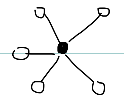
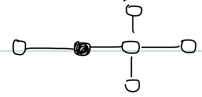
INTRODUCTION AUX EQUIVALENCES PERVERSES

Equivalences perverses = type particulier d'équivalences entre catégories dérivées

Où trouve-t-on des équivalences dérivées ?

- relier des objets différents mais de même nature
  - * Carquois $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ et $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$
  - * 5-bloc principal de A_5 et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (conj. du défaut abélien)
  - * Algèbres des arbres de Brauer  et 
  - * faisceaux cohérents sur une variété abélienne X et son dual $\hat{X}$ (Fourier-Mukai)
- relier des objets de nature différente
  - * symétrie miroir
  - * géométrie des variétés de drapeaux $\leadsto$ bimodules de Soergel
- comprendre des symétries cachées (action groupes de tresses)
- catégorifier actions connues
  - * sl_2-catégorification
  - * dualités ...

(auto-équivalences)

__1er pb__ : on dispose de critères pour savoir si un foncteur donné est une équivalence, mais pas pour savoir s'il existe une équivalence.

$\leadsto$ on voudrait un moyen de construire des candidats

__2ème pb__ : en théorie des représentations

Soit $k = \bar{k}$ corps alg clos et A, B deux k-algèbres de dim finie

si $D^b(A\text{-Mod}) \overset{F}{\xrightarrow{\sim}} D^b(B\text{-Mod})$ alors $K_0(A\text{-Mod}) \simeq K_0(B\text{-mod})$

en particulier $\#$ A-modules simples $=$ rang K_0 $= \#$ B-modules simples mais F n'induit pas de bij entre simples.

On voudrait plus généralement, plus de contrôle sur F(simple) = ?

Considérons des filtrations de A-Mod et B-Mod par sous catégories de Serre

$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_r = A\text{-Mod}$ (resp. $\mathcal{B}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{B}_r = B\text{-Mod}$)

Rappel : dans une sous-catégorie de Serre $\mathcal{A}_i$ si $0 \to M \to N \to P \to 0$ est une s.e.s dans A-Mod

alors $N \in \mathcal{A}_i \iff M$ et $P \in \mathcal{A}_i$

$D^b_{\mathcal{A}_i}(A\text{-Mod})$ la sous catégorie pleine de $D^b(A\text{-Mod})$ formé des complexes bornés dont la cohomologie $\in \mathcal{A}_i$

$C = 0 \to C_0 \xrightarrow{d_0} C_1 \xrightarrow{d_1} C_2 \to \cdots \to C_n \to 0 \in D^b_{\mathcal{A}_i}(A\text{-Mod}) \iff \forall r,\ H^r(C) = \mathrm{Ker}\, d_r / \mathrm{Im}\, d_{r-1} \in \mathcal{A}_i$

On note de même $D^b_{\mathcal{B}_i}(B\text{-Mod})$

déf : Soit $p : \{1, \dots, r\} \to \mathbb{Z}$. Une équivalence $F : D^b(A\text{-Mod}) \to D^b(B\text{-Mod})$ est perverse de perversité p si

(i) F se restreint en des équivalences $D^b_{\mathcal{A}_i}(A\text{-Mod}) \xrightarrow{\sim} D^b_{\mathcal{B}_i}(B\text{-Mod})$

(ii) $F[-p(i)]$ induit des équivalences $\mathcal{A}_i / \mathcal{A}_{i-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_i / \mathcal{B}_{i-1}$

Rmq : $D^b_{\mathcal{A}_i}(A\text{-Mod}) / D^b_{\mathcal{A}_{i-1}}(A\text{-Mod}) \simeq D^b(\mathcal{A}_i / \mathcal{A}_{i-1}) \longleftrightarrow \mathcal{A}_i / \mathcal{A}_{i-1}$

donc (ii) signifie que F est une équivalence de Morita shifté sur les tranches

Explicitons la définition : si $M \in \mathcal{A}_i$ alors ts ces facteurs de comp. appartiennent à $\mathcal{A}_i$

et $\mathcal{A}_i$ = sous catégorie de Serre engendré par les simples de A-mod qui sont dans $\mathcal{A}_i$

déf (bis) Soit $p : \{1, \dots, r\} \to \mathbb{Z}$. Une équivalence $F : D^b(A\text{-Mod}) \to D^b(B\text{-Mod})$ est perverse si pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et pour tout A-module simple $S \in \mathcal{A}_i \setminus \mathcal{A}_{i-1}$, le complexe $X = F(S)$ vérifie les prop. suivantes :

- les facteurs de comp. de $H^\bullet(X)$ sont dans $\mathcal{B}_i$
- il existe un unique facteur de composition de $H^\bullet(X)$ dans $\mathcal{B}_i \setminus \mathcal{B}_{i-1}$ et celui-ci apparaît en d° $p(i)$
- $S \mapsto$ unique facteur de comp. de $H^{p(i)}(X)$ ds $\mathcal{B}_i \setminus \mathcal{B}_{i-1}$ est une bijection sur les simples

