Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies

Année universitaire 2009/2010
Unité LM367

Examen du 25 janvier 2010 - Correction

Exercice 1. Cf cours.

Exercice 2. Notons $g_1(z) = \left(2 + z + \frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}$ et $g_2(z) = \left(2 - z - \frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}$. Chacune de ces deux fonctions méromorphes admet éventuellement un pôle en 0, uniquement. Ecrivons $f(z) = a_0 + a_1 z + z^2 h(z)$, où h est holomorphe au voisinage de 0. Alors $g_1(z) = \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + h(z) + \frac{2a_0}{z} + 2a_1 + 2zh(z) + f(z)$, donc $\text{Rés}(g_1, 0) = 2a_0 + a_1 = 2f(0) + f'(0)$; de même on a $\text{Rés}(g_2, 0) = 2f(0) - f'(0)$.
De plus, l'application $H\colon [0,1]\times[0,1] \to \Omega$ définie par $H(s,t) = (1-s)e^{2i\pi t}$ est une homotopie entre le chemin $\partial D(0,1)$ et un chemin constant (on pouvait aussi signaler que Ω contient un ouvert convexe $D(0, 1+\varepsilon)$ avec ε assez petit). La formule des résidus donne donc :

$$\int_{\partial D(0,1)} \left(2 + z + \frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i(2f(0) + f'(0)),$$

$$\text{et } \int_{\partial D(0,1)} \left(2 - z - \frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i(2f(0) - f'(0)).$$

2) On paramétrise le chemin $\partial D(0,1)$ par $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i\theta}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2f(0) + f'(0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \left(2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\frac{\theta}{2} f(e^{i\theta})d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } 2f(0) - f'(0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \left(2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\frac{\theta}{2} f(e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Soit $H_R = H \cap D(0,R)$ et $m_R = ||f||_{\infty,\overline{H\cap D(0,R)}} = max_{z\in\overline{H\cap D(0,R)}}|f(z)|$ ($\overline{H \cap D(0,R)}$ est compact).
Montrons que f est bornée: Soit $m = \sup_{z\in\overline{H}} |f(z)|$. Comme $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{H}}} f(z) = 0$, il existe $R > 0$ tel que $z \in \overline{H}$ et $|z] > R$ entraine $|f(z)| < 1$. Donc $m \leq \max(m_R, 1) < +\infty$
Montrons que m est atteint sur le bord de H: Si $m = 0$, la propriété est triviale.
Supposons $m > 0$. Il existe $R' > 0$ tel que $z \in \overline{H}$ et $|z] > R'$ entraine $|f(z)| < \frac{m}{2}$. Donc $m = ||f||_{\infty,\overline{H_{R'}}}$. L'ouvert $H_{R'}$ est borné et f est holomorphe sur cet ouvert, continue jusqu'au bord. Le maximum du module est donc atteint sur le bord de ce domaine.
Mais comme $|f(z)| \leq \frac{m}{2}$ sur $|z| = R'$, ce maximum est atteint sur le segment $[iR, -iR]$.

2. On a
$$|e^{-z^\gamma}| = e^{-\mathrm{Re}(|z|^\gamma e^{i\gamma \mathrm{Arg}(z)})} = e^{-|z|^\gamma \cos(\gamma \mathrm{Arg}(z))} \leq e^{-|z|^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2}}.$$
On remarque que $\cos\dfrac{\gamma\pi}{2} > 0$.

3. La fonction définie par $F_\epsilon(z) = f(z)e^{-\epsilon z^\gamma}$ est holomorphe sur H, continue sur son adhérence et vérifie
$$|F_\epsilon(z)| \leq C e^{|z|^\beta - \epsilon \cos\frac{\gamma\pi}{2}|z|^\gamma}.$$
Elle tend donc vers 0 lorsque z tend vers l'infini. La question précédente entraine que $\forall z \in \overline{H}$, $|F_\epsilon(z)| \leq |f(z)|$. En particulier, sur la droite $i\mathbb{R}$, F_ϵ est bornée par $M = \sup\limits_{t\in i\mathbb{R}} |f(t)|$.
La question (1) de l'exercice entraine que si $z \in \overline{H}$, alors $|F_\epsilon(z)| \leq \max\limits_{t\in i\mathbb{R}} |F_\epsilon(t)| \leq M$. Faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $|f(z)| = |F_0(z)) \leq M$.

