Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies

Année universitaire 2011/2012
Unité LM367

Examen de Décembre 2011, $1^{\text{ière}}$ session.

Exercice 1. (5 points).

(1) Énoncer le principe du maximum.

(2) Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et soit $M = \max_{z\in \overline{D(0,1)}} |P(z)|$.

Montrer que si $|z| \geq 1$ alors $|P(z)| \leq M|z|^n$.

Indication: On pourra considérer la fonction $z \mapsto z^n P(\frac{1}{z})$.

Exercice 2. (5 points).

(1) Montrer que la fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 - 2iz - 2}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Calculer ses pôles et ses résidus .

(2) Pour $R > \sqrt{2}$, on considère le chemin γ_R obtenu comme juxtaposition du segment $[-R, R]$, et du demi cercle $C(R, -R) = \{Re^{it},\, 0 \leq t \leq \pi\}$. Que vaut $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz$?

(3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{]-\infty,+\infty[} f(x)dx$.

Exercice 3. (10 points).

Le but de l'exercice est de trouver le développement en série entière de la variable w de la solution $w \mapsto z(w)$ de l'équation $z = 1 + wz^a$ qui est située au voisinage de 1 lorsque w tend vers 0.

Ici a est un nombre réel fixé, $z \mapsto z^a = e^{a\text{Log}(z)}$ est la détermination de la puissance $a-$ième d'un nombre complexe z qui prolonge la fonction usuelle $x \mapsto x^a$ au disque $D(1, 1)$.

(1) Soit $r \in]0, 1[$. Calculer $\alpha(r) = \max_{z\in C(1,r)} |z|^a$. En utilisant par exemple le théorème de Rouché, montrer que si $|w|\alpha(r) < r$ alors l'équation $z = 1+wz^a$ admet exactement une racine $z(w)$ dans $D(1, r)$.

(2) On fixe un tel w (i.e. $|w|\alpha(r) < r$). On considère la fonction holomorphe

$$h : D(1, 1) \ni z \mapsto h(z) = \frac{z - 1}{z^a}.$$

Calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(1,r)} (z - 1)\frac{h'(z)}{h(z) - w}dz.$$

(3) Montrer que la série de fonctions $z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(z - 1)h'(z)\frac{w^n}{h^{n+1}(z)}$ converge normalement sur $C(1, r)$.

(4) En déduire que $z(w) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n w^n$ avec $c_n = \dfrac{an(an - 1)\dots(an - n + 1)}{n!}$ si $n \geq 1$.

Remarque: pour faciliter le calcul, on pourra faire une intégration par partie, c'est à dire on pourra utiliser le fait que $\displaystyle\int_{C(1,r)} (f_1f_2)'(z)dz = 0$ lorsque f_1 et f_2 sont des fonctions holomorphes au voisinages de $C(1, r)$.

Bonus:
Plus généralement, si g est une fonction holomorphe sur $D(1,1)$ telle que $g(1)=0$, calculer

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} g(z)\frac{h'(z)}{h(z)-w}dz\,.$$

En déduire que $g(z(w)) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n w^n$ avec $d_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} \frac{g'(z)}{nh(z)^n}dz$. On fera une intégration par partie pour trouver l'expression de d_n.

Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies

Année universitaire 2011/2012
Unité LM367

Correction de l'examen de Décembre 2011, $1^{\text{ière}}$ session

Exercice 1.

(1) c.f. cours.

(2) La fonction $z \mapsto z^n P(\frac{1}{z})$ définie sur $\mathbb{C}^*$ se prolonge en une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ car si $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ alors $z^n P(\frac{1}{z}) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$. Le principe du maximum appliquée à f sur $\overline{D(0,1)}$ entraine que pour $z \in \overline{D(0,1)}$, $|f(z)| \le ||f||_{\infty, C(0,1)} = M$. Donc pour tout z de module plus grand que 1, $|f(\frac{1}{z})| \le M$ i.e. $|z^{-n}P(z)| \le M$.

Exercice 2.

(1) La fonction est le quotient de fonctions entières dont le dénominateur est non identiquement nul. Elle définit donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. On a $x^2 - 2ix - 2 = (x-i)^2 - 1 = (x-i-1)(x-i+1)$.

La fonctions $z \mapsto e^{iz}$ étant non nul, les racines $i+1$ et $i-1$ du polynôme sont des pôles simples de f et $\text{R\'es}(f, i \pm 1) = \frac{e^{iz}}{2z-2i}_{|i\pm1} = \frac{\pm e^{-1\pm i}}{2}$.

(2) Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, le théorème des résidus entraine

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi(\text{R\'es}(f, i+1) + \text{R\'es}(f, i-1)) = -2\pi e^{-1} \sin 1\,.$$

(3) Comme $\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{C(R,-R)} f(z)dz \right| \le \lim_{R\to+\infty} \pi R \frac{1}{R^2 - 2R - 2} = 0$, on a

$$-2\pi e^{-1} \sin 1 = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{]-\infty,+\infty[} f(x)dx + 0\,.$$

Exercice 3.

