(Léo)

ÉQUIVALENCES PERVERSES : LE CAS DES ALGÈBRES SYMÉTRIQUES

I - Algèbres symétriques

$k = \bar{k}$ corps algébriquement clos

A, B k-alg. de dim finie

On travaillera avec les catégories suivantes : A-mod, A-proj, $\mathrm{Comp}^b(A)$, $D^b(A)$, $D_{parf}(A)$

complexes bornés = $\mathrm{Comp}^b(A)$; $D^b(A\text{-mod}) = D^b(A)$; sous-cat. pleine des complexes parfaits (ie qis à un complexe borné de A-proj) = $D_{parf}(A)$

déf : A k-algèbre est dite **symétrique** s'il existe $\lambda : A \to k$ tq

- $\forall x, y \quad \lambda(xy) = \lambda(yx)$
- $\ker \lambda$ ne contient aucun idéal $\neq 0$ à droite ou à gauche

Ex : (1) kG pour G gp fini muni de $\lambda(\sum \alpha_g g) = \alpha_1$

(2) Hecke (certains)

(3) $\begin{pmatrix} * & \\ \circ & * \\ & & * \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique

Propriétés : A k alg. symétrique

(1) $M \in A$-mod, alors $M \in A$-proj $\Leftrightarrow M \in A$-inj

(2) $P \in A$-PIM's $\quad P/\mathrm{rad}\,P \simeq \mathrm{soc}(P)$ (PIM's = module proj. indécomposable)

Lemme Omnibus : se valent

(1) A k-alg. symétrique

(2) A et $A^\vee = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ sont isomorphes comme (A,A) bimodules

(3) $\mathrm{Hom}_k(-, k)$ et $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ sont naturellement isomorphes comme foncteurs A-mod $\to$ mod-A

ou/et ——— mod-$A \to A$-mod

(4) $M \in A$-mod, $P \in A$-proj $\quad \mathrm{Hom}_A(P, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, P)^\vee$

(4') — mod-A, — proj-A, ———

(5) $M^\bullet \in \mathrm{Com}^b(A\text{-mod})$, $P^\bullet \in \mathrm{Com}^b(A\text{-proj})$ alors $\mathrm{Hom}_{D(A)}(P^\bullet, M^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_{D(A)}(M^\bullet, P^\bullet)^\vee$

Aparté sur les foncteurs de Serre

$\mathcal{C}$ k-linéaire additive + Hom's finis

déf : $S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un foncteur de Serre à droite si pour tout objet X, Y on a $\Phi_{XY} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SY) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)^\vee$

(naturel en X et Y)

Si $S : \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}$ alors S est un foncteur de Serre

Faits : • deux foncteurs de Serre sont naturellement isomorphes [Reiten, Van den Bergh]

• si A k-alg. de dim globale finie alors il existe un foncteur de Serre sur $D(A)$ égal à $\underbrace{\mathbb{L}\mathrm{Hom}_A(-, A)^\vee}_{\text{Foncteur de Nakayama}}$

de plus $S = \mathrm{Id} \Leftrightarrow A$ est symétrique

II Équivalences dérivées

Théorème : A, B k-algèbres. Se valent :

(1) Il existe $F : D^b(A) \simeq D^b(B)$

(2) Il existe $X \in \mathrm{Comp}^b(B\text{-mod-}A)$ tq $- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A X : D^b(A) \simeq D^b(B)$ (complexe basculant bilatère)

(3) Il existe $T \in \mathrm{Com}^b(B\text{-mod})$ tq (complexe basculant)

- T parfait
- $\mathrm{Hom}_{D(B)}(T, T[n]) = 0$ si $n \neq 0$ et $\mathrm{End}_{D(B)}(T) = A$
- T engendre $D_{perf}(B)$

Réduction dans le cas symétrique

Rmq : B k-alg symétrique alors il suffit de vérifier que $\mathrm{Hom}(T, T[n]) = 0$ pour $n > 0$

car T parfait $\Rightarrow \mathrm{Hom}_{D(B)}(T, T[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{D(B)}(T, T[-n])^\vee$

Thm $\Rightarrow Y$ quasi inverse de X tq $Y \simeq \mathrm{Hom}_A(X, A) \simeq \mathrm{Hom}_B(X, B)$ (en supposant X proj. à gauche et à droite)

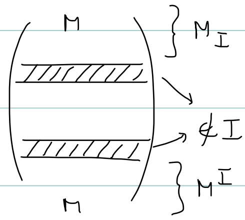
$\Uparrow$ toujours vrai pour les algèbres symétriques

III Equivalences perverses sur les alg. symétriques

A k-alg. symétrique, $\mathcal{S} = \mathrm{Irr}(A)$, A_V enveloppe proj de $V \in \mathrm{Irr}\, A$ (sur A)

On fixe $I \subseteq S$

Pour $M \in A\text{-mod}$, on définit M_I = + gd quotient de A_M par un sous module de $\underset{\mathrm{Ker}(A_M \twoheadrightarrow M)}{\Omega M}$ tq tous les facteurs de composition de $\mathrm{Ker}(M_I \to M)$ soient dans I

A_M : 

On définit de m̂ M^I plus grand sous module de A_M contenant M tq M^I/M a tous ses facteurs dans I