Exercice 4.
1) Les pôles de f sont ai, $-ai$ et 1, donc les conditions $r < a < R$ et $r < 1 < R$ impliquent que les trois pôles de f sont d'indice 1 par rapport au chemin $\gamma_{r,R,\theta}$.

Chacun de ces pôles est un pôle simple. On calcule les résidus de f :
$$f(z) = \frac{1}{z+ai} \cdot \frac{1}{z-ai} \cdot \frac{1}{\mathrm{Log} z},$$
donc $\mathrm{Rés}(f, ai) = \dfrac{1}{2ai} \cdot \dfrac{1}{\mathrm{Log}(ai)} = \dfrac{1}{2ai}\dfrac{1}{\ln a + i\frac{\pi}{2}}$, et $\mathrm{Rés}(f, -ai) = \dfrac{-1}{2ai} \cdot \dfrac{1}{\mathrm{Log}(-ai)} = \dfrac{-1}{2ai}\dfrac{1}{\ln a - i\frac{\pi}{2}}$; enfinn la dérivée de la fonction $z \mapsto \mathrm{Log} z$ est $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, donc on trouve $\mathrm{Rés}(f,1) = \dfrac{1}{1+a^2}$.
La formule des résidus, appliquée à f, méromorphe sur l'ouvert simplement connexe $C \setminus (\mathbb{R}_-)$, donne finalement :
$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{r,R,\theta}} f(z)dz &= 2\pi i \left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{\ln a + i\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\ln a - i\frac{\pi}{2}}\right)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{2ai} \cdot \frac{-i\pi}{(\ln a)^2 + \frac{\pi^2}{4}}\right) \\
&= -2\pi i \left(\frac{1}{2a} \cdot \frac{\pi}{(\ln a)^2 + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{1}{1+a^2}\right).
\end{aligned}$$

2) L'intégrale de Cauchy $\displaystyle\int_{\gamma_{r,R,\theta}} f(z)dz$ est la somme des quatre intégrales :
$$I_+ = -\int_r^R \frac{e^{i(\pi-\theta)}dt}{(t^2e^{-2i\theta}+a^2)\mathrm{Log}(te^{i(\pi-\theta)})} = e^{-i\theta}\int_r^R \frac{dt}{(t^2e^{-2i\theta}+a^2)(\ln t + i(\pi-\theta))},$$
$$I_- = \int_r^R \frac{e^{i(-\pi+\theta)}dt}{(t^2e^{2i\theta}+a^2)\mathrm{Log}(te^{i(-\pi+\theta)})} = -e^{i\theta}\int_r^R \frac{dt}{(t^2e^{2i\theta}+a^2)(\ln t + i(-\pi+\theta))},$$
$$I_R = \int_{-\pi+\theta}^{\pi-\theta} \frac{iRe^{it}dt}{(R^2e^{2it}+a^2)\mathrm{Log}(Re^{it})}$$

$$\text{et } I_r = -\int_{-\pi+\theta}^{\pi-\theta} \frac{ire^{it}dt}{(r^2e^{2it}+a^2)\mathrm{Log}(re^{it})}.$$

Lorsque θ tend vers 0, $\dfrac{1}{(t^2e^{-2i\theta}+a^2)(\ln t + i(\pi-\theta))}$ tend uniformément vers $\dfrac{1}{(t^2+a^2)(\ln t - i\pi)}$, donc I_+ tend vers $\displaystyle\int_r^R \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x + i\pi)}$; de même I_- tend vers $\displaystyle -\int_r^R \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x - i\pi^2)}$.
Donc la somme tend vers $\displaystyle\int_r^R \frac{dx \times (-2i\pi)}{(x^2+a^2)(\ln^2 x + \pi^2)}$.
Les inégalités $|I_R| \leq \dfrac{2\pi R}{(R^2-a^2)\ln R}$ et $|I_r| \leq \dfrac{2\pi r}{(a^2-r^2)(-\ln r)}$, valables lorsque $r < a < R$ et $r < 1 < R$, permettent de trouver, à la limite lorsque r tend vers 0 et R vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a((\ln a)^2 + \frac{\pi^2}{4})} - \frac{1}{1+a^2}.$$