Examen du cours de M2 Géométrie différentielle et riemannienne

23/10/2020. Durée : 3h. Aucun document autorisé.

Exercice 1. Question de cours. Énoncer et démontrer le théorème de Frobenius.

Exercice 2. Soit H le groupe (de Heisenberg) des matrices 3x3 triangulaires supérieures :

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les coordonnées (x, y, z) identifient H à $\mathbb{R}^3$, et on notera un élément $h \in \mathrm{H}$ par ces coordonnées : $h = (x, y, z)$.

Pour $u \in \mathrm{H}$, on considère les translations à gauche et à droite, $\mathrm{L}_u : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ et $\mathrm{R}_u : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$, définies par

$$\mathrm{L}_u(h) = uh, \quad \mathrm{R}_u(h) = hu.$$

Soient A, B et C les champs de vecteurs de H définis par

$$\mathrm{A} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathrm{B} = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathrm{C} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Soit g la métrique riemannienne sur H pour laquelle $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ est une base orthonormée.

(i) Calculer les crochets $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, $[\mathrm{A}, \mathrm{C}]$ et $[\mathrm{B}, \mathrm{C}]$.

(ii) Montrer que pour tout $u = (a, b, c) \in \mathrm{H}$, on a $\mathrm{L}_u^*\mathrm{A} = \mathrm{A}$, $\mathrm{L}_u^*\mathrm{B} = \mathrm{B}$ et $\mathrm{L}_u^*\mathrm{C} = \mathrm{C}$, mais $\mathrm{R}_u^*\mathrm{A} = \mathrm{A} - b\mathrm{C}$, $\mathrm{R}_u^*\mathrm{B} = \mathrm{B} + a\mathrm{C}$ et $\mathrm{R}_u^*\mathrm{C} = \mathrm{C}$.

(iii) Montrer que L_u est une isométrie pour tout $u \in \mathrm{H}$. Est-ce le cas pour la translation à droite R_u ?

(iv) On rappelle la formule donnant la connexion de Levi-Civita :

$$2\langle \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle = \mathrm{X}\cdot\langle \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle + \mathrm{Y}\cdot\langle \mathrm{Z}, \mathrm{X}\rangle - \mathrm{Z}\cdot\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle + \langle [\mathrm{X}, \mathrm{Y}], \mathrm{Z}\rangle - \langle [\mathrm{X}, \mathrm{Z}], \mathrm{Y}\rangle - \langle [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}], \mathrm{X}\rangle.$$

Montrer que la connexion de Levi-Civita de g est donnée par les formules :

$$\begin{array}{lll} \nabla_{\mathrm{A}}\mathrm{A} = 0, & \nabla_{\mathrm{B}}\mathrm{A} = -\frac{1}{2}\mathrm{C}, & \nabla_{\mathrm{C}}\mathrm{A} = -\frac{1}{2}\mathrm{B}, \\ \nabla_{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \frac{1}{2}\mathrm{C}, & \nabla_{\mathrm{B}}\mathrm{B} = 0, & \nabla_{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \frac{1}{2}\mathrm{A}, \\ \nabla_{\mathrm{A}}\mathrm{C} = -\frac{1}{2}\mathrm{B}, & \nabla_{\mathrm{B}}\mathrm{C} = \frac{1}{2}\mathrm{A}, & \nabla_{\mathrm{C}}\mathrm{C} = 0. \end{array}$$

(v) Calculer le tenseur de courbure. Calculer les trois courbures sectionnelles $K(A \wedge B)$, $K(A \wedge C)$ et $K(B \wedge C)$.

(vi) Montrer que les champs de vecteurs $A + yC$, $B - xC$ et C sont des champs de Killing.

(vii) Calculer les géodésiques de H. Préciser leur projection sur le plan (xy).

Exercice 3. *Rappel.* Si $\Sigma \subset M$ est une hypersurface, alors en coordonnées normales autour de Σ, on peut écrire $g = ds^2 + g_s$, où s est la distance à Σ et g_s est une famille de métriques sur Σ. L'endomorphisme de Weingarten est $A = -\frac{1}{2} g_s^{-1} \frac{dg_s}{ds}$, et pour la courbure sectionnelle on a la formule, si Y est tangent à Σ,

$$K(Y \wedge \frac{\partial}{\partial s}) = \frac{\left\langle (\frac{dA}{ds} - A^2)Y, Y \right\rangle}{|Y|^2}.$$

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant : *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne compacte, connexe, orientée, de dimension* ***paire****, à courbure sectionnelle strictement positive ; alors toute isométrie* ϕ *de* (M, g) *préservant l'orientation admet un point fixe.*

(i) Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à un point x associe la distance entre x et $\phi(x)$, donc $f(x) = d(x, \phi(x))$. Montrer qu'il existe

- un point $x_0 \in M$ tel que f atteint son minimum en x_0 ;
- une géodésique $c : [0, 1] \longrightarrow M$ reliant x_0 à $x_1 := \phi(x_0)$, et minimisant la distance.

(ii) Soit $y = c(\frac{1}{2})$ le milieu de c. Montrer que le chemin obtenu en suivant c de y à x_1, puis $\phi \circ c$ de $x_1 = \phi(x_0)$ à $\phi(y)$, minimise la distance. Déduire que $d_{x_0}\phi(\dot{c}(0)) = \dot{c}(1)$.

(iii) Soit $\tau : T_{x_0}M \longrightarrow T_{x_1}M$ le transport parallèle le long de c. On considère $A \in \mathrm{End}(T_{x_0}M)$ défini par $A = \tau^{-1} \circ d_{x_0}\phi$. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in T_{x_0}M$ tel que $v \perp \dot{c}(0)$ et $Av = v$. On choisit v de sorte que $|v| = 1$.

(iv) Soit X le champ de vecteurs le long de c obtenu par transport parallèle de v le long de c, donc $X(t) \in T_{c(t)}M$ et $\nabla_{\dot{c}} X = 0$. Soit $c_s(t) = \exp_{c(t)}(sX(t))$. Montrer que pour tout t on a, quand $s \longrightarrow 0$,

$$|\dot{c}_s(t)|^2 = |\dot{c}(t)|^2 \left(1 - K(\dot{c}(t) \wedge X(t))\, s^2\right) + o(s^2).$$

(v) Déduire que ϕ admet un point fixe.