Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies

Année universitaire 2009/2010
Unité LM367

Examen du 25 janvier 2010

Exercice 1. (*Question de cours*).
Énoncer le principe du maximum.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenant $\overline{D}(0,1)$.
1) Exprimer la valeur des intégrales

$$\int_{\partial D(0,1)} \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}dz \text{ et } \int_{\partial D(0,1)} \left(2-z-\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}dz$$

en fonction des valeurs prises par f et ses dérivées successives en 0.
2) En déduire les égalités suivantes :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta = 2f(0)+f'(0),$$

$$\text{et } \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = 2f(0)-f'(0).$$

Exercice 3. On note $\mathrm{Arg} : \mathbb{C}\setminus]-\infty,0] \to]-\pi,\pi[$ la fonction argument principale. Soit $H = \{z \in \mathbb{C}\,, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
1) Soit f une fonction holomorphe sur H et continue sur $\overline{H}$. On suppose que

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{H}}} f(z) = 0\,.$$

Montrer alors que

$$\sup_{z\in\overline{H}} |f(z)| = \max_{z\in\partial H} |f(z)|\,.$$

2) Soit $0 \leq \gamma < 1$. On note $H \ni z \mapsto z^\gamma = e^{\gamma \mathrm{Log}\, z}$ la détermination principale de la puissance d'ordre γ sur H. On prolonge par continuité cette fonction à $\overline{H}$. Soit $z \in \overline{H}$, majorer $|e^{-z^\gamma}|$ en fonction de γ et de $|z|$.
3) (**Plus difficile**) Soit f une fonction holomorphe sur H et continue sur $\overline{H}$. On suppose que $|f|$ est majorée par une constante M sur ∂H et qu'il existe une constante C telle que $\forall z \in \overline{H}$, on ait

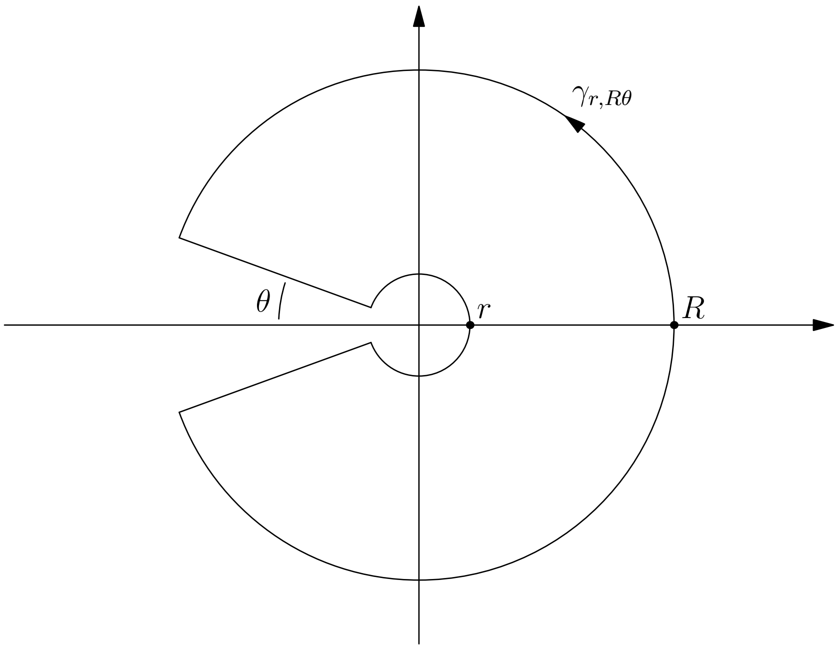
$$|f(z)| \leq Ce^{|z|^\beta}$$

avec $\beta < 1$.
Montrer alors que f est bornée sur H et que

$$\sup_{z\in\overline{H}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial H} |f(z)|.$$

Indications: On appliquera la seconde question à la fonction $z \mapsto F_\epsilon(z) = f(z)e^{-\epsilon z^\gamma}$ pour un nombre γ tel que $\beta < \gamma < 1$.

Exercice 4. Dans cet exercice, Log désignera la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_-)$, dont la partie imaginaire prend ses valeurs dans $]-\pi,\pi[$.
Si $R > r > 0$ et $\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, on note $\gamma_{r,R,\theta}$ le chemin fermé obtenu en parcourant successivement l'arc du cercle $C(0,R)$ compris entre les angles $-\pi+\theta$ et $\pi-\theta$ (dans le sens direct), puis le segment $[Re^{i(\pi-\theta)}, re^{i(\pi-\theta)}]$, puis l'arc du cercle $(0,r)$ compris entre les angles $\pi-\theta$ et $-\pi+\theta$ dans le sens indirect, et enfin le segment $[re^{i(-\pi+\theta)}, Re^{i(-\pi+\theta)}]$.



1) Soit a un réel strictement positif. Exprimer l'intégrale de la fonction $f\colon z \mapsto \dfrac{1}{(z^2+a^2)\mathrm{Log} z}$ sur le chemin $\gamma_{r,R,\theta}$, pour r et R tels que $0 < r < a < R$ et $r < 1 < R$.
2) En faisant tendre θ vers 0 puis r vers 0 et R vers $+\infty$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)((\ln x)^2+\pi^2)} = \frac{\pi}{2a((\ln a)^2+\frac{\pi^2}{4})} - \frac{1}{1+a^2}.$$