(Bernhard et Micha)

REPRESENTATIONS D'UN CARQUOIS ET EQUIVALENCES PERVERSES

0 - Représentations d'un carquois

Q carquois : graphe orienté fini (nbre sommets et arêtes fini)

Ex : $\vec{A_3}$

$$\begin{tikzcd} & 2 \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & 3 \end{tikzcd}$$

$I = \{1, \dots, n\}$ ens. de sommets

Représentation de Q sur k :

$$\begin{tikzcd} & V_2 \\ V_1 \arrow[ur, "V_\alpha"] \arrow[dr, "V_\beta"'] & \\ & V_3 \end{tikzcd}$$

où V_i k-ev et V_α, V_β applications linéaires

Morphisme de rep :

$$\begin{tikzcd} & V_2 \arrow[rr] & & V_2' \\ V_1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] & & V_1' \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & V_3 \arrow[rr] & & V_3' \end{tikzcd}$$

où le diag. commute

Rmq : attention si Q a des cycles on ne demande pas que le diag. commute au sein des cycles

$\mathrm{rep}_k Q$ = catégorie des représentations

Q^{op} : carquois opposé (chg^t de sens des flèches)

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl] \\ 1 & \\ & 3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Rem : $\mathrm{rep}_k Q^{op} \simeq \mathrm{mod}(kQ)$ avec kQ = alg. des chemins (base = chemins et mult = concaténation des chemins)

Ex :

Q	$\bullet$	$\bullet\circlearrowleft$	$\circlearrowright\bullet\circlearrowleft$	$\bullet \to \bullet \to \bullet$
kQ	k	$k[X]$	$k\langle X, Y\rangle$	$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\text{ss alg}}{\subseteq} M_3$

L'équivalence de catégories est donnée par : $(V_i, V_\alpha) \in \mathrm{rep}_k Q^{op} \longmapsto \bigoplus_{i \in I} V_i$

$\mathrm{Rep}_k Q^{op}$ catégorie abélienne donc on peut considérer $D^b(\mathrm{rep}_k Q^{op}) = D^b(\mathrm{mod}\, kQ)$

1 - Mutation d'un carquois

Q carquois et j source (de Q^{op}) ie $\nexists\, \alpha : i \to j$ (dans Q^{op})

Q' obtenu à partir de Q en renversant toutes les flèches $j \to i$

Ex : $1 \to 2 \to 3 \quad \xmapsto[\text{au sommet } 1]{\text{mutation}} \quad 1 \leftarrow 2 \to 3$

Hyp : On supposera ds cette partie Q acyclique (pas de cycles orientés)

Rmq : kQ de dim $< \infty \iff Q$ acyclique, et dans ce cas tous les objets simples de $\mathrm{Rep}_k Q$ sont S_i

avec $(S_i)_\ell = \begin{cases} k & \text{si } i = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow$ filtrations sous-catégories de Serre données par filtrations sur I

déf (foncteur de reflexion [Bernstein - Gelfand - Ponomarev 73], [Happel 86])

$$\Phi_j : D^b(\mathrm{rep}_k Q^{op}) \longrightarrow D^b(\mathrm{rep}_k Q'^{op})$$

défini à partir de morphismes entre représentations

$$(V_i^\bullet, V_\alpha) \longmapsto V_i'^\bullet = \begin{cases} V_i^\bullet & \text{si } i \neq j \\ \mathrm{Cône}\left(V_j^\bullet \to \bigoplus_{j \to \ell} V_\ell^\bullet\right) & i = j \end{cases} \quad \text{et } V'_\alpha \text{ naturels}$$

Thm : Φ_j est une équivalence. Elle est de plus perverse par rapport à la filtration $\emptyset \subseteq \{S_j\} \subseteq \{S_i\}_{i \in I}$ et de perversité $p : S_j \mapsto 1$ et $S_i \mapsto 0$ pour $i \neq j$.

$\longrightarrow$ Origine de la théorie du basculement.

