Interrogation 2.

Exercice 1 :

a) Soient k fonctions $f_1, \dots, f_k$ telles que $f_i \in L^{p_i}(X, d\mu)$ avec $p_i \geq 1$ et $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} := \frac{1}{p} \leq 1$. Montrer que $f = f_1 . \dots . f_k$ est dans $L^p(X, d\mu)$ et que

$$||f||_p \leq ||f_1||_{p_1} \dots ||f_k||_{p_k}.$$

b) Soit $f \in L^p(X, d\mu) \cap L^q(X, d\mu)$ avec $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que $\forall r \in [p, q]$, $f \in L^r(X, d\mu)$ et que si $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{(1-\alpha)}{q}$ alors

$$||f||_r \leq ||f||_p^{\alpha} ||f||_q^{1-\alpha}.$$

Solution de l'exercice 1.

a) Si $I = \{i, \, p_i < +\infty\}$, il est clair que

$$||f_1 \dots f_k||_p \leq ||\Pi_{i \in I} f_i||_p . \Pi_{i \notin I} ||f_i||_\infty$$

et $\frac{1}{p} = \sum_{i \in I} \frac{1}{p_i}$. On suppose donc que $p_i < +\infty$ pour tout i.

Si $k = 2$, on a $1 = \frac{p}{p_1} + \frac{p}{p_2}$, donc l'inégalité de Holder appliquée aux fonctions $f_i^p \in L^{\frac{p_i}{p}}$ donne

$$\int |f_1 f_2|^p \leq (\int |f_1|^{p_1})^{\frac{p}{p_1}} (\int |f_2|^{p_2})^{\frac{p}{p_2}}$$

ce qui donne la formule dans ce cas. Puis on procède par reccurence : si $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$. Alors $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{\omega}$ et

$$||f_1 f_2 \dots f_k||_p \leq ||f_1||_{p_1} ||f_2 \dots f_k||_\omega \leq ||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} \dots ||f_{p_k}||_{p_k}.$$

b) On suppose $r \neq p$ et $r \neq q$ (donc $\alpha \neq 0$ ou 1). On a $1 = \frac{r\alpha}{p} + \frac{r(1-\alpha)}{q}$ et $f^r = f^{r\alpha} f^{r(1-\alpha)}$ avec $f^{r\alpha} \in L^{\frac{p}{r\alpha}}$ et $f^{r(1-\alpha)} \in L^{\frac{q}{r(1-\alpha)}}$. L'inégalité de Holder permet de conclure :

$$\int |f|^r \leq (\int |f|^p)^{\frac{r\alpha}{p}} (\int |f|^q)^{\frac{r(1-\alpha)}{q}}.$$

Exercice 2 :

a) Soit T l'intérieur du tétraède défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x + y + z \leq 1$. Calculer l'intégrale

$$I = \int_T xyz(1 - x - y - z) dx dy dz$$

en effectuant le changement de variable $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$.

Solution de l'exercice 2. On a $x = u(1 - v)$, $y = uv(1 - w)$ et $z = uvw$ et $\varphi :]0, 1[^3 \ni (u, v, w) \to (x, y, z) \in T$ est un bijection. Le déterminant jacobien est $u^2 v$ et le théorème de changement de variable donne

$$I = \int_{]0,1[^3} u^5(1 - u) v^3 (1 - v) w(1 - w) du dv dw = \frac{1}{7!}$$

en utilisant le théorème de Fubini.

Exercice 3 :
On rappelle que si $\lambda > 0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} dx = (\frac{\pi}{\lambda})^{\frac{1}{2}}$.

a) Soit $q : \mathbb{R}^n \ni x \to q(x) =< Ax, x >\in \mathbb{R}^+$ une forme quadratique définie positive ($A > 0$). On rappelle qu'il existe un changement orthogonal de coordonnées qui diagonalise q. Montrer que

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{detA^{\frac{1}{2}}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}dx$$

b) En déduire que si A, B sont des matrices definies positives alors $\forall\lambda \in [0, 1]$, $det(\lambda A+(1-\lambda)B) \geq (detA)^{\lambda}(detB)^{1-\lambda}$ (On pourra appliquer l'inégalité de Holder à des fonctions bien choisies).

Solution de l'exercice 3.

a) Soit U une matrice orthogonale telle que $X = UY$ et U^tAU est diagonale. On a $|detU| = 1$ et $< Ax, x >=< U^tAUy, y >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \tilde{q}(y)$. Le changement de variable $y \to x$ donne donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tilde{q}(y)}1dy = \Pi_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i y_i^2}dy_i = \Pi_{i=1}^{n}(\frac{\pi}{\lambda_i})^{\frac{1}{2}} .$$

b) On note que $e^{-<(\alpha A+(1-\alpha)B)x,x>} = e^{-\alpha<Ax,x>}e^{-(1-\alpha)<Bx,x>}$.
L 'inégalité de Holder avec $p = \alpha^{-1}$ et $q = (1 - \alpha)^{-1}$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-<(\alpha A+(1-\alpha)B)x,x>}dx \leq (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-<Ax,x>}dx)^{\alpha}(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-<Bx,x>}dx)^{1-\alpha}$$

D'aprés 1), si $\alpha \neq 0$ ou 1, on obtient le résultat.