

Université Pierre et Marie Curie, Master de Mathématiques, M1,  
Equations aux dérivées partielles MM046, 5 juin 2013  
Corrigé de l'examen final, seconde session.

**Exercice 1.** Soit  $c$  un paramètre réel strictement positif. On considère l'opérateur des ondes en dimension un d'espace

$$\square_c = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

1.1. On pose  $\begin{cases} x_1 = x + ct, \\ x_2 = x - ct. \end{cases}$  Montrer que ce changement de variables est linéaire bijectif de  $\mathbb{R}_{t,x}^2$  dans  $\mathbb{R}_{x_1,x_2}^2$ .

On a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -2c \neq 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Donner l'expression de l'opérateur  $\square_c$  dans les coordonnées  $x_1, x_2$ .

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_2} = c \frac{\partial}{\partial x_1} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\square_c = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} = -4 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

1.3. Déterminer les solutions de  $\square_c u = 0$ . Les solutions de  $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$  sont  $f(x_1) \otimes 1$  où  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . On écrira simplement  $f(x_1)$ . On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} u = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x_1} u = f(x_1) \iff u - F(x_1) = g(x_2), F' = f.$$

Les solutions de  $\square_c u = 0$  sont donc les distributions de la forme  $f(x + ct) + g(x - ct)$ .

1.4. Déterminer toutes les solutions fondamentales de  $\square_c$ . Cherchons  $E(x, t)$  avec pour  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\kappa(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2c}(x_1 - x_2))$ ,

$$\phi(0, 0) = \langle \square_c E, \phi \rangle = \langle -4 \frac{\partial^2 (E \circ \kappa)}{\partial x_1 \partial x_2}, \phi \circ \kappa \rangle \frac{1}{2c}.$$

On peut choisir  $E \circ \kappa = \frac{c}{2} H(x_1) H(-x_2)$  soit, comme

$$\{(x, t), x + ct \geq 0\} \cap \{(x, t), x - ct \leq 0\} = \{(x, t), ct \geq |x|\}$$

$$E(x, t) = \frac{c}{2} H(ct - |x|).$$

En utilisant la question 1.3, on trouve que les solutions fondamentales de  $\square_c$  sont

$$\frac{c}{2}H(ct - |x|) + f(x + ct) + g(x - ct).$$

**Exercice 2.** Montrer qu'il existe  $T > 0$  tel que le problème de Cauchy suivant possède une solution.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = u, & 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 1 - |x|, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La méthode des caractéristiques donne

$$\begin{cases} \dot{x} = u & \begin{cases} x = x_0 + u_0(e^t - 1) \\ u = u_0 e^t \end{cases} \end{cases}$$

et avec  $x_0 = y$ ,  $\frac{d}{dt} \left\{ u(t, y + u_0(y)(e^t - 1)) \right\} = u(t, y + u_0(y)(e^t - 1))$  soit

$$u(t, y + u_0(y)(e^t - 1)) = e^t u_0(y).$$

$$\begin{cases} y < 0 : & x = ye^t + e^t - 1, & u(t, y + (1 + y)(e^t - 1)) = e^t(1 + y) \\ y > 0 : & x = y(2 - e^t) + e^t - 1, & u(t, y + (1 - y)(e^t - 1)) = e^t(1 - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 1 - e^t < 0 : & x = ye^t + e^t - 1, & u(t, x) = e^t(1 + (x + 1 - e^t)e^{-t}), \\ x + 1 - e^t > 0 : & x = y(2 - e^t) + e^t - 1, & u(t, x) = e^t(1 - \frac{x+1-e^t}{2-e^t}), \end{cases}$$

et donc pour  $0 \leq t < \ln 2$

$$u(t, x) = \check{H}(x + 1 - e^t)(x + 1) + H(x + 1 - e^t) \frac{1 - x}{2 - e^t} e^t.$$