Ex :
$$\begin{tikzcd} & V_2 \\ V_1 \arrow[ur, "V_\alpha"] \arrow[dr, "V_\beta"'] & \\ & V_3 \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} V_2 \arrow[dr] & \\ & \mathrm{Cône}(V_1 \to V_2 \oplus V_3) \\ V_3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Rmq : la composée de Φ_j et Φ_j, n'est pas forcément perverse car les filtrations sont différentes

Ex : $\begin{tikzcd}[row sep=small] & 2 \\ 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 3 \end{tikzcd}$ $\Phi_3 \Phi_2 \Phi_1$ n'est pas pervers, sinon on aurait une perversité constante $= 1$ donc le foncteur serait juste un décalage, mais $\Phi_3 \Phi_2 \Phi_1$ n'envoie pas un simple sur le décalé d'un simple.

2 - L'exemple de Beilinson

k corps, $n \in \mathbb{N}$, V un k-ev $\dim V = n$, $S^i = S^i(V)$ i-ème puissance symétrique

$$M_{n+1}(SV) \supseteq A = \begin{pmatrix} k & & (0) \\ S^1 & \ddots & \\ S^n & S^1 & k \end{pmatrix} \simeq \left[\text{alg. des chemins de } 0 \underset{x_n^{(1)}}{\overset{x_0^{(1)}}{\underset{\vdots}{\rightrightarrows}}} 1 \underset{x_n^{(2)}}{\overset{x_0^{(2)}}{\underset{\vdots}{\rightrightarrows}}} 2 \cdots n-1 \underset{x_n^{(n)}}{\overset{x_0^{(n)}}{\underset{\vdots}{\rightrightarrows}}} n \right] \Big/ \langle x_i^{(\ell+1)} x_j^{(\ell)} = x_j^{(\ell+1)} x_i^{(\ell)} \rangle$$

A admet $n+1$ modules simples S_i (S_i de sommet i)

$$T = S_n \oplus S_{n-1}[1] \oplus \cdots \oplus S_1[n-1] \oplus S_0[n]$$

Lemme T est un complexe basculant et son alg. d'endomorphismes est iso à $B = \begin{pmatrix} k & & (0) \\ \Lambda^1 & \ddots & \\ \Lambda^n & \Lambda^1 & k \end{pmatrix}$ où $\Lambda^i = \Lambda^i V$ qui est aussi isomorphe à

$$k\left(0 \underset{\xi_n^{(1)}}{\overset{\xi_0^{(1)}}{\underset{\vdots}{\leftleftarrows}}} 1 \underset{\vdots}{\leftleftarrows} 2 \cdots n-1 \underset{\xi_n^{(n)}}{\overset{\xi_0^{(n)}}{\underset{\vdots}{\leftleftarrows}}} n \right) \Big/ \langle \xi_i^{(\ell+1)} \xi_j^{(\ell)} + \xi_j^{(\ell+1)} \xi_i^{(\ell)} = 0 \rangle$$

En particulier $\Phi : \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\, A)$ $\left(\simeq D^b(\mathrm{Coh}\, \mathbb{P}(V)) \right)$

(module projectif) $e_{ii} B \longmapsto S_{n-i}[i]$ (module simple décalé)

<u>Proposition</u> : Φ est une équivalence perverse de filtration $\phi \subseteq \{S_0^B\} \subseteq \{S_0^B, S_1^B\} \subseteq \cdots$

avec perversité $S_i^B \mapsto i$ (dualité de Koszul)

<u>Idée</u> : $\Phi(S_i^B) = I_{n-i}^A[i] = (A e_{n-i,n-i})^*[i]$ (module injectif décalé)

<u>n=1</u> : $\mathcal{D}^b\left(\mathrm{rep}_k\left(\bullet \leftarrow \bullet\right)^{op}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b\left(\mathrm{rep}_k\left(\bullet \rightarrow \bullet\right)^{op}\right)$ est un foncteur de réflexion

3) Carquois à potentiel

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

Q carquois (pas nécessairement acyclique)