Conséquence : la matrice de $K_0(F) : K_0(A\text{-Mod}) \to K_0(B\text{-Mod})$ dans la base des simples est uni-triangulaire par blocs (avec ± 1 sur la diagonale)

Exemple 1 : A = algèbre des chemins de $\overset{1}{\bullet} \leftarrow \overset{2}{\bullet}$ $\left(A \simeq \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix} \right)$

Deux A-modules simples, 1 et 2 d'enveloppes projectives $P_1 = 1$ et $P_2 = {}^2_1$

Considérons $T = 2 \oplus {}^2_1$ module basculant car $\mathrm{Ext}^1({}^2_1, 2) = 0 = \mathrm{Ext}^1(2, {}^2_1)$

[on peut le voir en remplaçant 2 par $P_1 \to P_2$]

On a de plus $\mathrm{End}_A(T) \simeq A$ avec k-base Id_2, $\mathrm{id}_{{}^2_1}$ et ${}^2_1 \twoheadrightarrow 2$ (unique à scalaire près)

$\Rightarrow$ $F = T \overset{L}{\otimes}_A -$ est une auto-équivalence de $D^b(A\text{-Mod})$

Pour calculer l'image des simples on écrit $2 \to T \to {}^2_1 \rightsquigarrow$ triangle distingué dans $D^b(A \otimes A\text{-Mod})$

d'où $2 \overset{L}{\otimes}_A S \to F(S) \to {}^2_1 \overset{L}{\otimes}_A S \rightsquigarrow$ qui donne $F(1) = 2 \overset{L}{\otimes} 1 = (P_1 \to P_2) \otimes 1 = \boxed{1[1] = F(1)}$

et $2 \overset{L}{\otimes}_A 2 \to F(2) \to 2[0] \rightsquigarrow$ avec $2 \overset{L}{\otimes}_A 2 = (P_1 \to P_2) \otimes_A 2 = 1[0]$

et on obtient $\boxed{F(2) = {}^2_1}$

$\Rightarrow$ F est perverse pour la filtration $1 \leq 2$ et la perversité $p(1) = -1$ et $p(2) = 0$

Exemple 2 : rep. de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en caractéristique 3

2 modules simples (de dim 1) 1 et ε d'enveloppes projectives $P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{smallmatrix}$ et $P_\varepsilon = \begin{smallmatrix} \varepsilon \\ 1 \\ \varepsilon \end{smallmatrix}$

En termes de carquois $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, bend left, "u"] & \overset{\varepsilon}{\bullet} \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd}$ avec les relations $uvu = vuv = 0$

(on a $\mathrm{End}(P_1) \simeq \mathrm{End}(P_\varepsilon) \simeq k[x]/x^2$)

On considère le complexe $T = \overset{-1}{P_\varepsilon \oplus P_\varepsilon} \xrightarrow{v} \overset{0}{P_1}$ en degrés -1 et 0

On peut montrer que T est basculant et que $\mathrm{End}_{D^b(A\text{-Mod})}(T) \simeq A$, donc $F = T \otimes_A -$ induit une auto-équivalence de $D^b(A\text{-Mod})$

Il est clair que $T \otimes_A 1 = k[0]$ simple ($= 1$ par convention) $\boxed{F(1) = 1}$

Pour calculer $T \otimes_A \varepsilon = F(\varepsilon)$ on remarque que $\begin{matrix} P_\varepsilon \\ \downarrow \\ (P_\varepsilon \to P_1) \end{matrix}$ est nulle après $\otimes_A \varepsilon$

donc $P_\varepsilon \otimes_A \varepsilon \to T \otimes_A \varepsilon [-1]$

est un morphisme de A-modules alors que $P_\varepsilon \to T[-1]$ ne l'est pas

$\rightsquigarrow$ triangle distingué $P_\varepsilon \otimes \varepsilon \to T[-1] \otimes \varepsilon \to (P_\varepsilon \to P_1) \otimes \varepsilon \rightsquigarrow$ d'où $\boxed{F(\varepsilon) = \begin{smallmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{smallmatrix}[1]}$

donc F est perverse avec $p(1) = 0$ et $p(\varepsilon) = -1$

Rmq : on retrouve la cohomologie ℓ-adique de la variété $X(s)$ pour $SL_2(2)$ avec $\ell = 3 = 2+1$

car $H^2_c(X(s)) = k$ et $H^1_c(X(s)) = kG^F/B^F / k$. On a d'ailleurs $R\Gamma_c(Y(s), k) \simeq T$

Rmq : l'unitriangularité $\Rightarrow$ unitriangularité des matrices de décomposition si ADGC est vérifiée

Quelques propriétés :

(1) Une équivalence perverse de perversité 0 est induite par une équivalence de Morita

(2) Si $F : D^b(A\text{-Mod}) \simeq D^b(B\text{-Mod})$ de perversité p, alors F^{-1} de perversité $-p$

(3) Filtration + perversité déterminent B-Mod (par (1) + (2))