INTRODUCTION AUX EQUIVALENCES PERVERSES
DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES

0 – Rappels

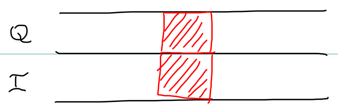
$\mathcal{T}$ catégorie triangulée, t une t-structure

$\mathcal{I}$ sous catégorie épaisse compatible à t $\rightsquigarrow$ $t_{\mathcal{I}}$ et $t_{\mathcal{T}/\mathcal{I}}$ t-structure induites sur $\mathcal{I}$ et $\mathcal{T}/\mathcal{I} = Q$

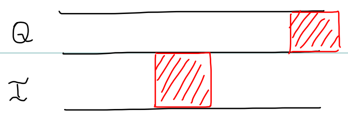
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on cherche une nouvelle t-structure t' telle que :

- $t'_{\mathcal{I}} = t_{\mathcal{I}}$
- $t'_{Q} = t_{Q}[-n]$

Si elle existe elle est unique et on l'appelle le n-décalé



$\mathcal{A} \cap \mathcal{I}$ = cœur de $t_{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{A}/_{\mathcal{A}\cap\mathcal{I}}$ cœur de t_Q



$\mathcal{A}\cap\mathcal{I}$ = cœur de $t'_{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{A}/_{\mathcal{A}\cap\mathcal{I}}[-n]$ cœur de t'_Q

1 – Lien avec les théories de torsion

Prop. 2.17 Pour $n=-1$ t' existe ssi $(\mathcal{A}\cap\mathcal{I}, \mathcal{A}\cap\mathcal{I}^{\perp})$ définit une paire de torsion

Exemples de paires de torsion :

* soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$-mod groupes abéliens de type fini

  $\mathcal{A}_{tor}$ = ss-cat. pleine des groupes de torsion

  $\mathcal{A}_{libre}$ = sous cat pleine des groupes libres $(\mathrm{add}(\mathbb{Z}))$

- tout groupe de type fini M peut s'écrire $0 \to M_{tor} \to M \to M/_{M_{tor}} \to 0$
- si M est libre et N de torsion alors $\mathrm{Hom}(N, M) = 0$

] propriétés d'une théorie de torsion

Exercice : on prend $\mathcal{T} = D^b(\mathbb{Z}\text{-mod})$ et $\mathcal{I}$ = complexes dont la cohomologie est de torsion

décrire la t-structure -1-décalée de la t-structure canonique $\left(\text{cœur} = \{0 \to P \to Q \to 0 \mid P, Q \text{ libres et } Q/_{\mathrm{Im} d} \text{ de torsion}\}\right)$

Intéressant dans cet exemple : le passage de t à t' est fonctoriel !

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = $ " $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}^{\vee}$ " $= 0$ donc pas de dualité intéressante dans $\mathbb{Z}$-mod

En revanche $R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ est non nul :

on remplace $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par le complexe $0 \to \overset{-1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{m} \overset{0}{\mathbb{Z}} \to 0 = C \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[0]$

on calcule $\mathrm{Hom}^{\bullet}(C, \mathbb{Z}) = \quad 0 \leftarrow \overset{1}{\mathbb{Z}} \xleftarrow{m} \overset{0}{\mathbb{Z}} \leftarrow 0 = C^{\vee} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[-1]$

Donc $\mathbb{D} = R\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ envoit $\mathcal{A}_{tor}$ sur $\mathcal{A}_{tor}[-1]$ et $\mathcal{A}$ libre sur $\mathcal{A}$ libre

$\mathbb{D}[1]$ ——————— $\mathcal{A}_{tor}$ sur $\mathcal{A}_{tor}$ et $\mathcal{A}_{libre}$ sur $\mathcal{A}_{libre}[1]$ $\Rightarrow$ cœur de t'

* Autre exemple : basculement par un module simple (cf exposé de Léo et équivalences perverses minimales)

