Université Pierre et Marie Curie
Master de Mathématiques, M2, Inégalités de Carleman
Examen final, mardi 25 février 2014, 13:30 – 16:30, salle 101, barre 15-16

Exercice 1.
1.1. Soit P un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients réels C^∞ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\phi(x) = x_n - x_n^2 + \sum_{1\le j\le n-1} x_j^2$. On suppose qu'il existe un voisinage ouvert Ω de 0, des constantes $C > 0$ et $\lambda_0 \ge 1$ tels que $\forall w \in C_c^\infty(\Omega), \forall \lambda \ge \lambda_0$ on ait

$$(*) \qquad C\|e^{-\lambda\phi}Pw\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ge \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\phi}w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda\phi}\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} u \subset \{x \in \mathbb{R}^n, x_n \ge 0\}$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |(Pu)(x)| \le |u(x)| + \sum_{1\le j\le n} |\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|.$$

Montrer que u est nulle au voisinage de 0.

1.2. Donner un exemple d'opérateur P satisfaisant $(*)$.

Exercice 2. Soient u_1, u_2 des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\operatorname{supp} u_1 \cup \operatorname{supp} u_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^n, x_n \ge 0\}, \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n, & |(\Delta u_1)(x)| \le |u_1(x)| + |u_2(x)|, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, & |(\Delta u_2)(x)| \le |u_1(x)| + |u_2(x)|. \end{cases}$$

2.1. En utilisant les résultats du cours, donner une inégalité de Carleman satisfaite par le laplacien pour le poids ψ avec $\psi(x) = x_n - \mu\frac{x_n^2}{2} + \frac{|x'|^2}{2\mu}$, où μ est un paramètre strictement positif.

2.2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert Ω de 0, des constantes $C > 0$ et $\lambda_0 \ge 1$, tels que pour $\lambda \ge \lambda_0$, $w_1, w_2 \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$C\|e^{-\lambda\psi}\Delta w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C\|e^{-\lambda\psi}\Delta w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ge \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

2.3. Montrer que u_1 et u_2 sont nulles au voisinage de $\{x \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}$.

Exercice 3.
On considère le champ de vecteurs complexes sur $\mathbb{R}^2_{t,x}$ donné par $L = D_t + it^2 D_x$ et l'on pose $f_\mu(t,x) = \int_0^t s^2(1-s)ds + \frac{x^2}{2\mu}$, où μ est un paramètre > 0.
3.1. Calculer le symbole $p(t,x,\tau,\xi)$ du champ L. Calculer le crochet de Poisson $\{\bar{p}, p\}$ et montrer qu'il n'existe pas de voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\exists C > 0, \forall (t,x) \in W, \forall (\tau,\xi) \in \mathbb{R}^2, \quad |\{\bar{p}, p\}(t,x,\tau,\xi)| \le C|p(t,x,\tau,\xi)|.$$

3.2. Calculer $L_{\lambda,\mu} = e^{-\lambda f_\mu} L e^{\lambda f_\mu}$.
3.3. Montrer que $D_t + xt^2 = e^{-ixt^3/3} D_t e^{ixt^3/3}$. Donner une expression de $L_{\lambda,\mu}$ en fonction de

$$M_{\lambda,\mu} = D_t + it^2\Big(D_x - \lambda + \lambda t(1 - \frac{t^2}{3\mu})\Big).$$

3.4. Montrer qu'il existe des constantes strictement positives C, μ, λ_0 et un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tels que $\forall v \in C_c^\infty(\Omega), \forall \lambda \ge \lambda_0$, $C\|L_{\lambda,\mu}v\|_{L^2} \ge \|v\|_{L^2}$.
3.5. Montrer que si u est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, supportée dans le demi-plan $\{t \ge 0\}$ et telle que $Lu = 0$, alors u est identiquement nulle.

Un corrigé sera disponible sur http://www.math.jussieu.fr/~lerner/index.m2carl.html