Examen de Janvier 2011, $2^{\text{ième}}$ session

Exercice 1.

(1) Rappelez une condition pour qu'une fonction f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ admette une primitive holomorphe.

(2) La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}^*$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Soit b un réel strictement positif, et ϵ, R des paramètres tels que $0 < \epsilon < b < R$. On note C_ϵ et C_R les demi cercles de rayon ϵ et R situés dans $Imz \geq 0$, paramétrés dans le sens direct.

On considère la fonction $f : z \mapsto f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+b^2)}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$. On note $K(R,\epsilon) = \{z = re^{it}, \epsilon \leq r \leq R, 0 \leq t \leq \pi\}$. On paramètre le bord de $K(R,\epsilon)$ par le chemin

$$\Gamma_{\epsilon,R} = [-R,-\epsilon] \cup -C_\epsilon \cup [\epsilon, R] \cup C_R$$

obtenu par juxtaposition du segment $[-R,-\epsilon]$, de C_ϵ parcouru dans le sens indirecte (le $-$ désigne le chemin opposé), de $[\epsilon, R]$ et de C_R.

(1) Montrer que $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)dz = i\pi Res(f,0)$.

(2) Montrer que $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$.

(3) Que vaut $\displaystyle\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz$?

(4) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(t^2+b^2)}dt$

Exercice 3. On rappelle que l'équation $\cos z = 0$ admet comme solutions complexes $\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

On considère la fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{\sin z + 1}{\cos z}$.

(1) Montrer que cette fonction est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et préciser ses pôles et les résidus en chacun de ses pôles. Quel est la nature de la singularité $-\frac{\pi}{2}$?

(2) Montrer qu'il existe une suite de nombre complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{\sin z + 1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

pour tout z au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière?

(3) Montrer que la fonction $H : z \to \dfrac{\sin z + 1}{\cos z} + \dfrac{4}{2z-\pi}$ admet un prolongement $\tilde{H}$ holomorphe sur le disque $D(0, \frac{3\pi}{2})$.

(4) En évaluant au point $\frac{\pi}{2}$, le développement en série entière de $\tilde{H}$ en 0, montrer que $a_n \sim \dfrac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.