$\widehat{kQ} = \prod_{p \text{ chemin}} kp$ $\quad W \in HH_0(\widehat{kQ})$ potentiel (se représente comme une série formelle de cycles de Q)

homologie de Hochschild continue

<u>Ex</u> : $W' = \gamma\beta\alpha$, $W'' = (\gamma\beta\alpha)^2$

Dérivée cyclique de potentiel par rapport à une flèche α : pour un cycle p $\partial_\alpha p = \sum_{p = u\alpha v} vu$

$\longrightarrow$ $\partial_\alpha W$ s'obtient par linéarité

<u>Ex</u> : $\partial_\alpha(W') = \gamma\beta$ $\quad \partial_\beta(W') = \alpha\gamma$ $\quad \partial_\alpha(W'') = 2\gamma\beta\alpha\gamma\beta$

$J(Q,W) = \widehat{kQ} \big/ \overline{\langle \partial_\alpha W \mid \alpha \text{ flèche} \rangle}$ algèbre de Jacobi

<u>Mutation</u> : On suppose Q sans boucles ni 2-cycles et W "générique". On fixe un sommet j de Q.

$\mu_j(Q,W) = (Q', W')$ est défini par [Fomin-Zelevinsky 2002] et [Derksen-Weyman-Zelevinsky 2008] :

- pour Q' : (1) Pour chq $\alpha : j \to \ell$ et $\beta : i \to j$ on rajoute $[\alpha\beta] : i \to \ell$

  (2) On remplace α et β par leur opposé

  (3) On enlève tous les 2-cycles

- pour W' : compliqué !

<u>Ex</u> : $Q = $ $$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$ et $W = \gamma\beta\alpha$

μ_2 donné par (1) $\begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$ (2) $\begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dl] & \\ 1 \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[ll, shift left] \arrow[ul] \end{tikzcd}$ (3) $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ et ici $W' = 0$

__Algèbre de Ginzburg__ (dg-algèbre $\Gamma(Q,W)$)

On définit $\widetilde{Q}$ • $\forall \alpha : i \to j$ $\deg \alpha = 0$

• $\forall \alpha : i \to j$ on ajoute $\alpha^* : j \to i$ de degré -1

• $\forall i \in I$ on ajoute une boucle $i \circlearrowleft t_i$ avec $\deg(t_i) = 2$

__Ex__ : $Q = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$ donne $\widetilde{Q} = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[loop above] \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\ 1 \arrow[loop left] \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[loop below] \arrow[ll, shift left] \arrow[ul, shift left] \end{tikzcd}$

On considère $\widehat{k\widetilde{Q}}$ (complété dans la cat. des alg. graduées) munie d'une différentielle d de degré 1

avec : $d\alpha = 0$, $d\alpha^* = \partial_\alpha W$ et $dt_i = e_i \Big(\sum\limits_{\alpha \text{ flèche de } Q} [\alpha^*, \alpha] \Big) e_i$ et on pose $\Gamma(Q,W) = (\widehat{k\widetilde{Q}}, d)$

On considère $\mathcal{D}^b(\Gamma(Q,W))$ où les objets sont des dg-modules M sur $\Gamma(Q,W)$ avec homologie de dim totale $< \infty$

__Fait__ : $\mathcal{D}^b(\Gamma(Q,W))$ est 3-Calabi-Yau

__Thm__ (Keller-Yang 11) Il y a deux équivalences canoniques $\Phi_J^{\pm} : \mathcal{D}^b(\Gamma(Q,W)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b(\Gamma(\mu_j(Q,W)))$

Elles sont définies de manière analogue aux foncteurs de réflexion et elles sont perverses pour la filtration $\emptyset \subseteq \{S_J\} \subseteq \{S_i\}_{i \in I}$ et la perversité $p^- : S_J \mapsto 1$, $S_{i, i \neq j} \mapsto 0$ et $p^+ : S_J \mapsto -1$, $p^+ : S_{i, i\neq j} \mapsto 0$

__Rmq__ : $(\Phi_J^+)^2$ est une équivalence sphérique associée à S_J ($\rightsquigarrow$ action (de la variante) du groupe de tresses)

[équivalence sphérique : pour S un objet sphérique on a $R\mathrm{Hom}(S,X) \otimes S \longrightarrow X \longrightarrow tw_S(X) \rightsquigarrow$]