Correction de l'examen de Janvier 2010, $2^{\text{ière}}$ session

Exercice 1. Ce sont des questions de cours.

Exercice 2.

(1) Ecrivons $f(z) = \frac{1}{b^2 z} + h(z)$ avec h holomorphe sur $D(0,b)$, (partie principale plus partie régulière). Donc h est bornée par une constante M sur $D(0, \frac{b}{2})$ et

$$\int_{C_\epsilon} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{1}{\epsilon b^2 e^{it}} i\epsilon e^{it} dt + \int_{C_\epsilon} h(z)dz\,.$$

La première intégrale vaut $\frac{i\pi}{b^2}$ et $\lim_{\epsilon\to 0} |\int_{C_\epsilon} h(z)dz| \leq \lim_{\epsilon\to 0} Longueur(C_\epsilon)M = 0$. Donc $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)dz = \frac{i\pi}{b^2}$.

(2)

$$\begin{aligned}|\int_{C_R} f(z)dz| &= |\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2+b^2} Rie^{it}dt| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{R^2-b^2} Rdt \leq \pi \frac{R}{R^2-b^2}\end{aligned}$$

qui est de limite nulle quand R tend vers $+\infty$.

(3) Les pôles de f sont 0 et $\pm ib$. $Ind(0,\Gamma) = Ind(-ib,\Gamma) = 0$ et $Ind(ib,\Gamma) = 1$. $\mathbb{C}$ étant convexe, le théorème des résidus appliqué à f méromorphe sur $\mathbb{C}$ donne

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz = 2i\pi Res(f, ib) = 2i\pi \frac{-e^{-b}}{2b^2}$$

car ib est un pôle simple.

(4) La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t(t^2+b^2)}$ est impaire sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, son intégrale sur $[-R,-\epsilon]\cup[\epsilon,R]$ est nulle. Donc $\forall 0<\epsilon<b<R$,

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\epsilon} f(z)dz + \int_\epsilon^R f(z)dz &= 2i\int_\epsilon^R \frac{sint}{t(t^2+b^2)}dt \\ &= 2i\pi\frac{-e^{-b}}{2b^2} + \int_{C_\epsilon} f(z)dz - \int_{C_R} f(z)dz\end{aligned}$$

Passant à la limite quand ϵ tend vers 0 puis R vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(t^2+b^2)}dt = \frac{\pi}{2b^2}[1-e^{-b^2}]\,.$$

On note que la fonction $\mathbb{R} \ni t \to\mapsto \frac{sint}{t(t^2+b^2)}$ se prolonge par continuité en 0 (tandis que 0 est pôle simple de f) et qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. La fonction f est le quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, de dénominateur non identiquement nulle, elle est donc méromorphe sur $\mathbb{C}$. Ses singularités sont contenus dans $\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. De plus comme $\cos' = -\sin$ est non nulle en ces points, ce sont des pôles simples ou des singularités éliminables.

On a donc $Res(f, \frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{(-1)^k + 1}{-(-1)^k}$. Lorsque k est impair, le résidus est nul donc la singularité est éliminable. Cela se voit aussi via le changement de variable $z = u + \frac{\pi}{2} + k\pi$ car (k impair) $f(u + \frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{0 + 0.u + O(u^2)}{u + O(u^2)} \to 0$ lorsque $u \to 0$.

(1) La fonction est holomorphe sur $D(0, \frac{\pi}{2})$, sa série de taylor en l'origine $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge sur ce disque. Le point $\frac{\pi}{2}$ étant un pôle, le rayon de convergence est précisement $\frac{\pi}{2}$.

(2) La fonction H est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des singularités éliminables ou polaires d'ordres 1 en les points $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in 2\mathbb{Z}$ (car on a vu que pour k impair, les pôles de f sont éliminables). Le résidu en $\frac{\pi}{2}$ de H est la somme des résidus des deux fonctions (unicité du développement de Laurent). Donc $res(H, \frac{\pi}{2}) = -2 + 2 = 0$. La singularité est donc éliminable et H holomorphe sur $D(0, \frac{3\pi}{2}) \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ admet un prolongement holomorphe $\tilde{H}$ à ce disque.

(3) Le développement en série de taylor de H au voisinage de zéro est aussi celui de $\tilde{H}$. Il converge donc sur $D(0, \frac{3\pi}{2})$. Ce développement est $\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n - 2(\frac{2}{\pi})^{n+1}] z^n$. Le terme général de cette série évalué en $\frac{\pi}{2}$ converge vers zéro:

$$\lim_{n \to +\infty 0} [a_n - 2(\frac{2}{\pi})^{n+1}](\frac{\pi}{2})^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{2(\frac{2}{\pi})^{n+1}} - 1 = 0 \,.$$