(Tuong-Huy)

RÉALISATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ALGÈBRE DE HECKE

Algèbre de Hecke

(W,S) Coxeter

$\mathcal{H}$ alg. sur $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ de base $\{T_w, w\in W\}$

- $T_v T_w = T_{vw}$ si $\ell(vw) = \ell(v)+\ell(w)$
- $T_s^2 = (t^2-1)T_s + t^2$, $s\in S$

Involution $i : \mathcal{H}_W \to \mathcal{H}_W$

$t \mapsto t^{-1}$

$T_w \mapsto t$

Base de KL : pour tout $w\in W$, $\exists !\, C_w \in \mathcal{H}_W$ tq

① $i(C_w) = C_w$

② $C_w = t^{-\ell(w)} \sum_{x\leq w} P_{x,w}(t^2)\, T_x$ où $P_{x,w}\in \mathbb{Z}[t]$ + condition sur le degré

Variétés de Schubert

$T\subseteq B\subseteq G$ gp réductif connexe

$\mathcal{B}$ = variété de drapeaux G/B

Décomposition de Bruhat $\mathcal{B} = \bigsqcup_{w\in W} BwB/B$

Variété de Schubert : $\overline{BwB}/B = \bigsqcup_{v\leq w} BvB/B$

Autre version : action de G sur $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$, $\mathcal{O}(w) = G\cdot(B/B, wB/B)$

$pr_1 : \mathcal{O}(w) \to \mathcal{B}$ de fibre BwB/B

$\overline{\mathcal{O}(w)} = \bigsqcup_{v\leq w} \mathcal{O}(v)$

Stratification : $\mathcal{B}\times\mathcal{B} = \bigsqcup_{w\in W} \mathcal{O}(w)$

$j_w : O(w) \hookrightarrow \mathcal{B}\times\mathcal{B}$

Rmq : * $\overline{BsB}/B = P_s/B \simeq \mathbb{P}_1$

* $\overline{O(s)}$ est une $\mathbb{P}_1$-fibration au dessus de $\mathcal{B}$.

Faisceaux pervers sur $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$

S = stratification de $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ en G-orbites

$\mathcal{D}^b_S(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ = catégorie dérivée bornée des complexes de faisceaux constructibles sur S.

On définit $h : \mathcal{D}^b_S(\mathcal{B}\times\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{H}_W$

$$\mathcal{A}^\bullet \longmapsto \sum_{w\in W}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim \mathcal{H}^i(\mathcal{A}^\bullet)_w\, t^i\right) T_w$$

avec $\mathcal{H}^i(\mathcal{A})_w$ = la fibre en $(B/B, wB/B)$ du complexe de cohomologie $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^\bullet)$

$$= H^i\Big(\underbrace{\mathcal{A}^\bullet_{(B/B,\, wB/B)}}_{\text{complexe d'espaces vectoriels}}\Big)$$

Rmq : $f : X \longrightarrow Y$ continue et $\mathcal{A}^\bullet$ complexe de faisceaux sur X

alors $(R^i f_! \mathcal{A}^\bullet)_y \simeq H^i_c(f^{-1}(y), \mathcal{A}^\bullet_{|f^{-1}(y)})$ [par chgt base propre]

En part : $h(\underline{\mathbb{Q}}_{O(w)}) = h(j_{w!}\underline{\mathbb{Q}}) = T_w$

mais $h(\,??\,) = C_w$

Produit de convolution sur $\mathcal{D}^b_S(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$

$$\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B} \xrightarrow[p_{12},\, p_{13},\, p_{23}]{} \mathcal{B}\times\mathcal{B} \qquad \mathcal{A}^\bullet_1 * \mathcal{A}^\bullet_2 = (p_{13})_*\left(p_{12}^*\mathcal{A}^\bullet_1 \otimes p_{23}^*\mathcal{A}^\bullet_2\right)$$

$\rightsquigarrow$ produit associatif, avec unité $\underline{\mathbb{Q}}_{O(1)}$

Prop : $\mathcal{A}^\bullet \in \mathcal{D}^b_S(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ tq $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^\bullet) = 0$ pour i paire (resp. impaire)

alors il en est de m̂ pour $\underline{\mathbb{Q}}_{\overline{O(s)}} * \mathcal{A}^\bullet$ et $h(\underline{\mathbb{Q}}_{\overline{O(s)}} * \mathcal{A}^\bullet) = (T_s+1)\cdot h(\mathcal{A}^\bullet)$

Le coeff en T_w dans $(T_s+1)h(\mathcal{A}^\bullet)$ est :

