Interrogation 2.

Exercice 1 :

a) Soient k fonctions $f_1, \dots, f_k$ telles que $f_i \in L^{p_i}(X, d\mu)$ avec $p_i \geq 1$ et $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} := \frac{1}{p} \leq 1$. Montrer que $f = f_1. \dots .f_k$ est dans $L^p(X, d\mu)$ et que

$$||f||_p \leq ||f_1||_{p_1} \dots ||f_k||_{p_k} .$$

b) Soit $f \in L^p(X, d\mu) \cap L^q(X, d\mu)$ avec $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que $\forall r \in [p, q]$, $f \in L^r(X, d\mu)$ et que si $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{(1-\alpha)}{q}$ alors

$$||f||_r \leq ||f||_p^{\alpha} ||f||_q^{1-\alpha} .$$

Exercice 2 :

a) Soit T l'intérieur du tétraède défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x + y + z \leq 1$. Calculer l'intégrale

$$I = \int_T xyz(1 - x - y - z) dxdydz$$

en effectuant le changement de variable $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$.

Exercice 3 :

On rappelle que si $\lambda > 0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} dx = (\frac{\pi}{\lambda})^{\frac{1}{2}}$.

a) Soit $q : \mathbb{R}^n \ni x \to q(x) =< Ax, x >\in \mathbb{R}^+$ une forme quadratique définie positive ($A > 0$). On rappelle qu'il existe un changement orthogonal de coordonnées qui diagonalise q. Montrer que

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{det A^{\frac{1}{2}}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx$$

b) En déduire que si A, B sont des matrices definies positives alors $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$det(\lambda A + (1 - \lambda) B) \geq (det A)^{\lambda} (det B)^{1-\lambda}$$

(On pourra appliquer l'inégalité de Holder à des fonctions bien choisies).