Intégration - Interrogation 1.

Il est indispensable d'énoncer les résultat de cours utilisés.

Exercice 1 :

On note λ_n la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Soit $r > 0$ et $h_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'homothétie de centre 0 et de rapport r. Si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, on note $rA = h_r(A)$.

a) Montrer que si A est un produit d'intervalle alors $\lambda_n(rA) = r^n\lambda_n(A)$.

b) En déduire que la mesure de Lebesgues sur $\mathbb{R}^n$ est homogène de degré n i.e. $\forall r > 0$, $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $\lambda_n(rA) = r^n\lambda_n(A)$.

Solution de l'exercice 1.

a) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \Pi_{1\leq k\leq n} I_k$ un produit d'intervalle. Alors $x \in A \Leftrightarrow \forall k,\ x_k \in I_k$. Donc $rA = \Pi_k rI_k$ et $\lambda_n(rA) := \Pi_{1\leq k\leq n}\lambda_1(rI_k) = \Pi_{1\leq k\leq n} r\lambda_1(I_k) = r^n\lambda_n(A)$.

b) Notons μ la fonction définie sur les boréliens par $\mu(A) = r^{-n}\lambda_n(r^nA) = r^{-n}\lambda \circ h_r(A)$. On vérifie que c'est une mesure $\sigma-$finie car h_r est un isomorphisme linéaire (donc continue) ($r > 0$). Les mesures μ et λ_n coincident sur les unions disjointes d'intervalles et sont $\sigma-$finies, donc elles coincident sur la classe monotone engendrée qui est la tribu borélienne (on peut aussi dire que la mesure μ vérifie les propriétés caractéristiques de la mesure produit λ_n).

Exercice 2 :

On note $(\mathbb{R}^n, ||.||)$, l'espace euclidien usuel de dimension n et $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| < r\}$ la boule euclidienne de rayon $r \geq 0$. Le but de l'exercice est de calculer le volume V_1 de la boule unité $B(0, 1)$

On rappelle que pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$, et que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \pi^{\frac{1}{2}} = \Gamma(\frac{1}{2})$.

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}d\lambda_n(x) = \pi^{\frac{n}{2}}$.

b) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}d\lambda_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n,\ e^{-||x||^2} > t > 0\})dt\,.$$

c) En utilisant le resultat de l'exercice 1, déduire de la formule ci dessus que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}d\lambda_n(x) = V_1 \int_0^1 (-lnt)^{\frac{n}{2}}\,dt\,.$$

d) En déduire que $V_1 = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

Solution de l'exercice 2.

a) la fonction étant positive, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}d\lambda_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}(\int_{x_1\in\mathbb{R}} e^{-x_1^2}e^{-(x_2^2+\ldots+x_n^2)}dx_1)d\lambda(x_2)\ldots d\lambda(x_n)\\ &= (\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-(x_2^2+\ldots+x_n^2)}d\lambda(x_2)\ldots d\lambda(x_n))(\int_{x_1\in\mathbb{R}} e^{-x_1^2}d\lambda(x_1))\,.\end{aligned}$$

On voit en itérant que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}d\lambda_n(x) = (\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}dx_1)\ldots(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}dx_n) = \pi^{\frac{n}{2}}$$

b) Notons $f(x) = e^{-||x||^2}$. Le théorème de Fubini donne

$$\int_0^{+\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n,\, f(x) > t > 0\})dt = \int_{\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x} 1_{\{f(x)>t>0\}} = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_0^{f(x)} dt) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x)\,.$$

c) Si $0 < t < 1$, (sinon les ensembles envisagés sont vides),

$$\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n,\, e^{-||x||^2} > t > 0\}) = \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n,\, ||x|| < (-lnt)^{\frac{1}{2}}\}) = \lambda_n(B(0, (-lnt)^{\frac{1}{2}}) = (-lnt)^{\frac{n}{2}} V_1$$

car $\lambda_n(B(0,r)) = \lambda_n(rB(0,1)) = r^n V_1$. Ce qui donne le résultat.

d) Posant $-lnt = r$, on a $\int_0^1 (-lnt)^{\frac{n}{2}} dt = \int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}} e^{-r} dr = \Gamma(\frac{n}{2}+1)$. Donc

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} d\lambda_n(x) = V_1 \Gamma(\frac{n}{2}+1)\,.$$