SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Examen du cours de M2 Géométrie différentielle et riemannienne

28/10/2021. Durée : 3h. Notes de cours et de TD autorisées sous forme papier. Toute question peut être traitée en admettant les questions précédentes.

Exercice 1. Soit $vol = dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume de $\mathbb{R}^3$ à coefficients constants. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte ; l'intérieur de S est un domaine $N \subset \mathbb{R}^3$ dont le bord est $\partial N = S$. Pour $p \in S$ on note $\nu(p)$ la normale sortante en p à S. Soit la 2-forme d'aire $\sigma \in \Omega^2(S)$ définie par $\sigma(X, Y) = vol(\nu(p), X, Y)$ si $X, Y \in T_pS$. L'aire de S est $\int_S \sigma$.

1. Soit $\alpha = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$. Calculer $d\alpha$.

2. Montrer que si (V_1, V_2) est une base orthonormée directe de T_pS, alors

$$\alpha(V_1, V_2) \leqslant \|p\| \sigma(V_1, V_2).$$

3. En déduire que si N est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R, alors

$$\text{volume}(N) \leqslant \frac{R}{3} \text{aire}(\partial N).$$

Exercice 2. Soit (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes, on considère le produit $M = M_1 \times M_2$. Si $x = (x_1, x_2) \in M$ alors $T_xM = T_{x_1}M_1 \oplus T_{x_2}M_2$, et on note $X = X_1 + X_2$ la décomposition de $X \in T_xM$ sur cette somme directe. Soit g la métrique riemannienne sur M définie par $g(X, Y) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$.

1. Soient ∇^1, ∇^2 et ∇ les connexions de Levi-Civita de M_1, M_2 et M. Supposons que X_1 soit un champ de vecteurs sur M_1 et X_2 un champ de vecteurs sur M_2, alors on considère le champ de vecteurs X sur M défini par $X(x) = X_1(x_1) + X_2(x_2)$. Considérons de même le champ de vecteurs $Y(x) = Y_1(x_1) + Y_2(x_2)$, où Y_i est un champ de vecteurs sur M_i. Montrer qu'on a $\nabla_X Y = \nabla^1_{X_1} Y_1 + \nabla^2_{X_2} Y_2$.

2. Soient R^1, R^2 et R les courbures de M_1, M_2 et M. Montrer que

$$g(R_{X,Y}Z, T) = g_1(R^1_{X_1,Y_1}Z_1, T_1) + g_2(R^2_{X_2,Y_2}Z_2, T_2).$$

3. Calculer les courbures sectionnelles de $S^n \times S^1$, où la sphère S^n et le cercle S^1 sont munis de leurs métriques standards.

4. La variété $S^n \times S^1$ admet-elle une métrique à courbure sectionnelle $K > 0$? à $K < 0$?

Exercice 3. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, $p : M \longrightarrow N$ une submersion. Pour $y \in N$ on note $F_y = p^{-1}(y)$ la fibre de p au point y, et pour $x \in F_y$, soit $V_x = T_xF_y = \ker d_xp$ l'espace tangent « vertical », c'est-à-dire tangent à la fibre. On définit l'espace horizontal H_x comme l'orthogonal pour g de V_x dans T_xM. Ainsi chaque espace tangent T_xM se décompose en une somme directe orthogonale

$$T_xM = H_x \oplus V_x,$$

et on décomposera un vecteur $X \in T_xM$ sur cette somme comme $X = X^H \oplus X^V$. La différentielle $d_xp = p_*$ identifie H_x à T_yN.

Enfin, on suppose que p est une *submersion riemannienne*, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $X, Y \in H_x$ on a

$$g(X, Y) = h(p_*X, p_*Y).$$

1° Pour deux champs de vecteurs horizontaux $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{H}$ on définit $\mathrm{A}_{\mathrm{X},\mathrm{Y}} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^{\mathrm{V}}$. Montrer que $\mathrm{A}_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x)$ ne dépend que des valeurs de X et Y au point x, donc A est un tenseur (une section du fibré $\Lambda^2\mathrm{H}^* \otimes \mathrm{V}$).

2° Dans cette question on suppose $\mathrm{A} = 0$ et les fibres F_y compactes. Soit un point $y \in \mathrm{N}$ de fibre $\mathrm{F} = \mathrm{F}_y$. Montrer que y admet un voisinage $\mathrm{V} \subset \mathrm{N}$ tel que $p^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{V} \times \mathrm{F}$ (avec $p(v, f) = v$), et la métrique g se décompose comme $g = h + \gamma_v$, où γ_v est une métrique sur $\{v\} \times \mathrm{F}$.

