

Corrigé de l'examen du 30 janvier 2007 (2ème session)

I

- 1) (i) $y^n xy^{-n} = x^a$ par une récurrence immédiate, d'où $y^n x^p y^{-n} = (y^n xy^{-n})^p = x^{pa}$.
(ii) $y^n x^p y^{-n} = x^{pa} \Rightarrow y^n x^p = x^{pa} y^n$ et $x^m y^n x^p y^q = x^{m+pa} y^{n+q}$; on peut prendre $r = m + pa$ et $s = n + q$.
(iii) x et y étant d'ordres finis, l'ensemble des $x^m y^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ est une partie finie non vide et stable, par (ii), de Γ , c'est donc un sous groupe, et c'est donc G .
 $x^m y^n = x^p y^q \Leftrightarrow x^{m-p} = y^{q-n} \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\} \Leftrightarrow m \equiv p \pmod{m-p}$ et $n \equiv q \pmod{q-n}$.
(iv) Les éléments distincts de G sont donc les $x^m y^n$, $0 \leq m \leq M-1$ et $0 \leq n \leq N-1$, donc $|G| = MN$ et la table de multiplication de G est donnée par (ii).

- 2) $2007 = 3^2 \cdot 223$, il n'y a donc que deux possibilités à isomorphismes près :

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/223\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/223\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}/2007\mathbb{Z}, \quad \text{ce dernier possédant un élément d'ordre 9, ce qui n'est pas cyclique.}$$

- 3) $k^* = k \setminus \{0\}$ est d'ordre $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$, donc son 3-Sylow est d'ordre 3, cyclique, et si $\bar{a}$ en est un générateur, il s'écrit $R = \{\bar{1}, \bar{a}, \bar{a}^2\}$ avec $\bar{a}^3 = \bar{1}$.

- 4) (i) $2007 = 3^2 \cdot 223$, donc les 3-Sylow de G sont d'ordre 9 et les 223-Sylow d'ordres 223. $n_3 = 1 \pmod{3}$ et $n_3 \mid 2007$ donc 223, donc $n_3 = 1$ ou 223.
 $n_{223} = 1 \pmod{223}$ et $n_{223} \mid 2007$ donc 9, donc $n_{223} = 1$. Il y a donc un seul 223-Sylow H , et il est cyclique puisque d'ordre premier.

- (ii) K étant d'ordre 9, y aussi. Comme H est distingué, on a $xyx^{-1} \in H = \langle x \rangle$, d'où $\alpha D'$ après (1.i) on a $y^2 xy^{-2} = x^a$, mais $y^2 = e$, donc $x = x^a$, soit $223 \mid a^2 - 1$, ou encore $\bar{a}^2 = \bar{1}$ dans k , donc l'ordre de $\bar{a}$ dans k^* est 1, 3 ou 9 donc (3) $\Rightarrow \bar{a} \in R$. On n'a pas $\bar{a} = \bar{1}$ sinon $223 \mid a - 1$ donc $x^a = x$ d'où $xy = yx$ et $G = HK$ serait commutatif, ce qui contredit l'hypothèse.

Bien sûr $\bar{a} = \bar{\beta} \Rightarrow 223 \mid \alpha - \beta \Rightarrow x^\alpha = x^\beta$, supposons $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$, alors $\bar{\alpha} = \bar{a}$ donc $\bar{a}^2 = \bar{a}$ et $y^2 xy^{-2} = x^a = x^a$, or y étant d'ordre 9 impair, on a encore $K = \langle y^2 \rangle$, on voit donc, d'après (1.iv), que G avec K cyclique, s'il existe, est unique à isomorphismes près.

- 5) Evidemment u est d'ordre 223 et v d'ordre 9.

$$(i) X^n = \begin{pmatrix} u^n & 0 & 0 \\ 0 & u^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & u^{4n} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad X^n = I \Rightarrow u^n = 1 \Rightarrow 223 \mid n, \text{ on voit aussi que } X^{223} = I,$$

donc X est d'ordre 223. On a $S^3 = I$, donc S est d'ordre 3, d'où $S^{-1} = S^2$, et si

(e_1, e_2, e_3) est la base canonique de C^3 , on a
 $SXS^{-1}e_1 = u^a e_1, SXS^{-1}e_2 = u^a e_2, SXS^{-1}e_3 = u^a e_3$, c'est à dire $SXS^{-1} = X^a$ car
 $\bar{a}^3 = \bar{1} \Rightarrow u^{a^3} = u$.

- (ii) On a $Y^3 = v^3 S^3 = v^3 I = I$ et $Y^2 = I$, donc Y est d'ordre 9. $Y^{-1} = v^{-1} S^{-1}$, d'où
 $YXY^{-1} = (vS)X(v^{-1}S^{-1}) = vv^{-1}SXS^{-1} = X^a$, d'où le résultat d'après 1).

II

- 1) A étant commutatif, chaque élément de A est une classe, il y a N classes. Il y a donc N représentations irréductibles de A non isomorphes, de degrés $(n_i)_{1 \leq i \leq N}$ et comme
 $\sum_{i=1}^N n_i^2 = |A| = N$, on a $\forall i, n_i = 1$.

- 2) A étant fini, si $x \in A$, il existe $n > 0$ tel que $x^n = e$ et comme Φ est un homomorphisme, $\Phi(x^n) = \Phi(x)^n = \Phi(e) = 1$ donc $|\Phi(x)| = |\Phi(x)^n| = |\Phi(x)|^n = 1$ donc $|\Phi(x)| = 1$.

- (i) Φ est un homomorphisme et si $x \in A$, $\Phi(x)$ est un scalaire, il est alors immédiat que σ est un homomorphisme. L'espace V de σ est le même que celui de ρ donc $n_\sigma = n_\rho$, et $X_\sigma(x, y) = \text{Tr}(\sigma(x)y) = \text{Tr}(\Phi(x)\rho(y)) = \Phi(x)\text{Tr}(\rho(y)) = \Phi(x)X_\rho(y)$.

$$|A \times G| \langle X_\sigma, X_\sigma \rangle = \sum_{y \in G} |X_\sigma(x, y)|^2 = \sum_{y \in G} |\Phi(x)X_\rho(y)|^2 = \sum_{y \in G} |\Phi(x)|^2 |X_\rho(y)|^2 \quad (\text{car } |\Phi(x)| = 1) \\ = \sum_{y \in G} |G| \langle X_\rho, X_\rho \rangle = |G| \sum_{y \in G} 1 \quad (\text{car } \rho \text{ est irréductible}) = |G||A|, \text{ d'où } \langle X_\sigma, X_\sigma \rangle = 1, \text{ donc } \sigma \text{ est irréductible.}$$

- (ii) On a, pour $y \in G$, $X_\sigma(e, y) = X_\rho(e, y) = \Phi(e)X_\rho(y) = \Phi(e)X_\rho(y) = X_\rho(y) = X_\rho(y)$ donc $X_\sigma = X_\rho$, donc ρ est isomorphe à σ , d'où $n_\sigma = n_\rho$ et si $x \in A$,
 $X_\sigma(x, e) = X_\rho(x, e) = \Phi(x)X_\rho(e) = \Phi(x)X_\rho(e) = \Phi(x)n_\rho = \Phi(x)n_\sigma$, donc
 $\Phi(x) = \Phi(x)$, et $\Phi = \Phi$.