On peut vérifier que

$$\partial_t u = \delta(x+1-e^t)e^t(x+1) - \delta(x+1-e^t)e^t \frac{1-x}{2-e^t} e^t + H(x+1-e^t)(1-x) \frac{e^t(2-e^t) + e^{2t}}{(2-e^t)^2}.$$

$$\partial_t u = H(x+1-e^t)(1-x) \frac{e^t(2-e^t) + e^{2t}}{(2-e^t)^2}.$$

$$\partial_x u = -\delta(x+1-e^t)(x+1) + \delta(x+1-e^t) \frac{1-x}{2-e^t} e^t + \check{H}(x+1-e^t) + H(x+1-e^t) \frac{e^t}{e^t - 2}$$

$$\partial_x u = \check{H}(x+1-e^t) + H(x+1-e^t) \frac{e^t}{e^t - 2}$$

$$u \partial_x u = \check{H}(x+1-e^t)(x+1) + H(x+1-e^t) \frac{e^t}{e^t - 2} \frac{1-x}{2-e^t} e^t.$$

$$\partial_t u + u \partial_x u = \check{H}(x+1-e^t)(x+1) + H(x+1-e^t) \left\{ (1-x) \frac{e^t(2-e^t) + e^{2t}}{(2-e^t)^2} + \frac{e^t}{e^t-2} \frac{1-x}{2-e^t} e^t \right\}$$

$$\partial_t u + u \partial_x u = \check{H}(x+1-e^t)(x+1) + H(x+1-e^t) \frac{1-x}{2-e^t} e^t \underbrace{\left\{ \frac{2}{2-e^t} + \frac{e^t}{e^t-2} \right\}}_{=1} = u$$

**Exercice 3.** Soit  $B$  une matrice  $2 \times 2$ , réelle symétrique.

3.1. Montrer que  $u_B(x) = e^{i\langle Bx, x \rangle}$  est une distribution tempérée sur  $\mathbb{R}^2$ . C'est une fonction  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

3.2. Soit  $\epsilon > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} e^{-\epsilon x^2} dx,$$

et montrer que cette quantité possède une limite que l'on calculera lorsque  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . On a par prolongement analytique

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} e^{-\epsilon x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\epsilon - i\lambda)x^2} dx = \pi^{1/2} (\epsilon - i\lambda)^{-1/2} = \pi^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \log(\epsilon - i\lambda)},$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} e^{-\epsilon x^2} dx = \pi^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \log(-i\lambda)} = \begin{cases} \text{si } \lambda > 0, & \pi^{1/2} \lambda^{-1/2} e^{\frac{i\pi}{4}}, \\ \text{si } \lambda < 0, & \pi^{1/2} |\lambda|^{-1/2} e^{-\frac{i\pi}{4}}. \end{cases}$$

3.3. Calculer la transformée de Fourier de  $u_B$  dans le cas où  $\det B \neq 0$ . Calculer la transformée de Fourier de  $u_B$  dans le cas où le rang de  $B$  vaut 1. La matrice  $B$  est réelle symétrique: il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que, avec  $\lambda_1, \lambda_2$  valeurs propres de  $B$ , on ait

$$B = PD^tP, \quad D \text{ diagonale} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On a pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\langle \widehat{u_B}, \phi \rangle = \langle u_B, \widehat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle Bx, x \rangle} \widehat{\phi}(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} e^{i\langle Bx, x \rangle} \phi(\xi) e^{-2i\pi x \cdot \xi} e^{-\epsilon |x|^2} dx d\xi.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle Bx, x \rangle} e^{-2i\pi x \cdot \xi} e^{-\epsilon |x|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle BP_y, P_y \rangle} e^{-2i\pi P_y \cdot \xi} e^{-\epsilon |y|^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2)} e^{-2i\pi y \cdot P\xi} e^{-\epsilon |y|^2} dy. \end{aligned}$$

