(Ruslan)

$\boxed{\text{Catégorification des rep. de } U_q(\mathfrak{sl}_2)}$

I - $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

$\mathfrak{sl}_2 = \langle E, F, H \rangle$ avec les relations $[E,F] = H$, $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$

Chq représentation de dim finie est semi simple et Irrep $\longleftrightarrow \mathbb{N}$

$N \in \mathbb{N} \rightsquigarrow V^N$ de dim $N+1$ avec la décomposition en espaces de poids $\underbrace{V^N_{-N} \oplus V^N_{-N+2} \oplus \cdots \oplus V^N_N}_{\text{valeurs propres de } H}$

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est une $\mathbb{Q}(q)$-alg. engendrée par E, F, K, K^{-1} avec les relations

- $KK^{-1} = K^{-1}K = 1$
- $EK = q^2 KE$, $FK = q^{-2} KF$
- $EF - FE = \dfrac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$ [agit sur V^N par $\dfrac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} = q^{N-1} + q^{N-3} + \cdots + q^{-N+1} = [N]$]

$n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow V^N$ de dim $N+1$ avec décomposition
$$\begin{tikzcd} V^n_{-n} \arrow[r, bend left, "E"] \arrow[r, phantom, "\oplus"] & V^n_{-n+2} \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[r, bend left, "E"] \arrow[r, phantom, "\oplus"] & \cdots \oplus V^n_n \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

mais cette fois-ci $V^N_m = \{ v \in V^n \text{ tq } Kv = q^m v \}$

But : catégorifier V^n

II Catégorification

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$-module $V = \bigoplus_n V_n$
$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, bend left, "E"] & V_{n+2} \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[loop right, "q"] \end{tikzcd}$$

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a une catégorie additive $\mathcal{V}_n$
- équivalence $\{1\} : \mathcal{V}_n \longrightarrow \mathcal{V}_n$ [multiplication par q]
- foncteurs $\begin{tikzcd} \mathcal{V}_n \arrow[r, bend left, "\mathcal{E}"] & \mathcal{V}_{n+2} \arrow[l, bend left, "\mathcal{F}"] \end{tikzcd}$ commutant à $\{1\}$
- $\forall M \in \mathcal{V}_n$ on veut $\mathcal{E}\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}\mathcal{E}(M) \oplus \overbrace{M\{n-1\} \oplus M\{n-3\} \oplus \cdots \oplus M\{-n+1\}}^{M^{\oplus[n]}}$ si $n \geqslant 0$

  $\mathcal{F}\mathcal{E}(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\mathcal{F}(M) \oplus M^{\oplus[-n]}$ si $n \leqslant 0$

- $K_0(\mathcal{V}_n)$ groupe de Grothendieck scindé est un $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-module avec $q[M] = [M\{1\}]$

alors $\bigoplus K_0(\mathcal{V}_n) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(q) \simeq \bigoplus V_n$ iso. de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-modules.

Catégorification de V^N

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_{-N} & \mathcal{V}_{-N+2} \arrow[l, bend right, "\mathcal{E}"'] \arrow[l, bend left, "\mathcal{F}"] & \cdots \arrow[l, bend right, "\mathcal{E}"'] \arrow[l, bend left, "\mathcal{F}"] & \mathcal{V}_{N-2} \arrow[l, bend right, "\mathcal{E}"'] \arrow[l, bend left, "\mathcal{F}"] & \mathcal{V}_{N} \arrow[l, bend right, "\mathcal{E}"']
\end{tikzcd}$$

Soit $Gr(k,N) = \{$ sous espaces vect. de dim k dans $\mathbb{C}^N \}$

$H_k = H^*(Gr(k,N))$, alors $\mathcal{V}_{-N+2k} =$ proj H_k modules projectifs $\mathbb{Z}$-gradués de type fini

Soit $\mathcal{Fl}(k,k+1,N) = \{$ drapeaux $0 \subseteq W_k \subseteq W_{k+1} \subseteq \mathbb{C}^N$, dim $W_k = k$, dim $W_{k+1} = k+1 \}$

et $H_{k,k+1} = H^*(\mathcal{Fl}(k,k+1,N))$

Les projections

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{Fl}(k,k+1,N) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Gr(k,N) & & Gr(k+1,N)
\end{tikzcd}$$

induisent des morphismes $H_k \longrightarrow H_{k,k+1}$

$H_{k+1} \longrightarrow H_{k,k+1}$

On notera aussi $H_{k+1,k}$ le bimodule $H_{k,k+1}$ avec les actions de l'autre sens

$\mathcal{E}$: proj $H_k \longrightarrow$ proj H_{k+1} $\qquad$ $\mathcal{F}$: proj $H_{k+1} \longrightarrow$ proj H_k

$M \longmapsto H_{k+1,k} \otimes_{H_k} M\{1-N+k\}$ $\qquad$ $M \longmapsto H_{k,k+1} \otimes_{H_{k+1}} M\{-k\}$

Voir H_k :

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dr] & & \mathbb{C}^N/T \arrow[dl] \\
\text{fibré tautologique} \arrow[ur] & & Gr(k,N) &
\end{tikzcd}$$

