Correction de l'examen de Janvier 2010, $1^{\text{ière}}$ session

Exercice 1.

(1) Par hypothèse, il existe un compact K contenu dans U tel que $z \notin K$ entraine $|f(z)| \leq 1$. Donc $P(f) \subset K$. Or l'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe est un ensemble discret et fermé dans U. Donc $P(f) = P(f) \cap K$ est fini.

(2) Supposons f non nulle. Notons $P(f) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ l'ensemble des pôles de f. Soit n_i l'ordre du pôle p_i dans f de sorte que $f(z) = \dfrac{g_i(z)}{(z-p_i)^{n_i}}$ au voisinage de p_i avec g_i holomorphe sur ce voisinage. Notant $P(z) = \Pi_{i=1}^n (z-p_i)^{n_i}$, la fonction $P.f : U \ni z \mapsto \Pi_{i=1}^n (z-p_i)^{n_i} f(z)$ holomorphe sur $U \setminus P(f)$ se prolonge comme fonction holomorphe, notée A, sur U: elle est égale à $z \mapsto g_i(z)\Pi_{j\neq i}(z-p_j)^{n_j}$ au voisinage de p_i.

Montrons que $\lim_{z\mapsto \partial U} \tilde{A}(z) = 0$:

U étant borné, $||P||_{\infty,\bar{U}} = \sup_{z\in\bar{U}}\{|P(z)|\}$ est fini. Soit $\epsilon > 0$, il existe un compact contenu dans U telle que $z \notin K$ entraine $|f(z)| \leq \dfrac{\epsilon}{1+||P||_{\infty,\bar{U}}}$. Donc $z \notin K$ entraine $|A(z)| = |(P.f)(z)| \leq \epsilon$.

Ceci entraine que A est identiquement nul: Prolongeons la fonction A par continuité sur $\bar{U}$ en posant $A_{|\partial U} = 0$. Le principe du maximum pour l'ouvert borné U et la fonction holomorphe sur U continue jusqu'au bord s'applique:

$$\max_{\bar{U}} |A| = \max_{\partial U} |A| = 0\,.$$

Donc $f = \dfrac{A}{P}$ est identiquement nulle. Contradiction.

(3) La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est un contre-exemple lorsque $U = \mathbb{C}$ est non borné.

Exercice 2. Posons $z^p = e^{p\log z}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. La fonction $f : z \mapsto \dfrac{z^p \log z}{z^n+1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ avec des pôles simples en $e^{\frac{i\pi}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}$. Donc

$$\mathrm{R\acute{e}s}(f, e^{\frac{i\pi}{n}}) = \left(\frac{z^p \log z}{nz^{n-1}}\right)(e^{\frac{i\pi}{n}}) = -\frac{i\pi}{n^2} e^{(p+1)\frac{i\pi}{n}}\,.$$

Le théorème des résidus appliqué à f sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ simplement connexe entraine que

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \mathrm{R\acute{e}s}(f, e^{\frac{i\pi}{n}})$$

car l'indice de Γ par rapport aux autres pôles est nul.

Mais si z est dans le support de Γ,

$$|f(z)| \leq \frac{e^{p\ln|z|}(|\ln|z|| + \frac{2\pi}{n})}{|1-|z|^n|}\,.$$

Les hypothèses $-1 < p < n-1$ entrainent donc

$$\lim_{r\mapsto 0} \left|\int_{\Gamma_4} f(z)dz\right| \leq \lim_{r\mapsto 0} \left|\frac{2\pi}{n} r r^p (|\ln r| + \frac{2\pi}{n}\right) = 0$$

et

$$\lim_{R\mapsto +\infty} \left|\int_{\Gamma_2} f(z)dz\right| \leq \lim_{R\mapsto+\infty} \left|\frac{2\pi}{n} R \frac{R^p(\ln R + \frac{2\pi}{n})}{R^n - 1}\right| = 0\,.$$

De plus, l'intégrale

$$\int_{\Gamma_3} f(z)dz \quad = \quad \int_r^R \frac{e^{\frac{2ip\pi}{n}} t^p(\ln t + \frac{2i\pi}{n})}{t^n+1} e^{\frac{2i\pi}{n}} dt$$

converge lorsque $r \mapsto 0$ et $R \mapsto +\infty$ vers $e^{\frac{2i(p+1)\pi}{n}}[F_{n,p} + \frac{2i\pi}{n} G_{n,p}]$.

Donc

$$2i\pi \text{R}\acute{e}s(f, e^{\frac{i\pi}{n}}) = \lim_{R\mapsto+\infty, r\mapsto 0} \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz - \int_{\Gamma_3} f(z)dz - \int_{\Gamma_4} f(z)dz$$

$$2\frac{\pi^2}{n^2} e^{(p+1)\frac{i\pi}{n}} = F_{n,p} - e^{\frac{2i(p+1)\pi}{n}}[F_{n,p} + \frac{2i\pi}{n} G_{n,p}]$$

$$\frac{\pi^2}{n^2} i = F_{n,p} \sin \frac{\pi(p+1)}{n} + e^{\frac{i(p+1)\pi}{n}} \frac{\pi}{n} G_{n,p}$$

$$G_{n,p} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi(p+1)}{n}} \text{ et } F_{n,p} = -\frac{\pi^2}{n^2} \frac{\cos \frac{\pi(p+1)}{n}}{\sin^2 \frac{\pi(p+1)}{n}}\,.$$

Remarque: la dérivée en p de $G_{n,p}$ égale $F_{n,p}$.

Exercice 3.

(1) Rappelons que si $j \geq 2$, $\dfrac{(j-1)!}{(1-z)^j} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+j-1)\dots(n+1)z^n$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d_1 + d_2(n+1) + d_3(n+2)(n+1)\dots + d_k(n+k-1)\dots(n+1)}{d_1 + d_2(n+2) + d_3(n+3)(n+2)\dots + d_k(n+k)\dots(n+2)} = 1\,.$$

(2) La fonction h admet en 1 une singularité éliminable. Son prolongement holomorphe $\tilde{h}$ est holomorphe sur $D(0, 1+\epsilon)$. Le développement en série entière de $\tilde{h}$ en 0 converge donc sur ce disque. C'est aussi le développement en série entière de h. Le rayon de convergence est supérieur à $1+\epsilon$.

Donc $\limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = 1$ entraine $\lim_{n\to+\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = 1$.

Donc $\limsup_{n\to+\infty} |\dfrac{c_n}{b_n}|^{\frac{1}{n}} < 1$ et $\limsup_{n\to+\infty} |\dfrac{c_n}{b_n}| = 0$. Ce qui entraine

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n + c_n}{b_{n+1} + c_{n+1}} = 1\,.$$

(3) En général, on considère la fonction $z \to f'(z) = f(z_0 z)$ dont le développement en série entière en 0 est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n {z_0}^n) z^n$.