

(Ruslan)

Catégorification des rep. de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

I - $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

$\mathfrak{sl}_2 = \langle E, F, H \rangle$ avec les relations $[E, F] = H, [H, E] = 2E, [H, F] = -2F$

Chq représentation de dim finie est semi simple et $\text{Irep} \leftrightarrow \mathbb{N}$

$N \in \mathbb{N} \rightsquigarrow V^N$ de dim $N+1$ avec la décomposition en espaces de poids $V_{-N}^N \oplus V_{-N+2}^N \oplus \dots \oplus V_N^N$
valeurs propres de H

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est une $\mathbb{Q}(q)$ -alg. engendrée par E, F, K, K^{-1} avec les relations

• $KK^{-1} = K^{-1}K = 1$

• $EK = q^2 KE, FK = q^{-2} KF$

• $EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$ [agit sur V^N par $\frac{q - q^{-N}}{q - q^{-1}} = q^{-N+1} + q^{-N+3} + \dots + q^{-N+1} = [N]$]

$n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow V^n$ de dim $N+1$ avec décomposition $V_{-n}^n \oplus V_{-n+2}^n \oplus \dots \oplus V_n^n$

mais cette fois-ci $V_m^N = \{v \in V^n \mid Kv = q^m v\}$

But : catégorifier V^n

II Catégorification

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module $V = \bigoplus_n V_n$ $V_n \xrightleftharpoons[F]{E} V_{n+2} \xrightarrow{q}$

• $\forall n \in \mathbb{Z},$ on a une catégorie additive \mathcal{V}_n

• équivalence $\{1\} : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ [multiplication par q]

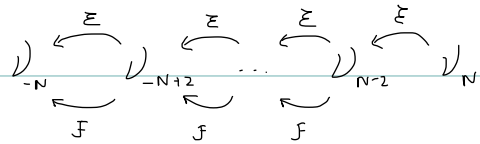
• foncteurs $\mathcal{V}_n \xrightleftharpoons[F]{E} \mathcal{V}_{n+2}$ commutent à q

• $\forall M \in \mathcal{V}_n$ on veut $EF(M) \xrightarrow{\sim} FE(M) \oplus \overbrace{M\{n-1\} \oplus M\{n-3\} \oplus \dots \oplus M\{-n+1\}}^{M^{\oplus [n]}}$ si $n \geq 0$
 $FE(M) \xrightarrow{\sim} EF(M) \oplus M^{\oplus [-n]}$ si $n \leq 0$

• $K_0(\mathcal{V}_n)$ groupe de Grothendieck scindé est un $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -module avec $q[M] = [M\{1\}]$

alors $\bigoplus K_0(\mathcal{V}_n) \otimes_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]} \mathbb{Q}(q) \simeq \bigoplus V_n$ is. de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules.

Catégorification de V^N

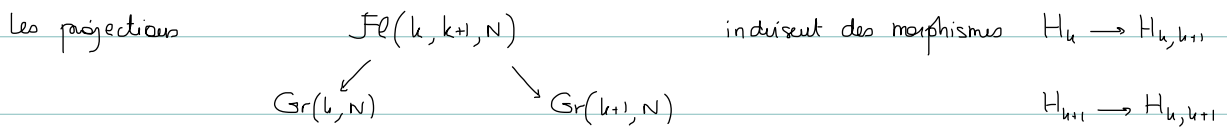


Soit $Gr(k, N) = \{ \text{sous espaces vect. de dim } k \text{ dans } \mathbb{C}^N \}$

$H_k = H^*(Gr(k, N))$, alors $V_{-N+2k} = \text{proj } H_k$ modules projectifs \mathbb{Z} -gradés de type fini

Soit $Fl(k, k+1, N) = \{ \text{drapeaux } 0 \subseteq W_k \subseteq W_{k+1} \subseteq \mathbb{C}^N, \dim W_k = k, \dim W_{k+1} = k+1 \}$

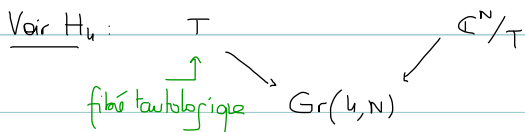
et $H_{k, k+1} = H^*(Fl(k, k+1, N))$



On note aussi $H_{k+1, k}$ le bimodule $H_{k, k+1}$ avec les actions de l'autre sens

$$E: \text{proj } H_k \rightarrow \text{proj } H_{k+1} \qquad F: \text{proj } H_{k+1} \rightarrow \text{proj } H_k$$

$$M \mapsto H_{k+1, k} \otimes_{H_k} M \{1-N+k\} \qquad M \mapsto H_{k, k+1} \otimes_{H_{k+1}} M \{-k\}$$



$\alpha_i = i$ -ème classe de Chern de $T = c_i(T) \in H_k \quad i=1, \dots, k$

$w_i = c_i(\mathbb{C}^N/T) \quad i=1, \dots, N-k$

$H_k = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_k, w_1, \dots, w_{N-k}] / \mathcal{I}_k$ *idéal des relations*

$0 \rightarrow T \rightarrow \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N/T \rightarrow 0$

