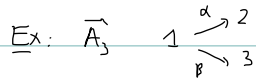


(Bernhard et Michra)

REPRESENTATIONS D'UN CARQUOIS
ET EQUIVALENCES PERVERSES

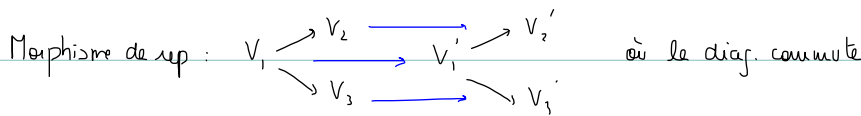
0 - Représentations d'un carquois

Q carquois : graphe orienté fini (nbs sommets et arêtes fini)



$I = \{1, \dots, n\}$ ens. de sommets

Représentation de Q sur k : $V_1 \begin{matrix} \xrightarrow{V_\alpha} V_2 \\ \xrightarrow{V_\beta} V_3 \end{matrix}$ où $V_i \in k\text{-ev}$ et V_α, V_β applications linéaires

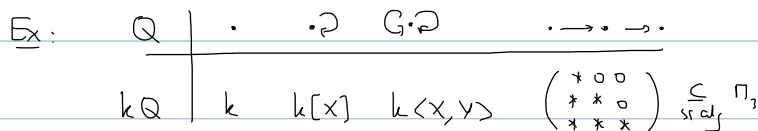


Rmg : attention si Q a des cycles on ne demande pas que le diag. commute au sein des cycles

$\text{rep}_k Q =$ catégorie des représentations

Q^{op} : carquois opposé (chgt de sens des flèches) $1 \begin{matrix} \xleftarrow{2} \\ \xleftarrow{3} \end{matrix}$

Rmg : $\text{rep}_k Q^{op} \simeq \text{mod}(kQ)$ avec $kQ =$ alg. des chemins (bas = chemins et mult = concaténation des chemins)



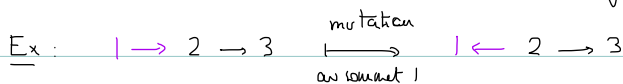
L'équivalence de catégories est donnée par : $(V_i, V_\alpha) \in \text{rep}_k Q^{op} \mapsto \bigoplus_{i \in I} V_i$

$\text{Rep}_k Q^{op}$ catégorie abélienne donc on peut considérer $D^b(\text{rep}_k Q^{op}) = D^b(\text{mod } kQ)$

1 - Mutation d'un carquois

Q carquois et j source (de Q^{op}) ie $\nexists \alpha : i \rightarrow j$ (dans Q^{op})

Q' obtenu à partir de Q en renversant toutes les flèches $j \rightarrow i$



Hyp: On suppose ds cette partie Q **acyclique** (pas de cycles orientés)

Rmq: kQ de $\dim < \infty \Leftrightarrow Q$ acyclique, et dans ce cas tous les objets simples de $\text{Rep}_k Q$ sont S_i

avec $(S_i)_\ell = \begin{cases} k & \text{si } i = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

\Rightarrow filtrations sous-catégories de sense données par filtrations sur Γ

déf (foncteur de réflexion [Bernstein-Gelfand-Ponomarev 73], [Happel 86])

$\Phi_j : D^b(\text{rep}_k Q^{op}) \rightarrow D^b(\text{rep}_k Q^{op})$ défini à partir de morphismes entre représentations

$(V_i, V_\alpha) \mapsto V'_i = \begin{cases} V_i & \text{si } i \neq j \\ \text{Cône}(V_j \rightarrow \bigoplus_{j \rightarrow \ell} V_\ell) & i = j \end{cases}$ et V'_α naturels

Thm: Φ_j est une équivalence. Elle est de plus perverse par rapport à la filtration $\phi \in \{S_j\} \subseteq \{S_i\}_{i \in \Gamma}$ et de perversité $p : S_j \mapsto 1$ et $S_i \mapsto 0$ pour $i \neq j$.

\rightarrow Origine de la théorie du basculement.

