Devoir 1.

Exercice 1 : On note $X = [0,1]$, B la tribu borélienne, λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On note $sign(y) = +1$ si $y \geq 0$ et $sign(y) = -1$ si $y < 0$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_k(x) = sign(sin(2^k \pi x))$. De sorte que $r_k : [0,1] \to \{+1,-1\}$ est constante sur chaque intervalle $]i2^{-k}, (i+1)2^{-k}[$ (Le lecteur aura un grand bénéfice à tracer le graphe de r_1, r_2, r_3).

1) Montrer qu'étant donné deux fonctions r_k, r_l avec $k < l$, on a $\lambda(\{x;\, r_k(x) = \epsilon_1,\, r_l(x) = \epsilon_2\} = \frac{1}{4}$ quelques soient (ϵ_1, ϵ_2) avec $\epsilon_i \in \{+1,-1\}$. En déduire que le système $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système orthonormé de $L^2([0,1], B, \lambda)$.
2) Montrer que pour toute suite $(r_{k_1}, \ldots, r_{k_n})$ (telle que $0 < k_1 < \ldots < k_n$) et pour toute suite $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{+1,-1\}^n$, on a
$$\lambda(\{x;\, r_{k_1}(x) = \epsilon_1,\, \ldots,\, r_{k_n}(x) = \epsilon_n\}) = \Pi_{i=1}^n \lambda(\{x;\, r_{k_i}(x) = \epsilon_i\})\,.$$
C'est à dire que les variables aléatoires $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.
En déduire que pour tout suite de fonctions $f_1, \ldots,\, f_n : \{+1,-1\} \to \mathbb{R}$, on a
$$\int_X \Pi_{i=1}^n f_i(r_i(x))d\lambda(x) = \Pi_{i=1}^n \int_X f_i(r_i(x))d\lambda(x)\,.$$
3) Soit $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Montrer que $\forall \alpha > 0$,
$$\int_X e^{\alpha(\sum_i^n c_i r_i(x))} d\lambda(x) \leq e^{\frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2}\,.$$
On pourra utiliser que $ch(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
4) En déduire que
$$\lambda(|\sum_{i=1}^n c_i r_i| > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}}$$
(Posant $F = \sum_i^n c_i r_i$, on pourra utiliser que $e^{\alpha|F|} \leq e^{\alpha F} + e^{-\alpha F}$ puis utiliser l'inégalité de Tchebichev pour majorer $\lambda(\{e^{\alpha|F|} \geq e^{t\alpha}\})$.
5) En déduire que pour tout $p > 0$, il existe une constante B_p telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$||\sum_{i=1}^n c_i r_i||_{L^p} \leq B_p(\sum_{i=1}^n c_i^2)^{\frac{1}{2}} = B_p||\sum_{i=1}^n c_i r_i||_{L^2}\,.$$
On pourra d'abord supposer $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$.
6) Soit $1 \leq p < 2$, $p \neq 2$, et $\theta \in]0,1[$ telle que $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$.
Montrer que $||F||_2 \leq ||F||_p^{1-\theta}||F||_4^{\theta}$. En déduire qu'il existe une constante A_p telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$A_p(\sum_{i=1}^n c_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq ||\sum_{i=1}^n c_i r_i||_{L^p}\,.$$
7) En déduire les inégalités de Khintchine : Pour chaque $p \geq 1$, il existe des constantes A_p et B_p strictement positives telles que pour toute suite finies $c_1, \ldots, c_n$ de nombres réels, on a
$$A_p||\sum_{i=1}^n c_i r_i||_{L^2} \leq ||\sum_{i=1}^n c_i r_i||_{L^p} \leq B_p||\sum_{i=1}^n c_i r_i||_{L^2}\,.$$

8) On se donne une suite infinie $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels. Montrer que la série $\sum_i c_i r_i$ converge dans L^p ($p \geq 1$) ssi elle converge dans L^2.

Solution de l'exercice 1.

1) $h_k(x) = 1$ ssi $x \in \cup_{2i<2^k}[\frac{2i}{2^k}, \frac{2i+1}{2^k}]$. Cet ensemble est de mesure $\frac{1}{2}$. Si $k < l$,

$$[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}] = \cup_{0\leq p\leq 2^{l-k}-1}[\frac{2^{l-k}i+p}{2^l}, \frac{2^{l-k}i+p+1}{2^l}]$$

et la fonction r_l est positive si p est paire et négative si p est impaire. Sur $]\frac{2^{l-k}i+p}{2^l}, \frac{2^{l-k}i+p+1}{2^l}[$, $r_k = (-1)^i$ et $r_l = (-1)^p$. Il y a donc $\frac{2^k}{2} \times \frac{2^{l-k}}{2}$ de tels intervalles de longueur $\frac{1}{2^l}$ qui répondent a la question. Ce qui donne une mesure totale de $\frac{1}{4}$.

$\int_X r_k r_l d\lambda(x) = \sum_{(\epsilon_1,\epsilon_2)\in\{-1,1\}^2} \epsilon_1\epsilon_2\lambda(\{x;\, r_k(x) = \epsilon_1,\, r_l(x) = \epsilon_2\}$. On trouve 0 si $k < l$ et 1 sinon.