En notant $c(T) = 1 + \sum \alpha_i t^i$ et $c(\mathbb{C}^N/T) = 1 + \sum w_i t^i$ alors $c(T)c(\mathbb{C}^N/T) = c(\mathbb{C}^N) = 1$

$\rightsquigarrow (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots)(1 + w_1 t + \dots) = 1$ donne les relations $\bullet \alpha_1 + w_1 = 0$

- $\bullet \alpha_2 + \alpha_1 w_1 + w_2 = 0$
- \vdots
- $\bullet \alpha_k w_{N-k} = 0$

Avec $\mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_k, w_1, \dots, w_{N-k}] \simeq \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_N]^{G_k \times G_{N-k}}$ et $\alpha_i \mapsto \sigma_i([1, k])$
 $w_i \mapsto \sigma_i([k+1, N])$

et les relations deviennent $\sigma_k[1, N] = 0 \quad \forall k=1, \dots, N$

Si $C = \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n] / \sigma_k[1, N]$ alors $H_k \simeq C^{\mathcal{L}_k \times \mathcal{L}_{N-k}}$

De même $H_{k, k+1} = C^{\mathcal{L}_k \times \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_{N-k-1}}$ et les applications $H_k \rightarrow H_{k, k+1}$ sont les inclusions évidentes.

$$H_{k+1} \rightarrow H_{k, k+1}$$

III. Transformations

On cherche des prop. supplémentaires de \mathcal{D} pour obtenir l'unicité

$$\tilde{\mathcal{E}} : \text{proj}(H_k) \rightarrow \text{proj}(H_{k+1})$$

Une transformation naturelle $\tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\alpha} \tilde{\mathcal{E}}$ est donnée par un morphisme de bimodules $H_{k+1, k} \rightarrow H_{k+1, k}$

On prend $\alpha =$ multiplication par la première classe de Chern du fibré W_{k+1}/W_k

$$= \text{multiplication par } z_{k+1} \in C^{\mathcal{L}_k \times \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_{N-k-1}}$$

On définit aussi $\tau : \tilde{\mathcal{E}}^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2$

$$\tilde{\mathcal{E}}^2 : \text{proj}(H_k) \rightarrow \text{proj}(H_{k+1}) \text{ donné par } H_{k+2, k+1} \otimes_{H_{k+1, k}} H_{k+1, k} \otimes_{H_k} - = H_{k+2, k+1, k} \otimes_{H_k} -$$

$$\text{avec } H_{k+2, k+1, k} = H^*(\text{Fl}(k, k+1, k+2))$$

$$\text{Avec } \pi : \text{Fl}(k, k+1, k+2) \rightarrow \text{Fl}(k, k+2)$$

opérateur de Demazure

$$\rightsquigarrow \pi^* \pi_* : H_{k+2, k+1, k} \rightarrow H_{k+2, k+1, k} \text{ agit par multiplication par } \frac{p(z_{k+1}, z_{k+2}) - p(z_{k+2}, z_{k+1})}{z_{k+1} - z_{k+2}}$$

où p pol. et symétrique z_{k+1}, z_{k+2}

Finalement, on obtient des endomorphismes de $\tilde{\mathcal{E}}^d$

$$\bullet \pi_i = \text{id}_{\tilde{\mathcal{E}}^{i-1}} \cdot \pi \cdot \text{id}_{\tilde{\mathcal{E}}^{d-i}} \quad i=1, \dots, d$$

$$\bullet \tau_i = \text{id}_{\tilde{\mathcal{E}}^{i-1}} \cdot \tau \cdot \text{id}_{\tilde{\mathcal{E}}^{d-i-1}} \quad i=1, \dots, d-1$$

On a les relations $\pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i \quad \tau_i^2 = 0$

$$|i-j| > 1 \quad \pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i \quad \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

$$|i-j| > 1 \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \pi_i \tau_i = \tau_i \pi_{i+1} = 1, \quad \tau_i \pi_i = \pi_{i+1} \tau_i = 1$$

relations de l'alg. de Nil/Hecke \mathcal{N}^d

$\mathcal{N}H_d$ a une representation fidèle sur $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]$

$x_i \mapsto$ multiplication par x_i

$\tau_i \mapsto$ Demozue (x_i, x_{i+1})

$$\mathcal{N}H_d \simeq \text{End}_{\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]} \mathcal{L}_d(\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]) \simeq \text{Mat}_{n! \times n!}(\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]^{\mathcal{L}_d})$$

$$\mathcal{N}H_d \simeq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]^{\oplus [n]!}$$

\leadsto il existe un idempotent $e_d \in \mathcal{N}H_d$ t.q $\mathcal{N}H_d \simeq (\mathcal{N}H_d e_d)^{\oplus [n]!}$

$$\xi^{(d)} = e_d \tilde{\xi}^d \quad \tilde{\xi}^d \simeq (\tilde{\xi}^{(d)})^{\oplus [n]!} \quad \text{donc } \tilde{\xi}^{(d)} \text{ catégorifie les puissances divisées}$$

Alors $\tilde{\xi}^{(d)}$ (indéc. de \mathcal{V}_{-n}) = indecomposable de \mathcal{V}_{-n+2d}