(Christian)

INTRODUCTION AU GROUPE DE TRAVAIL

2 aspects : • théorie de Lie supérieure
• homologie d'entrelacs

I - Groupe quantique et invariants quantiques d'entrelacs

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ algèbre de Hopf

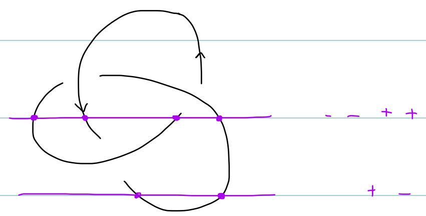
$\mathcal{C} = \mathrm{Rep}\, U_q(\mathfrak{sl}_2)$ catégorie monoïdale avec dualité [pivotale : dualité à droite $\simeq$ dualité à gauche]

+ tressage (venant d'une R-matrice universelle de $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$)

$\mathcal{C}$ est une catégorie enrubannée

Catégorie des enchevêtrements

idée : découpage des entrelacs en "tranches"



• objets : suite finie de signes

• morphismes : plongements d'intervalles et de cercles à isotopie relative au bord près

Composition : $t \circ t' = \boxed{\begin{matrix} t' \\ t \end{matrix}}$ et produit tensoriel $t \otimes t' = \boxed{t \mid t'}$

Thm [Reshetikhin-Turaev] Pour $\mathcal{C}$ enrubannée et $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, il existe un unique foncteur monoïdal

tq $RT(+) = V$, $RT(-) = V^*$ et sur les flèches

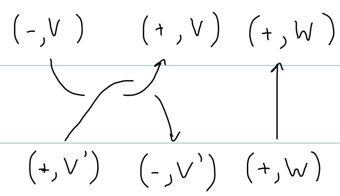
RT : $\uparrow \longmapsto id_V$ $\quad \curvearrowleft$ et $\curvearrowright \longmapsto$ évaluation $\qquad \longmapsto$ tressage

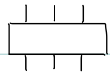
$\downarrow \longmapsto id_{V^*}$ $\quad$ et $\quad \longmapsto$ coévaluation

$\mathcal{C}$ enrubannée $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Rib}_{\mathcal{C}}$ "graphes rubans coloriés par $\mathcal{C}$"

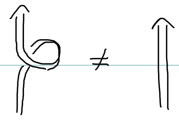
• objets : suites finies de couples (signe, objet de $\mathcal{C}$)

• morphismes : enchevêtrements avec brins colorés (+ compatibilité au bord)



+ coupons : morphismes de $\mathcal{C}$ représentés par 

$\rightsquigarrow$ Foncteur de RT $\quad \mathrm{Rib}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$

Rmq : il faut considérer des enchevêtrements parallélisés [framed tangles] et 

II Problème de catégorification

* Pour les invariants d'entrelacs : $P(L) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ polynôme de Jones

But : $Kh^{i,j}(L)$ théorie d'homologie graduée avec $P(L) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim Kh^{i,j}(L)$

qui est un invariant de L

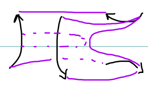
* Pour les enchevêtrements : objet $\longmapsto$ catégorie

morphisme $\longmapsto$ foncteur

tq K_0 reproduise la représentation RT

foncteur de Grothendieck scindé

Version forte : Catégorie des 2-enchevêtrements

2-morphismes plongés en dim 4 , ex : 

Pb : construire un 2-foncteur sur $2\text{-}\mathcal{T}$ à valeur dans la 2-cat. des catégories

2-enchevêtrement

ou ______ la 2-cat des bimodules

[Khovanov] donne une solution

Catégorification de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Version idempotente $\quad \bigoplus_{n,m} 1_m U_q(\mathfrak{sl}_2) 1_n \quad$ avec 1_n = projecteur sur les vecteurs de poids n.

$\dot{\mathcal{U}}$ = catégorie avec objets les entiers (poids) et morphismes $1_m U_q(\mathfrak{sl}_2) 1_n$

Catégorification : $\dot{\mathfrak{U}}$ tq $K_0(\dot{\mathfrak{U}}) = \dot{\mathcal{U}}$ $\quad$ (2-catégorie)

On voudrait un 2-foncteur $\quad 2\text{-}\mathcal{T} \longrightarrow$ 2 cat linéaire donné par action de $\dot{\mathfrak{U}}$

On voudrait $\quad 2\text{-}\mathcal{T} \longrightarrow$ 2-cat linéaire

[Webster] donne un exemple d'une telle construction redonnant l'homologie de Khovanov

Liste d'exposés

- $\mathcal{U}^-$ et énoncé pour les modules [KL I, Kang-Kashiwara]
- $\dot{\mathcal{U}}$ construction du cas général, cas $\mathfrak{sl}_n$ (construction d'une partie de l'iso) et preuve dans $\mathfrak{sl}_2$ [KL III]
- Produit tensoriels de modules [Webster]