On note également que pour  $\lambda \neq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t^2} e^{-2i\pi t \eta} e^{-\epsilon t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2(\epsilon - i\lambda)} e^{-2i\pi t \eta} dt = \pi^{1/2} (\epsilon - i\lambda)^{-1/2} e^{-\eta^2 \frac{\pi^2}{\epsilon - i\lambda}}$$

de limite ( $\epsilon \rightarrow 0_+$ )  $e^{-i\pi^2\eta^2\lambda^{-1}}\pi^{1/2}|\lambda|^{-1/2}e^{i\text{sign}\lambda\pi/4}$ . On a donc pour  $\det B \neq 0$

$$\langle \widehat{u}_B, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int \phi(\xi) \frac{\pi^{1/2}}{(\epsilon - i\lambda_1)^{1/2}} \frac{\pi^{1/2}}{(\epsilon - i\lambda_2)^{1/2}} e^{-\eta_1^2 \frac{\pi^2}{\epsilon - i\lambda_1}} e^{-\eta_2^2 \frac{\pi^2}{\epsilon - i\lambda_2}} d\xi, \quad \eta = {}^t P\xi.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne donc

$$\widehat{u}_B(\xi) = \pi |\det B|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4}(\text{sign}\lambda_1 + \text{sign}\lambda_2)} e^{-i\pi^2 \langle B^{-1}\xi, \xi \rangle}.$$

Si le rang de  $B$  vaut 1, on peut supposer  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ . Le même calcul donne

$$\widehat{u}_B(\xi) = \pi^{1/2} |\lambda_1|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}\lambda_1} e^{-i\pi^2 \lambda_1^{-1} \eta_1^2} \otimes \delta_0(\eta_2), \quad \eta = {}^t P\xi.$$

3.4. Soient  $b_1, b_2, \beta$  des réels. Déterminer une solution fondamentale de l'équation sur  $\mathbb{R}_{t,x_1,x_2}^3$ ,

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + b_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2\beta \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

On considère la matrice symétrique

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \beta \\ \beta & b_2 \end{pmatrix}.$$

On cherche  $E$  tel que

$$\frac{1}{i} \frac{\partial E}{\partial t} + \langle B \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle E = \delta_0(t) \otimes \delta_0(x), \quad \frac{\partial E}{\partial t} - i4\pi^2 \langle BD_x, D_x \rangle E = i\delta_0(t) \otimes \delta_0(x).$$

En supposant  $E$  tempérée et en désignant par  $u$  sa transformée de Fourier, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i4\pi^2 \langle B\xi, \xi \rangle u = i\delta_0(t), \quad u(t, \xi) = iH(t) e^{i4\pi^2 t \langle B\xi, \xi \rangle}$$

et si  $\det B \neq 0$ ,

$$E(t, x) = iH(t) e^{-i\langle B^{-1}x, x \rangle \frac{1}{4t}} |\det B|^{-1/2} (4\pi t)^{-1} e^{i\frac{\pi}{4}(\text{sign}\lambda_1 + \text{sign}\lambda_2)},$$

où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les valeurs propres de  $B$ . On vérifie donc a posteriori que cette formule fournit une distribution tempérée donnée par une formule analogue à (3.3.2) page 57 dans le polycopié.

Si  $\det B = 0$  et  $B$  est de rang 1, on a  $b_1 b_2 = \beta^2 \geq 0$ ; si  $b_1 > 0$ , alors  $b_2 \geq 0$  et si  $\pm\beta \geq 0$ ,

$$\langle B \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = (b_1^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_1} \pm b_2^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_2})^2, \quad \text{carré d'une forme linéaire.}$$

Si  $b_1 < 0$ , alors  $b_2 \leq 0$  et si  $\pm\beta \leq 0$ ,

$$-\langle B \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = ((-b_1)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_1} \pm (-b_2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_2})^2, \quad \text{carré d'une forme linéaire.}$$

Si  $b_1 = 0$ , alors  $b_2 \neq 0$  ( $B$  est de rang 1). Dans tous les cas où  $\det B \neq 0$ , rang  $B = 1$ , l'une des expressions  $\pm \langle B\xi, \xi \rangle$  est le carré d'une forme linéaire non nulle. On peut donc par un changement de variables linéaire se ramener à l'équation de Schrödinger unidimensionnelle

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$