$x_i =$ i-ème classe de Chern de $T = c_i(T) \in H_k$ $\quad i = 1, \dots, k$

$w_i = c_i(\mathbb{C}^N/T)$ $\quad i = 1, \dots, N-k$

$H_k = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k, w_1, \dots, w_{N-k}] / I_k$ idéal des relations

$0 \longrightarrow T \longrightarrow \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N/T \longrightarrow 0$

En notant $c(T) = 1 + \sum x_i t^i$ et $c(\mathbb{C}^N/T) = 1 + \sum w_i t^i$ alors $c(T)\,c(\mathbb{C}^N/T) = c(\mathbb{C}^N) = 1$

$\leadsto$ $(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots)(1 + w_1 t + \cdots) = 1$ donne les relations
- $x_1 + w_1 = 0$
- $x_2 + x_1 w_1 + w_2 = 0$

$\vdots$
- $x_k w_{N-k} = 0$

Avec $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k, w_1, \dots, w_{N-k}] \simeq \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_N]^{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{N-k}}$ et $x_i \longmapsto \sigma_i([1,k])$

$w_i \longmapsto \sigma_i([k+1, N])$

et les relations deviennent $\sigma_k[1,N] = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, N$

Si $C = \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n] / \sigma_k([1,N])$ alors $H_k \simeq C^{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{N-k}}$

De même $H_{k,k+1} = C^{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{N-k-1}}$ et les applications $H_k \longrightarrow H_{k,k+1}$ sont les inclusions évidentes.

$H_{k+1} \longrightarrow H_{k,k+1}$

III Transformations

On cherche des prop. supplémentaires de $\mathcal{D}$ pour obtenir l'unicité

$\mathcal{E} : \text{proj}(H_k) \longrightarrow \text{proj}(H_{k+1})$

Une transformation naturelle $\mathcal{E} \xrightarrow{x} \mathcal{E}$ est donnée par un morphisme de bimodules $H_{k+1,k} \longrightarrow H_{k+1,k}$

On prend x = multiplication par la première classe de Chern du fibré W_{k+1}/W_k

= multiplication par $z_{k+1} \in C^{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{N-k-1}}$

On définit aussi $\tau : \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathcal{E}^2$

$\mathcal{E}^2 : \text{proj}(H_k) \longrightarrow \text{proj}(H_{k+2})$ donné par $H_{k+2,k+1} \otimes_{H_{k+1}} H_{k+1,k} \otimes_{H_k} - \;=\; H_{k+2,k+1,k} \otimes_{H_k} -$

avec $H_{k+2,k+1,k} = H^*(\mathcal{F}\ell(k, k+1, k+2))$

Avec $\pi : \mathcal{F}\ell(k, k+1, k+2) \longrightarrow \mathcal{F}\ell(k, k+2)$

opérateur de Demazure

$\rightsquigarrow \quad \pi^* \pi_* : H_{k+2,k+1,k} \longrightarrow H_{k+2,k+1,k}$ agit par multiplication par $\dfrac{p(z_{k+1}, z_{k+2}) - p(z_{k+2}, z_{k+1})}{z_{k+1} - z_{k+2}}$

où p pol. elt symétrique z_{k+1}, z_{k+2}

Finalement, on obtient des endomorphismes de $\mathcal{E}^d$

- $x_i = \text{id}_{\mathcal{E}^{i-1}} \cdot x \cdot \text{id}_{\mathcal{E}^{d-i}} \qquad i = 1, \dots, d$
- $\tau_i = \text{id}_{\mathcal{E}^{i-1}} \cdot \tau \cdot \text{id}_{\mathcal{E}^{d-i-1}} \qquad i = 1, \dots, d-1$

On a les relations $x_i x_j = x_j x_i \qquad \tau_i^2 = 0$

$|i-j| > 1 \quad x_i \tau_j = \tau_j x_i \qquad \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$

$|i-j| > 1 \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \qquad x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1 \;,\; \tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$

relation de l'alg. de NilHecke $\mathcal{N}H_d$

$\mathcal{N}H_d$ a une representation fidèle sur $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_d]$

$x_i \longmapsto$ multiplication par x_i

$\tau_i \longmapsto$ Demazure (x_i, x_{i+1})

$\mathcal{N}H_d \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{Q}[x_1,..,x_d]^{\mathfrak{S}_d}}\left(\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_d]\right) \simeq \mathrm{Mat}_{n!\times n!}\left(\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_d]^{\mathfrak{S}_d}\right)$

$\mathcal{N}H_d \simeq \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_d]^{\oplus [n]!}$

$\rightsquigarrow$ il existe un idempotent $e_d \in \mathcal{N}H_d$ t.q $\mathcal{N}H_d \simeq \left(\mathcal{N}H_d e_d\right)^{\oplus [n]!}$

$\mathcal{E}^{(d)} = e_d \mathcal{E}^d$ $\quad \mathcal{E}^d \simeq \left(\mathcal{E}^{(d)}\right)^{\oplus [n]!}$ $\quad$ donc $\mathcal{E}^{(d)}$ catégorifie les puissances divisées

Alors $\mathcal{E}^{(d)}$(indec. de $\mathcal{V}_{-n}$) = indecomposable de $\mathcal{V}_{-n+2d}$