- $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\dim \mathcal{H}^i(\mathcal{A}^\bullet)_w + \dim \mathcal{H}^{i-2}(\mathcal{A}^\bullet)_{sw}\right) t^i$ si $w < sw$
- $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\dim \mathcal{H}^i(\mathcal{A}^\bullet)_{sw} + \dim \mathcal{H}^{i-2}(\mathcal{A}^\bullet)_w\right) t^i$ si $sw < w$

Dans le cas $sw < w$, $\mathcal{H}^i(\underline{\mathbb{Q}}_{\overline{\mathcal{O}(s)}} * \mathcal{A}^\bullet)_w = \mathcal{H}^i(p_{13*}(p_{12}^* \underline{\mathbb{Q}}_{\overline{\mathcal{O}(s)}} \otimes p_{23}^* \mathcal{A}^\bullet))_w$ (ou $p_{13!}$ car p_{13} est propre)

$$= H^i_c(p_{13}^{-1}(B/B, wB/B), p_{12}^* \underline{\mathbb{Q}}_{\overline{\mathcal{O}(s)}} \otimes p_{23}^* \mathcal{A}^\bullet)$$

$D = \{ (B/B, gB/B, wB/B), g \in P_s \} \simeq \mathbb{P}_1$

alors $\mathcal{H}^i(\underline{\mathbb{Q}}_{\overline{\mathcal{O}(s)}} * \mathcal{A}^\bullet)_w = H^i_c(D, p_{23}^* \mathcal{A}^\bullet)$

On a une décomposition $D = D_1 \cup D_0$ où $D_1 = D \cap \overline{\mathcal{O}(s)} \times_B \mathcal{O}(w)$

$D_0 = D \cap \overline{\mathcal{O}(s)} \times_B \mathcal{O}(sw) = \{ (B/B, sB/B, wB/B) \}$

$D_1 \overset{j}{\hookrightarrow} D \overset{i}{\hookleftarrow} D_0$ qui donne une suite exacte longue de cohom. à support compact

$$\cdots \to H^i_c(D_1, p_{23}^* \mathcal{A}^\bullet) \to H^i_c(D, p_{23}^* \mathcal{A}^\bullet) \to \underset{\displaystyle \mathcal{H}^i(\mathcal{A}^\bullet)_{sw}}{\underset{\parallel}{H^i_c(D_0, p_{23}^* \mathcal{A}^\bullet)}} \to \cdots$$

$p_{23}^* \mathcal{A}^\bullet$ a une cohomologie constante le long de D_1 égale à $\mathcal{H}^*(\mathcal{A}^\bullet)_w$ donc $H^i_c(D_1, p_{23}^* \mathcal{A}^\bullet) = \mathcal{H}^{i-2}_c(\mathcal{A}^\bullet)_{sw}$

Complexes d'intersection

X = variété algébrique irréductible

$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i \qquad (i \leq j \iff \overline{X_j} \supset X_i)$

$\mathcal{D}^b_S(X) \supseteq \mathcal{P}erv(X)$ sous catégorie abélienne

$\mathrm{Irr}(\mathrm{Perv} X) = ?$

Prop déf : Soit $(i, \mathcal{L})$ où $i \in I$ et $\mathcal{L}$ syst. local irréductible sur X_i

(a) $IC(\overline{X_i}, \mathcal{L})_{|X_i} = \mathcal{L}[0]$

(b) $IC(\overline{X_i}, \mathcal{L})_{|X_j} \neq 0 \Rightarrow X_j \leq \overline{X_i}$

(c) $\mathcal{H}^k(IC(\overline{X_i}, \mathcal{L})) \neq 0 \Rightarrow k \geq 0$

(d) $\mathcal{H}^k IC(\overline{X_i}, \mathcal{L})_{|X_j} \neq 0 \Rightarrow k < \dim X_i - \dim X_j$ si $i \neq j$

(e) idem (c) et (d) avec $\mathbb{D} IC(\overline{X_i}, \mathcal{L})$

Thm : Ces conditions caractérisent le complexe d'intersection

Thm : Pour $w \in W$, $h(IC(\overline{\mathcal{O}(w)}, \mathbb{Q})[\dim \mathcal{O}(w)]) = t^{-\dim B} C_w$

* $\underline{w=1}$ $\quad \mathcal{O}(1) = \Delta\mathcal{B}$ diagonale de $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$

$$IC(\mathcal{O}(1),\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_{\mathcal{O}(1)}[0] \quad \text{et} \quad h(IC(\mathcal{O}(1))) = T_1 = C_1$$