Ex:
$$\begin{array}{ccc} & V_2 & \\ V_1 & \xrightarrow{V_\alpha} & \\ & V_3 & \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} & V_2 & \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \text{Cône}(V_1 \rightarrow V_2 \oplus V_3) \end{array}$$

Rmq: la composée de Φ_j et Φ_i , n'est pas forcément perverse car les filtrations sont différentes

Ex: $1 \xrightarrow{2} 3$ $\Phi_3 \Phi_2 \Phi_1$ n'est pas pervers, sinon on aurait une perversité constante = 1 pour le foncteur
 mais $\Phi_3 \Phi_2 \Phi_1$ n'envoie pas un simple sur le décalé d'un simple.

2 - L'exemple de Beilinson

k corps, $n \in \mathbb{N}$, V un k -ev $\dim V = n$, $S^i = S^i(V)$ i-ème puissance symétrique

$M_{n+1}(SV) \cong A = \begin{pmatrix} S^k & & (0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S^n & & S^k \end{pmatrix} \cong \left[\text{alg des chemins de } 0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0^{(1)}} \\ \xleftarrow{\alpha_0^{(1)}} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0^{(2)}} \\ \xleftarrow{\alpha_0^{(2)}} \end{array} 2 \dots n-1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0^{(n)}} \\ \xleftarrow{\alpha_0^{(n)}} \end{array} n \right] / \langle \alpha_i^{(l+1)} \alpha_j^{(l)} + \alpha_j^{(l)} \alpha_i^{(l+1)} \rangle$

A admet $n+1$ modules simples S_i (S_i de sommet i)

$T = S_n \oplus S_{n-1}[1] \oplus \dots \oplus S_1[n-1] \oplus S_0[n]$

Lemme T est un complexe basculant et son alg d'endomorphismes est iso à $B = \begin{pmatrix} S^k & & (0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S^n & & S^k \end{pmatrix}$ où $\Lambda^i = \Lambda^i V$

qui est aussi isomorphe à $k \left(0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\xi_0^{(1)}} \\ \xleftarrow{\xi_0^{(1)}} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\xi_0^{(2)}} \\ \xleftarrow{\xi_0^{(2)}} \end{array} 2 \dots n-1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\xi_0^{(n)}} \\ \xleftarrow{\xi_0^{(n)}} \end{array} n \right) / \langle \xi_i^{(l+1)} \xi_j^{(l)} + \xi_j^{(l)} \xi_i^{(l+1)} \rangle$

En particulier $\Phi : \mathcal{D}^b(\text{mod } B) \simeq \mathcal{D}^b(\text{mod } A) \quad (\simeq \mathcal{D}^b(\text{Coh } \mathbb{P}(V)))$

(module projectif) $e_{ii} B \mapsto S_{n-i}[i]$ (module simple décalé)

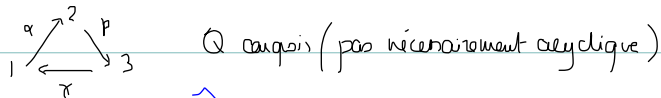
Proposition : Φ est une équivalence perverse de filtration $\phi \in \{S_0^B\} \subseteq \{S_0^B, S_1^B\} \subseteq \dots$

avec perversité $S_i^B \mapsto i$ (dualité de Koszul)

Idee : $\Phi(S_i^B) = \Gamma_{n-i}^A[i] = (A_{e_{n-i, n-i}})^*[i]$ (module injectif décalé)

$n=1$: $\mathcal{D}^b(\text{rep}_n(\cdot \xleftarrow{\circlearrowleft} \cdot)^{\text{op}}) \simeq \mathcal{D}^b(\text{rep}_n(\cdot \xrightarrow{\circlearrowright} \cdot)^{\text{op}})$ est un foncteur de réflexion

3) Quivers à potentiel



$\widehat{kQ} = \prod_{p \text{ chemin}} k^p$ $W \in \text{HH}_0(\widehat{kQ})$ potentiel (x représente une série formelle de cycles de Q)

Ex : $W' = \gamma\beta\alpha, W'' = (\gamma\beta\alpha)^2$ ↑ homologie de Hochschild continue