2 – Données perverses

Décalages successifs de t-structures

déf : Une t-structure t sur $\mathcal{T}$ est dite compatible à une filtration $\mathcal{T}_{\bullet} = (\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{T}_r = \mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ si

| t est compatible à $\mathcal{T}_i$ pour tout i

$\Rightarrow$ t induit des t-structures sur tous les sous quotients $\mathcal{T}_j / \mathcal{T}_i$

déf : Soit $\mathcal{T}_{\bullet}$ une filtration de $\mathcal{T}$ (par sous-catégories épaisses), t et t' deux t-structures compatibles à $\mathcal{T}_{\bullet}$ et

| $p : \{0, \ldots, r\} \to \mathbb{Z}$. On dit que $(t, t', \mathcal{T}_{\bullet}, p)$ est une donnée perverse si $t_{\mathcal{T}_{i+1}/\mathcal{T}_i} = t'_{\mathcal{T}_{i+1}/\mathcal{T}_i}[p(i)]$

Lemme 2.23 t' est entièrement déterminé par t, $\mathcal{T}_{\bullet}$ et p

Preuve : soit t'' une autre t-structure tq $(t, t'', \mathcal{T}_{\bullet}, p)$ est perverse. On montre par récurrence que $t'_{\mathcal{T}_i} = t''_{\mathcal{T}_i}$

si $t'_{\mathcal{T}_{i-1}} = t''_{\mathcal{T}_{i-1}}$, puisque $t'_{\mathcal{T}_i / t'_{\mathcal{T}_{i-1}}} = t_{\mathcal{T}_i/\mathcal{T}_{i-1}}[-p(i)] = t''_{\mathcal{T}_i/\mathcal{T}_{i-1}}$ cela se déduit du lemme 2.6 □

En particulier, si $p(i) = n$ est constant alors $t' = t[-n]$.

Propriétés immédiates : si $(t', t'', \mathcal{T}_{\bullet}, p')$ est une autre donnée perverse (avec même filtration) alors

- $(t, t'', \mathcal{T}_{\bullet}, p+p')$ est une donnée perverse
- $(t', t, \mathcal{T}_{\bullet}, -p)$ et $(t^{opp}, t'^{opp}, \mathcal{T}_{\bullet}^{opp}, -p)$ sont des données perverses
- $\mathcal{A} \cap \mathcal{T}_i / \mathcal{A} \cap \mathcal{T}_{i-1}$ $(=$ cœur de $t_{\mathcal{T}_i/\mathcal{T}_{i-1}})$ $= \mathcal{A}' \cap \mathcal{T}_i / \mathcal{A}' \cap \mathcal{T}_{i-1} [p(i)]$ $(=$ cœur de $t'_{\mathcal{T}_i/\mathcal{T}_{i-1}}[p(i)])$

3- Equivalences perverses

Idée : passer de t à t' de manière fonctorielle (ex de $\mathrm{RHom}(-,\mathbb{Z})$ dans $D^b(\mathbb{Z}\text{-mod})$)

* Cas des catégories abéliennes : $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes

On se donne des filtrations $\begin{cases} \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_r & \text{par sous catégories de Serre} \\ \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}_r \end{cases}$

Elles induisent des filtration $\begin{cases} \langle \mathcal{A}_0 \rangle \subseteq \langle \mathcal{A}_1 \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle \mathcal{A}_r \rangle = D^b(\mathcal{A}) & \text{par sous catégories épaisses} \\ \langle \mathcal{B}_0 \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}_1 \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle \mathcal{B}_r \rangle = D^b(\mathcal{B}) \end{cases}$

Rmq : la t-structure canonique sur $D^b(\mathcal{A})$ est compatible à la filtration et cœur de $t_{\mathcal{A}_i} = \mathcal{A}_i$

cœur de $t_{\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i-1}} = \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i-1}$ (lemme 2.9)

def : une équivalence $F : D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{B})$ est perverse par rapport à $(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{B}_\bullet, p)$ si

