Intégration - Interrogation 1.

Il est indispensable d'énoncer les résultat de cours utilisés.

Exercice 1 :

On note λ_n la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Soit $r > 0$ et $h_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'homothétie de centre 0 et de rapport r. Si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, on note $rA = h_r(A)$.

a) Montrer que si A est un produit d'intervalle alors $\lambda_n(rA) = r^n \lambda_n(A)$.

b) En déduire que la mesure de Lebesgues sur $\mathbb{R}^n$ est homogène de degré n i.e. $\forall r > 0$, $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $\lambda_n(rA) = r^n \lambda_n(A)$.

Exercice 2 :

On note $(\mathbb{R}^n, ||.||)$, l'espace euclidien usuel de dimension n et $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\, ||x|| < r\}$ la boule euclidienne de rayon $r \geq 0$. Le but de l'exercice est de calculer le volume V_1 de la boule unité $B(0,1)$

On rappelle que pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$, et que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \pi^{\frac{1}{2}} = \Gamma(\frac{1}{2})$.

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} d\lambda_n(x) = \pi^{\frac{n}{2}}$.

b) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} d\lambda_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n,\, e^{-||x||^2} > t > 0\}) dt\,.$$

c) En utilisant le resultat de l'exercice 1, déduire de la formule ci dessus que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} d\lambda_n(x) = V_1 \int_0^1 (-lnt)^{\frac{n}{2}} dt\,.$$

d) En déduire que $V_1 = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$