$V \in I \longmapsto T_V(I) = 0 \to \overset{-1}{Q_V} \to \overset{0}{A_V} \to 0$ avec Q_V = env proj de $\mathrm{Ker}(A_V \to V_I)$

$V \notin I \longmapsto T_V(I) = 0 \to \overset{-1}{A_V} \to 0$ (notons que les simples de Top Q_V ne sont pas dans I)

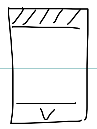
On définit $T^\bullet = \bigoplus_{V \in S} T_V(I) \in \mathrm{Comp}^b(A\text{-mod})$ (dépend de I)

Prop : $T^\bullet$ est un complexe basculant

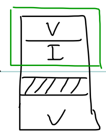
Preuve : Il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{D(A)}(T, T[-1]) = 0$ donc $\mathrm{Hom}(T_V, T_W[-1]) = 0$

p.ex si $V \in I$ et $W \notin I$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q_V \arrow[r, "d_V"] \arrow[d] & A_V \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A_W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}\, d_V =$ 

$\notin I$

$A_V =$ 

$\subseteq A_W$ mais $\mathrm{soc}(A_W) = W \notin I$ donc $f = 0$ □

Prop : $F = \mathrm{Hom}^\bullet_A(T^\bullet, -) : D^b(A) \to D^b(A')$ où $A' = \mathrm{End}^\bullet_A(T^\bullet)$ qui donne une bijection

quasi-isomorphe à $\mathrm{End}_{D(A)}(T^\bullet)$

$\mathrm{Irr}\, A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}\, A'$ définie par $F(T_V) = A'_{V'}$

$V \longmapsto V'$

De plus $F^{-1}(V') = \begin{cases} V & \text{si } V \in I \\ V^I[1] & \text{si } V \notin I \end{cases}$

Conséquence : F est une équivalence perverse pour la filtration $\emptyset \subseteq I \subseteq S$ et perversité $p(0) = 0$ et $p(1) = -1$

on dit que F est une équivalence perverse élémentaire

Rmq : $F_\emptyset = \mathrm{Id}$ et $F_S = [-1]$

Rmq : on peut décomposer une équivalence perverse en une succession d'équivalences élémentaires

Cas perversité faiblement décroissante

On peut toujours se ramener au cas • $p(i) \neq p(i+1)$: filtration minimale

• $| I_{i+1} \setminus I_i | = 1$: ______ maximale

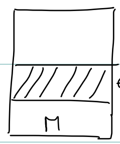
Thm : A k-alg symétrique et $X \in \mathrm{Comp}^b(A\text{-proj})$ tq $\mathrm{Hom}_A(X^i, H^j(X)) = 0 \ \forall i < j$ et X engendre $D_{perf}(A)$. Alors X est basculant et $G = \mathrm{Hom}_A(X, -) : D^b(A\text{-mod}) \to D^b(A'\text{-mod})$ est pervers de perversité décroissante (au sens large).

Idée : (1) On construit $T^\bullet$ complexe basculant de perversité $p(i) = -i$

On choisit une filtration $\emptyset \subseteq I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_r = S$

Pour $i \in \{0, \dots, r\}$ et $V \in I_i \setminus I_{i-1}$ $\rightsquigarrow$ complexe en degré $-r, \dots, -i$ avec

- $T_V^{-i} = A_V$
- si on a construit $T_V^{-i}, \dots, T_V^{-j}$ on construit T_V^{-j-1} de la façon suivante :

$T_V^{-j} =$  $\in I_J \}$ $\mathrm{Ker}(d : T_V^{-j} \to T_V^{-j+1}) = K$

avec M plus petit sous-module de K tq facteurs de composition de K/M soit dans I_J

$$d : T_V^{-j-1} \to T_V^{-j} = (\underbrace{T_V^{-j-1} \twoheadrightarrow M}) \circ (M \hookrightarrow T_V^{-j})$$

T_V^{-j-1} = env. proj de M

On a $\mathrm{Top}(T_V^{-j}) \subseteq I_{j-1}$ et facteurs de composition de $H^{-j}(T_V^\bullet)$ sont dans I_j

$T^\bullet = \bigoplus T_V^\bullet$ donne le complexe basculant.

(2) On choisit pour filtration $I_i := \{ V \in A\text{-simple} \mid \mathrm{Hom}_A(X^{-j}, V) = 0 \ \forall j \geq i \}$

$\to$ filtation de Irr A et on construit T et $F = \mathrm{Hom}_A^\bullet(T, -) : D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{End}_{D(A)}(T^\bullet))$

Avec les hypothèses sur X on montre que GF^{-1} induit une équivalence de Morita $\mathrm{End}_{D(A)}(T^\bullet) \xrightarrow{\sim} A'$

$\Rightarrow$ par transfert G est pervers de perversité $p(i) = -i$ $\square$

Rmq : la filtration définie par X peut vérifier $I_{i-1} = I_i$ pour certaines valeurs. Si on renumérote la filtration de sorte que $I_i \setminus I_{i-1} \neq \emptyset$ $\forall i$ alors la perversité p ne vérifie plus $p(i) = -i$ mais est seulement décroissante.