq \int_0^{\pi/6} R e^{-\theta R^3/\pi} d\theta \leq R \int_0^{+\infty} e^{-\theta R^3/\pi} d\theta = R \frac{\pi}{R^3} = \frac{\pi}{R^2}.$$

3.3. Pour $x \in \mathbb{R}, R > 0$, on pose $J(x, R) = \operatorname{Re} \left(\int_{[0, Re^{i\pi/6}]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi \right)$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^3/3} e^{zt} dt$ est absolument convergente. Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} J(x, R)$ existe et vaut

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^3/3} e^{ixte^{i\pi/6}} e^{i\pi/6} dt \right).$$

Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} f_R(x)$ existe.

On a $J(x, R) = \operatorname{Re} \int_{[0, Re^{i\pi/6}]} e^{i(x\xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi = \operatorname{Re} \left(\int_0^R e^{i(xte^{i\pi/6} + \frac{1}{3}it^3)} e^{i\pi/6} dt \right)$. On remarque que, pour $x \in \mathbb{C}, t \geq 0$,

$$|e^{i(xte^{i\pi/6} + \frac{1}{3}it^3)}| \leq e^{t|x|} e^{-t^3/3}.$$

Par suite, si $|x| \leq M$, on a $|e^{i(xte^{i\pi/6} + \frac{1}{3}it^3)}| \leq e^{tM} e^{-t^3/3} \in L^1(\mathbb{R}_+; dt)$, et

$$J(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} J(x, R)$$

existe et l'on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\pi f(x) = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{i(xt e^{i\pi/6} + \frac{1}{3}it^3)} e^{i\pi/6} dt \right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} J(x, R).$$

3.4. Calculer $f(0)$.

On a d'après 3.1,

$$\begin{aligned} \pi f(0) &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(\frac{1}{3}t^3)} e^{i\pi/6} dt \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^3/3} dt \\ &\quad \underbrace{=}_{t=3^{1/3}s^{1/3}} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-s} 3^{1/3} \frac{1}{3} s^{-2/3} ds = 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} \frac{\Gamma(1/3)}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{soit } f(0) = \frac{\Gamma(1/3)}{2\pi 3^{1/6}}.$$

3.5. Montrer que f se prolonge en une fonction entière telle que $f''(x) = xf(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a de 3.1–3.2–3.3,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt/2} e^{i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} e^{-t^3/3} dt \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt/2} \cos\left(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) e^{-t^3/3} dt.$$

Le membre le plus à gauche de l'égalité ci-dessus est une fonction entière car pour $x \in \mathbb{C}$, $|x| \leq M$, $t \geq 0$, comme $|\cos z| \leq e^{|z|}$,

$$|e^{-xt/2} \cos\left(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) e^{-t^3/3}| \leq e^{Mt/2} e^{(\frac{\pi}{6} + Mt \frac{\sqrt{3}}{2})} e^{-t^3/3} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

En outre on a

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-xt/2} \cos\left(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) e^{-t^3/3} dt = \int_0^{+\infty} (e^{-\frac{xt}{2} + i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} + e^{-\frac{xt}{2} - i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})}) e^{-t^3/3} dt,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \{e^{-\frac{xt}{2} + i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})}\} &= e^{-\frac{xt}{2} + i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} \left(-\frac{t}{2} + it \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = e^{-\frac{xt}{2} + i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} t^2 e^{2i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})} \\ &= -e^{-\frac{xt}{2} + i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} t^2 e^{i\pi/3}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} 2\pi f''(x) &= \int_0^{+\infty} (-t^2) e^{-t^3/3} (e^{-\frac{xt}{2} + i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} e^{i\pi/3} + e^{-\frac{xt}{2} - i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} e^{-i\pi/3}) dt \\ &= \left[e^{-t^3/3} (e^{-\frac{xt}{2} + i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} e^{i\pi/3} + e^{-\frac{xt}{2} - i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} e^{-i\pi/3}) \right]_{t=0}^{t=+\infty} \\ &\quad - \int_0^{+\infty} e^{-t^3/3} (e^{-\frac{xt}{2} + i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} e^{i\pi/3} (-\frac{x}{2} + \frac{ix\sqrt{3}}{2}) + e^{-\frac{xt}{2} - i(xt \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})} e^{-i\pi/3} (-\frac{x}{2} - \frac{ix\sqrt{3}}{2})) dt. \end{aligned}$$

Comme $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il vient $e^{i\pi/3}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1$, $e^{-i\pi/3}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1$ et donc

$$2\pi f''(x) = x2\pi f(x) - (\underbrace{e^{i\pi/6} e^{i\pi/3}}_{=i} + \underbrace{e^{-i\pi/6} e^{-i\pi/3}}_{=-i}) = x2\pi f(x), \quad \text{qed.}$$