3° On ne suppose plus que A s'annule. Montrer qu'un champ de vecteurs U sur M est vertical ($\mathrm{U}_x \in \mathrm{V}_x$ pour tout x) si et seulement si pour toute fonction f sur N, on a $\mathrm{U} \cdot (f \circ p) = 0$.

Un champ de vecteurs X sur N se remonte en un unique champ de vecteurs horizontal $\tilde{\mathrm{X}} \in \mathrm{H}$ sur M tel que $p_* \tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X}$.

Montrer que si U est vertical, alors $[\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{U}]$ est vertical.

4° Montrer que

$$[\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}}] = \widetilde{[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]} + \mathrm{A}_{\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{Y}}}$$

pour tous champs de vecteurs X et Y sur N.

5° Montrer que pour tous champs de vecteurs X et Y sur N, on a

$$\nabla_{\tilde{\mathrm{X}}} \tilde{\mathrm{Y}} = \widetilde{\nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}} + \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_{\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{Y}}}.$$

Si U est vertical, montrer que

$$\langle \nabla_{\tilde{\mathrm{X}}} \mathrm{U}, \tilde{\mathrm{Y}} \rangle = -\tfrac{1}{2} \langle \mathrm{A}_{\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{Y}}}, \mathrm{U} \rangle.$$

6° Soit $c : [0, 1] \longrightarrow \mathrm{M}$ une géodésique telle que $\dot{c}(0) \in \mathrm{H}_{c(0)}$. Montrer qu'alors $\dot{c}(t) \in \mathrm{H}_{c(t)}$ pour tout t, et $p \circ c$ est une géodésique dans N.

7° Montrer

$$\langle \nabla_{\tilde{\mathrm{X}}} \nabla_{\tilde{\mathrm{Y}}} \tilde{\mathrm{Z}}, \tilde{\mathrm{T}} \rangle = \langle \nabla_{\mathrm{X}} \nabla_{\mathrm{Y}} \mathrm{Z}, \mathrm{T} \rangle - \tfrac{1}{4} \langle \mathrm{A}_{\tilde{\mathrm{Y}},\tilde{\mathrm{Z}}}, \mathrm{A}_{\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{T}}} \rangle.$$

En déduire, si (X, Y) est orthonormé, la formule de O'Neill :

$$\mathrm{K}^{\mathrm{M}}(\tilde{\mathrm{X}} \wedge \tilde{\mathrm{Y}}) = \mathrm{K}^{\mathrm{N}}(\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}) - \tfrac{3}{4} \|\mathrm{A}_{\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{Y}}}\|^2.$$

8° ***Un exemple : la métrique de Fubini-Study sur*** $\mathbb{CP}^n$.

On considère la projection $p : \mathrm{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$, où on voit la sphère $\mathrm{S}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$, munie de sa métrique standard g. Ainsi, pour $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1}$, on a $p(z) = p(z')$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' = e^{i\theta} z$.

On définit le produit hermitien H sur $\mathbb{C}^n$ par $\mathrm{H}(z, z') = \sum_0^n \overline{z_i} z'_i$.

a. Montrer que l'espace tangent vertical V_x est la droite réelle engendrée par le vecteur $\mathscr{V}(x) = ix$, et que l'espace horizontal H_x est l'orthogonal de x pour le produit hermitien H.

b. Montrer qu'il existe une métrique riemannienne h sur $\mathbb{CP}^n$ de sorte que p soit une submersion riemannienne.

c. Montrer que pour X, Y horizontaux sur S^{2n+1} on a $\mathrm{A}_{\mathrm{X},\mathrm{Y}} = 2(\operatorname{Im} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})) \mathscr{V}$.

d. Décrire les géodésiques de $\mathbb{CP}^n$. Quel est le diamètre de $\mathbb{CP}^n$?

e. Montrer que la courbure sectionnelle de $\mathbb{CP}^n$ satisfait $1 \leqslant \mathrm{K} \leqslant 4$, et que toutes les valeurs dans cet intervalle sont atteintes. Montrer que la courbure de Ricci est $\mathrm{Ric}(h) = (2n + 2)h$, en particulier h est une métrique d'Einstein.