2) On montre la propriété par recurrence : on a vu que $\lambda(\{x;\, r_k(x) = \epsilon_1,\, r_l(x) = \epsilon_2\} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}$. Si $k_1 < \ldots < k_n < k_{n+1}$, les fonctions r_{k_i} sont constantes sur chacun des intervalles $]\frac{i}{2^{k_{n+1}}}, \frac{i+1}{2^{k_{n+1}}}[$. L'ensemble $\{x;\, r_{k_1}(x) = \epsilon_1, \ldots, r_{k_n}(x) = \epsilon_n\}$ est union disjointe d'intervalles du type $I_i = (\frac{i}{2^{k_n}}, \frac{i+1}{2^{k_n}})$. Comme pour la question 1), $I_i \cap \{r_{k_{n+1}} = \epsilon_{n+1}\}$ est de mesure la moitié de celle de I_i. Donc

$$\lambda(\{x;\, r_{k_1}(x) = \epsilon_1, \ldots, r_{k_{n+1}}(x) = \epsilon_{n+1}\}) = \frac{1}{2}\lambda(\{x;\, r_{k_1}(x) = \epsilon_1, \ldots, r_{k_n}(x) = \epsilon_n\}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$$

et

$$\int_X \Pi_{i=1}^n f_i(r_i(x))d\lambda(x) = \sum_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} f(\epsilon_1)\ldots f(\epsilon_n)\lambda(\{r_{k_1} = \epsilon_1, \ldots, r_{k_n} = \epsilon_n\})$$

$$= \sum_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} f(\epsilon_1)\ldots f(\epsilon_n)\lambda(\{r_{k_1} = \epsilon_1\})\ldots\lambda(\{r_{k_n} = \epsilon_n\}) = \Pi_{i=1}^n(\sum_{\epsilon_i\in\{-1,1\}} f(\epsilon_i)\lambda(\{r_{k_i} = \epsilon_i\})\,.$$

Remarque : En général, si deux variables aléatoires $X, Y : (\Omega, d\mu) \to \mathbb{R}$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions mesurables positives f, g, $\int_\Omega f(X)g(Y)d\mu = (\int_\Omega f(X)d\mu)(\int_\Omega g(Y)d\mu)$.

3) Les propriétés de l'exponentielle et l'indépendance entrainent

$$\int_X e^{\alpha(\sum_i^n c_i r_i)}d\lambda = (\int_X e^{\alpha c_1 r_1}d\lambda)\ldots(\int_X e^{\alpha c_n r_n}d\lambda) = \Pi_{i=1}^n ch(\alpha c_i)\,.$$

La dernière égalité étant un calcul simple. En examinant les développements en série entière, on voit que $ch(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. Ce qui donne le résultat demandé.

4) On a

$$\int_X e^{\alpha|F|}d\lambda \leq \int_X e^{\alpha F} + e^{-\alpha F}d\lambda \leq 2e^{\frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2}\,.$$

Donc l'inégalité de Tchebicheff entraine que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(\{e^{\alpha|F|} \geq e^{t\alpha}\}) \leq e^{-t\alpha}2e^{\frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2}\,.$$

Ce qui s'écrit $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(\{|F| \geq t\}) \leq e^{-t\alpha}2e^{\frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2}\,.$$

Le réel $t \geq 0$ étant fixé, on minimise le membre de droite suivant $\alpha \geq 0$: le minimum de $\alpha \to -t\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\beta$ sur $[0, +\infty[$ est $-\frac{t^2}{2\beta}$.

Donc

$$\lambda(\{|F| \geq t\}) \leq \min_{\alpha>0}(e^{-t\alpha}2e^{\frac{\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2}) = e^{-\frac{t^2}{2(\sum_{i=1}^n c_i^2)}}\,.$$

5) Par homogénéité des normes, il suffit d'établir l'estimation pour $(\sum_{i=1}^n c_i^2)^{\frac{1}{2}} = 1$. Le théorème de Fubini entraine que pour tout $p > 0$, on a

$$\int_X |F|^p d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{|F| \geq t\}) p t^{p-1} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} p t^{p-1} dt := B_p^p$$

6) On a $|F|^2 = |F|^{2\theta}|F|^{2(1-\theta)}$. La première fonction est dans $L^{\frac{p}{2\theta}}$, la seconde dans $L^{\frac{4}{2(1-\theta)}}$. Donc l'inégalité de Holder entraine que $||F||_2^2 \leq ||F||_p^{2\theta}||F||_4^{2(1-\theta)}$.
Mais $||F||_4 \leq B_4||F||_2$, donc

$$||F||_2 B_4^{-\frac{\theta}{(1-\theta)}} \leq ||F||_p \,.$$

7) Les inégalités sont démontrer si $1 \leq p \leq 2$. Si $2 < p$, Comme on est dans un espace de probabilisé, on a $||F||_2 \leq ||F||_p$ par Jensen ou Holder. Ce qui montre l'inégalité de gauche dans ce dernier cas.

8) Les espaces L^p sont des espaces de Banach, donc une série converge ssi elle vérifie le critère de Cauchy. Les inégalité de Khintchine montrent quer les critère de Cauchy est satisfait dans L^p ssi il l'est dans L^2.