(1) F se restreint en des équivalences $\langle \mathcal{A}_i \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{B}_i \rangle$

(2) $F[-p(i)] : \langle \mathcal{A}_i \rangle / \langle \mathcal{A}_{i-1} \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{B}_i \rangle / \langle \mathcal{B}_{i-1} \rangle$ induit une équivalence $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1}$

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{A}_i \rangle / \langle \mathcal{A}_{i-1} \rangle & & \langle \mathcal{B}_i \rangle / \langle \mathcal{B}_{i-1} \rangle \\ \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i-1} & & \mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1} \end{array}$$

Reformulation en terme de données perverses : soit $F : D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{B})$

On suppose $\mathcal{A}_\bullet$ et p fixés et on définit $\mathcal{B}_i = F(\langle \mathcal{A}_i \rangle) \cap \mathcal{B}$

Lemme 2.59 : Soit $t_{\mathcal{A}}$ (resp $t_{\mathcal{B}}$) la t-structure canonique de $D^b(\mathcal{A})$ (resp. $D^b(\mathcal{B})$). Alors

F est perverse par rapport à $(\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{B}_\bullet, p) \iff (t_{\mathcal{A}}, F^{-1}(t_{\mathcal{B}}), \langle \mathcal{A}_\bullet \rangle, p)$ est une donnée perverse

Preuve : en exercice !

En particulier :

- si $p = 0$ et F perverse alors $F^{-1}(t_{\mathcal{B}}) = t_{\mathcal{A}}$ donc F induit une équivalence $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$
- $\mathcal{B}$ est entièrement déterminée à équivalence près par $\mathcal{A}_\bullet, p$: si $G : D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{C})$ perverse

par rapport à $\mathcal{A}, p$ alors FG^{-1} perverse de perversité 0 donc induit $\mathcal{C} \simeq \mathcal{B}$

Reformulation en terme d'images de modules simples

On suppose tous les objets de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de longueur finie et on note S (resp T) l'ens. des simples

Soit $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_r = S$ filtrations sur l'ensemble des simples $\rightsquigarrow$ filtrations sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

$T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots \subseteq T_r = T$

Lemme 2.64 : $F : D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{B})$ est perverse par rapport à $S_\bullet, T_\bullet, p$ ssi pour tout i

(1) Pour $L \in S_i$, les facteurs de compositions de $H^\bullet(F(S_i))$ sont dans T_i et si $L \in S_i \setminus S_{i-1}$ il y en a un unique dans $T_i \setminus T_{i-1}$, en degré $-p(i)$

(2) La fonction $S_i \setminus S_{i-1} \longrightarrow T_i \setminus T_{i-1}$ que l'on en déduit est une bijection

* Cas des catégories additives

Pour des catégories additives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ filtrées par des sous catégories $\mathcal{E}_\bullet, \mathcal{F}_\bullet$ stables par facteurs directs on définit de m̂ la notion d'équivalence perverse $F : Ho^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} Ho^b(\mathcal{B})$

* Lien entre les deux

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ catégories abéliennes tq :

- tout objet est de longueur finie
- tout objet M admet une enveloppe projective P_M

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{A}\text{-proj}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{-proj}$

Filtrations $S_\bullet$ et $T_\bullet$ définissent des filtrations $\mathcal{E}_\bullet$ et $\mathcal{F}_\bullet$ par $\mathcal{E}_i = \langle P_M \mid M \in S \setminus S_{r-i-1} \rangle$

Lemme 2.66 : soit $F : D^b(\mathcal{A}) \simeq D^b(\mathcal{B})$ se restreignant en $\bar{F} : Ho^b(\mathcal{E}) \to Ho^b(\mathcal{F})$

alors F est perverse par rapport à $(\mathcal{A}_\bullet, p) \Leftrightarrow \bar{F}$ perverse par rapport à $(\mathcal{E}, \bar{p})$ avec $\bar{p}(i) = p(r-i)$