(1) On a $\alpha(r) = (1-r)^a$ si $a \le 0$ et $(1+r)^a$ si $a \ge 0$. On applique le lemme de Rouché avec les fonctions $z \mapsto z - 1 - wz^a$ et $z \mapsto z - 1$: Si $z \in C(1,r)$ alors

$$|(z-1-wz^a) - (z-1)| = |w||z^a| \le |w|\alpha(r) < r = |z-1|\,.$$

Donc l'équation $z - 1 - wz^a = 0$ admet autant de racine dans $D(1,r)$ que l'équation $z - 1 = 0$.

(2) La fonction $f : z \mapsto (z-1)\frac{h'(z)}{h(z)-w}$ est méromorphe sur le disque $D(1,1)$. L'unique pôle de $z \mapsto \frac{h'(z)}{h(z)-w}$ dans $D(1,r)$ est une singularité logarithmique au point $z(w)$:

$h(z) - w = (z - z(w))H(z)$ sur $D(1,1)$ avec H non nul au voisinage de $z(w)$. Donc $(z-1)\frac{h'(z)}{h(z)-w} = \frac{z(w)-1}{z-z(w)} + G(z)$ avec G une fonction holomorphe au voisinage de $z(w)$. En fait dans notre cas, on peut aussi calculer directement le résidu car $z(w)$ est une racine simple. Donc $\text{R\'es}(f, z(w)) = \frac{(z-1)h'(z)}{(h(z)-w)'}_{|z=z(w)} = z(w) - 1$.

Le théorème des résidus appliqué à l'ouvert convexe $D(1,1)$ (ou $D(1, r+\epsilon)$, $\epsilon > 0$ assez petit) entraine

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(1,r)} (z-1)\frac{h'(z)}{h(z)-w} dz = z(w) - 1$$

car l'indice du cercle par rapport à $z(w)$ vaut 1 et l'indice par rapport à d'autres pôles extérieurs à $\overline{D(1,r)}$ est nul.

(3) La fonction $z \mapsto \dfrac{(z-1)h'(z)}{h(z)}$ est continue sur le cercle $C(1,r)$, elle est donc majorée par une constante M sur $C(1,r)$. Par hypothèse $|\dfrac{w}{h(z)}| < |w|\dfrac{\alpha(r)}{r} < 1$ sur $C(1,r)$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \max_{z\in C(1,r)} |(z-1)h'(z)\frac{w^n}{h^{n+1}(z)}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M(|w|\frac{\alpha(r)}{r})^n < +\infty\,.$$

(4) On peut donc permuter série et intégrale:

$$z(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} (z-1)\frac{h'(z)}{h(z)-w}dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{C(1,r)} (z-1)w^n\frac{h'(z)}{h^{n+1}(z)}dz\,.$$

Lorsque $n = 0$, l'intégrale est nulle car $z \mapsto \dfrac{(z-1)h'(z)}{h(z)} = h'(z)z^a$ est holomorphe sur $D(1,1)$. Si $n > 0$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} \frac{(z-1)h'(z)}{h^{n+1}(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} (z-1)(\frac{h^{-n}}{-n})'dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} \frac{h^{-n}}{n}dz$$

car $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(1,r)} [(z-1)(\frac{h^{-n}}{-n})(z)]'dz = 0$.

Donc

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} \frac{h^{-n}}{n}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} \frac{z^{an}}{n(z-1)^n}dz$$
$$= \frac{1}{n(n-1)!}\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}(z^{an})_{|z=1} = \frac{an(an-1)\dots(an-n+1)}{n!}$$

$(n \geq 1)$.

(5) En utilisant le théorème des résidus comme précédemment, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} g(z)\frac{h'(z)}{h(z)-w}dz = g(z(w))\,.$$

On développe alors

$$g(z)\frac{h'(z)}{h(z)-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} g(z)h'(z)\frac{w^n}{h^{n+1}(z)}$$

avec convergence normale sur $C(1,r)$ car

$$\max_{z\in C(1,r)} |g(z)h'(z)\frac{w^n}{h^{n+1}(z)}| \leq \max_{z\in C(1,r)} |g(z)\frac{h'(z)}{h(z)}|(|w|\frac{\alpha(r)}{r})^n$$

est sommable.

Commutant série et intégrale, on a

$$g(z(w)) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{C(1,r)} g(z)h'(z)\frac{w^n}{h^{n+1}(z)}dz = \sum_{n=1}^{+\infty} w^n \frac{1}{2i\pi}\int_{C(1,r)} \frac{g'(z)}{nh^n(z)}dz,$$

car comme précédement l'intégrale est nulle lorsque $n = 0$.

Donc si $n \geq 1$, $d_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(1,r)} \frac{g'(z)}{nh^n(z)}dz = \frac{1}{n!}(g'(z)z^{na})^{(n-1)}_{|z=1}$.