* $\underline{w=s}$: $\quad \overline{\mathcal{O}(s)}$ $\quad \mathbb{P}_1$-fibration au dessus de $\mathcal{B}$

$$IC(\overline{\mathcal{O}(s)},\mathbb{Q}) = \underline{\mathbb{Q}}_{\overline{\mathcal{O}(s)}}$$

$$h(IC(\overline{\mathcal{O}(s)},\mathbb{Q})) = 1+T_s = tC_s$$

* $\underline{w=w_I}$ elt de plus grande longueur dans $W_I\subseteq W$ sous groupe parabolique, alors $\mathcal{O}(\underline{w_I})$ est une fibration de fibre $\overline{Bw_IB}/_B = BW_IB/_B = P_I/_B \simeq L_I/_{B\cap L_I}$ lisse

$$\Rightarrow IC(\overline{\mathcal{O}(w_I)},\mathbb{Q}) = \underline{\mathbb{Q}}_{\overline{\mathcal{O}(w_I)}} \quad \text{et} \quad h(IC(\overline{\mathcal{O}(w_I)},\mathbb{Q})) = \sum_{w\in W_I} T_w = t^{\ell(w_I)}C_{w_I}$$

$w = s_1\cdots s_n$ écriture réduite

$$\begin{array}{ccc} Y = \{(B_1,\dots,B_{n+1})\in\mathcal{B}^{n+1} & \mid & (B_i,B_{i+1})\in\overline{\mathcal{O}(s_i)}\} \quad \text{lisse} \\ \big\downarrow \pi & \big\downarrow & \\ \overline{\mathcal{O}(w)} \ni (B_1,B_{n+1}) & & \end{array}$$

Rmq : $\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_Y = \underline{\mathbb{Q}}_{\overline{\mathcal{O}(s_1)}} * \cdots * \underline{\mathbb{Q}}_{\overline{\mathcal{O}(s_n)}}$

On applique la prop. sur cette égalité : $h(\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_Y[n]) = t^{-n}(1+T_{s_1})\cdots(1+T_{s_n}) = C_{s_1}\cdots C_{s_n}$

or $IC(Y)[n+\dim\mathcal{B}] = \underline{\mathbb{Q}}_Y[n+\dim\mathcal{B}]$

le thm de décomposition entraîne :

espace vectoriel gradué

$$\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_Y[\ell(w)+\dim\mathcal{B}] = \bigoplus_{y\leq w} IC(\mathcal{O}(y))[\ell(y)+\dim\mathcal{B}]\otimes V_y$$

On a $V_w = \mathbb{Q}$ car π est un iso au dessus de $\mathcal{O}(w)$

et par dualité de Poincaré $\forall y<w,\ \forall p \quad V_{y,p} = V_{y,-p}$

$$h(\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_Y[\ell(w)+\dim\mathcal{B}]) = h(IC(\overline{\mathcal{O}(w)})[\ell(w)+\dim\mathcal{B}]) + \sum_{y<w} Q_y(t)\,h(IC(\overline{\mathcal{O}(y)})[\ell(y)+\dim\mathcal{B}])$$

avec $Q_y(t) = Q_y(t^{-1})$

Par récurrence si $h(IC(\overline{\mathcal{O}(y)})[\ell(y)+\dim\mathcal{B}]) = t^{-\dim\mathcal{B}}C_y$ alors $h(IC(\overline{\mathcal{O}(w)})[\ell(w)+\dim\mathcal{B}])$ est stable par i D

$h : \mathcal{D}^b_S(\mathcal{B}\times\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{H}_W$

$IC(\overline{O(w)})[\ell(w)+\dim\mathcal{B}] \longrightarrow t^{-\dim\mathcal{B}} C_w$

Corollaire : ① $IC(\overline{O(w)})$ est un faisceau pair

② $h(IC(\overline{O(w)}) * IC(\overline{O(w')})) = h(IC(\overline{O(w)})) . h(IC(\overline{O(w')}))$

Soit $\mathcal{D}$ la sous catégorie de $\mathcal{D}^b_S(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ des complexes semi-simples

Alors ① $\mathcal{D}$ est stable par convolution et $h(\mathcal{A}^\bullet_1 * \mathcal{A}^\bullet_2) = h(\mathcal{A}^\bullet_1) . h(\mathcal{A}^\bullet_2)$

② $\mathcal{D}$ est stable par shift et $h(\mathcal{A}^\bullet[1]) = t^{-1} h(\mathcal{A}^\bullet)$

③ $\mathcal{D}$ est stable par $\mathbb{D}$ et $h(\mathbb{D}\mathcal{A}^\bullet) = t^{-2\dim\mathcal{B}} i(h(\mathcal{A}^\bullet))$

④ $\operatorname{Im} h = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}_{\geq 0}[t,t^{-1}] C_w$

À terme : $K_0(\mathcal{D}^{b,mix}_G(\mathcal{B}\times\mathcal{B})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_W$

$IC(\overline{O(w)})[\dim\mathcal{B}+\ell(w)] \longrightarrow t^{-\dim\mathcal{B}} C_w$