Dérivée cyclique de potentiel par rapport à une flèche α : pour un cycle $p = \sum_{p=uv} vuv$

→ $\partial_\alpha W$ s'obtient par linéarité

Ex : $\partial_\alpha(W') = \gamma\beta \quad \partial_\beta(W') = \alpha\gamma \quad \partial_\alpha(W'') = 2\gamma\beta\alpha\gamma\beta$

$J(Q, W) = \widehat{kQ} / \langle \partial_\alpha W \mid \alpha \text{ flèche} \rangle$ algèbre de Jacobi

Mutation : On suppose Q sans boucles ni 2-cycles et W "générique". On fixe un sommet j de Q .

$\mu_j(Q, W) = (Q', W')$ est défini par [Fomin-Zelevinsky 2002] et [Derksen-Weyman-Zelevinsky 2008] :

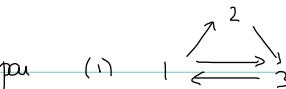
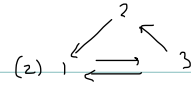
• pour Q' : (1) Pour chq $\alpha : j \rightarrow l$ et $\beta : i \rightarrow j$ on rajoute $[\alpha\beta] : i \rightarrow l$

(2) On remplace α et β par leur opposé

(3) On enlève tous les 2-cycles

• pour W' : compliqué!

Ex : $Q = \begin{matrix} & \alpha & & \\ & \nearrow & & \searrow \\ 1 & & 2 & \\ & \xleftarrow{\gamma} & & \rightarrow \\ & & 3 & \end{matrix}$ et $W = \gamma\beta\alpha$

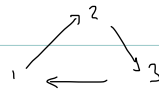
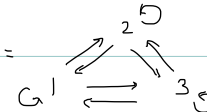
μ_2 donné par (1)  (2)  (3) $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ et ici $W' = 0$

Algèbre de Ginzburg (dg-algèbre $\Gamma(Q, W)$)

On définit \tilde{Q} • $\forall \alpha : i \rightarrow j$ $\deg \alpha = 0$

• $\forall \alpha : i \rightarrow j$ on ajoute $\alpha^+ : j \rightarrow i$ de $\deg \alpha^+ = -1$

• $\forall i \in I$ on ajoute une boucle $t_i : i \rightarrow i$ avec $\deg(t_i) = 2$

Ex: $Q =$  donne $\tilde{Q} =$ 

On considère $\widehat{k\tilde{Q}}$ (complété dans la cat. des alg. graduées) munie d'une différentielle d de degré 1

avec: $d\alpha = 0$, $d\alpha^+ = \sum_{\alpha'} [\alpha^+, \alpha'] e_i$ et on pose $\Gamma(Q, W) = (\widehat{k\tilde{Q}}, d)$

On considère $\mathcal{D}^b(\Gamma(Q, W))$ où les objets sont des \mathcal{D} -modules M sur $\Gamma(Q, W)$ avec homologie de dim totale $< \infty$

Fait: $\mathcal{D}^b(\Gamma(Q, W))$ est 3-Calabi-Yau

Thm (Keller-Yang 11) Il y a deux équivalences canoniques $\Phi_{S_j}^+ : \mathcal{D}^b(\Gamma(Q, W)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b(\Gamma(\mu_{S_j}(Q, W)))$

Elles sont définies de manière analogue aux facteurs de réflexion et elles sont inverses pour la

filtration $\phi \subseteq \{S_j\} \subseteq \{S_i\}_{i \in I}$ et la parité $p^- : S_j \mapsto 1$ et $p^+ : S_j \mapsto -1$
 $S_i, i \neq j \mapsto 0$ $p^+ : S_i, i \neq j \mapsto 0$

Rmq: $(\Phi_{S_j}^+)^2$ est une équivalence sphérique associée à S_j (\rightsquigarrow action (de la variante) du groupe de tresses)

[équivalence sphérique: pour S un objet sphérique on a $R\text{Hom}(S, X) \otimes S \rightarrow X \rightarrow \text{tw}_S(X) \rightsquigarrow$]