Université Pierre et Marie Curie  
Licence Sciences et Technologies

Année universitaire 2011/2012  
Unité LM367

## Examen de Février, $2^{\text{ième}}$ session.

**Exercice 1.** (5 points).

(1) Rappeler les inégalités de Cauchy pour une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D(0,R)}$.

(2) Soit $f$ une fonction entière. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq C(1+|z|^n)$. Montrer que $f$ est un polynôme.

**Exercice 2.** (7 points) On se propose de calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\mathrm{ch} x} dx$$

par la méthode des résidus ($t$ est un paramètre réel).

(1) Calculer les pôles, leur ordre de multiplicité et les résidus correspondants de la fonction méromorphe $f(z) = \dfrac{\cos(tz)}{\mathrm{ch} z}$.
On rappelle que $\mathrm{ch}(z) = \cos(iz)$ et que les seuls zéros de $z \mapsto \cos(z)$ dans le plan complexe sont $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le chemin $\gamma_n$ paramètrant le rectangle de sommets $\pm n, \pm n + i\pi$ orienté dans le sens direct. Que vaut $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)dz$ ? (Justifier votre réponse).

(3) Montrer que $\displaystyle\lim_{|m| \to +\infty} \int_{[m, m+i\pi]} f(z)dz = 0$. En déduire la valeur de $I$.

**Exercice 3.** (8 points) Inégalité de Borel-Carathéodory.
Soit $f$ une fonction holomorphe non constante sur un ouvert $U$, voisinage connexe de $\overline{D(0,R)}$.

$$\text{Pour } 0 \leq r \leq R, \text{ on pose } A(r) = \sup_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)\ .$$

(1) Montrer que $A$ est une fonction strictement croissante sur $[0, R]$.

(2) On suppose de plus que $f(0) = 0$. Vérifier que si $r > 0$ alors

$$A(r) > 0, \text{ et } \forall z \in \overline{D(0,r)},\ |2A(r) - f(z)| \geq |f(z)|\ .$$

(3) On suppose encore $f(0) = 0$. On pose $g(z) = \dfrac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$.

Montrer que pour tout $z \in \overline{D(0,R)}$, $|g(z)| \leq \dfrac{|z|}{R}$ . En déduire l'inégalité de Borel-Carathéodory:

$$\forall z \in D(0,R),\ |f(z)| \leq \frac{2|z|}{R - |z|} A(R).$$

(4) Montrer qu'une fonction entière $f$ telle qu'il existe $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ telle que $\mathrm{Re} f(z) \leq C(1+|z|^n)$ est un polynôme.

Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies

Année universitaire 2011/2012
Unité LM367

## Correction de l'examen de Fevrier 2012, $2^{\text{ième}}$ session

**Exercice 1.**

(1) c.f. le cours

(2) Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, le développement en série entière en l'origine. Comme $f$ est entière, il converge sur $\mathbb{C}$. Les inégalités de Cauchy s'écrivent:

$$\forall R>0\,,\ \forall k\in\mathbb{N}\,,\ |a_k|R^k \le \max_{|z|=R}|f(z)| \le C(1+R^n)\,.$$

Si $k>n$, $|a_k| \le \lim_{R\to+\infty} C(1+R^n)R^{-k}=0$. $f$ est donc un polynôme de degré au plus $n$.

**Exercice 2.**

(1) La fonction $z\mapsto \dfrac{\cos(tz)}{chz}$ est un quotient de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont le dénominateur est non identiquement nulle. Elle est donc méromorphe sur $\mathbb{C}$. D'après le rappel, ses pôles sont contenus dans $\{\frac{i\pi}{2}+ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. Ils sont simples car $ch'=sh$ est non nulle sur cet ensemble et $\text{R}\acute{e}s(f,\frac{i\pi}{2}+ik\pi)=\dfrac{\cos(tz)}{\text{sh}(z)}_{|z=\frac{i\pi}{2}+ik\pi} = (-1)^{k+1}i\cos(t(\frac{i\pi}{2}+ik\pi))$.

(2) $\mathbb{C}$ étant simplement connexe, le chemin $\gamma_n$ est homotope à un chemin constant dans $\mathbb{C}$. Comme $Ind(\gamma_n,\frac{i\pi}{2})=1$ et que $\frac{i\pi}{2}$ est le seul pôle d'indice non nul par rapport à $\gamma_n$, le théorème des résidus donne $\int_{\gamma_n} f(z)dz = 2i\pi\text{R}\acute{e}s(f,\frac{i\pi}{2}) = 2\pi ch(t\frac{\pi}{2})$.

(3) On a

$$\int_{[n,\,n+i\pi]} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{\cos(tn+itx)}{ch(n+ix)}idx = \int_0^\pi \frac{e^{itn-tx}+e^{-itn+tx}}{e^{n+ix}+e^{-n-ix}}idx\,.$$

Donc, si $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

$$\left|\int_{[n,\,n+i\pi]} f(z)dz\right| \le \pi\frac{2e^{t\pi}}{e^{|n|}-1}\,.$$

Cette quantité tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$.

(4) Or

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n} f(z)dz &= \int_{[n,\,n+i\pi]} f(z)dz - \int_{[-n+i\pi,\,n+i\pi]} f(z)dz \\ &\quad - \int_{[-n,\,-n+i\pi]} f(z)dz + \int_{[-n,n]} f(z)dz\end{aligned}$$

et

$$\int_{[-n+i\pi,\,n+i\pi]} f(z)dz = \int_{-n}^n f(x+i\pi)dx = \int_{-n}^n \frac{\cos(tx)\cos(ti\pi)-\sin(tx)\sin(ti\pi)}{ch(x)ch(i\pi)+\text{sh}(x)\text{sh}(i\pi)}dx\,.$$

Donc

$$\int_{[-n+i\pi,\,n+i\pi]} f(z)dz = -\int_{-n}^n \frac{\cos(tx)\cos(ti\pi)}{ch(x)}dx$$

car la fonction sin est impaire. La fonction $x\mapsto f(x)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n} f(z)dz &= \lim_{n\to+\infty}(1+\cos(ti\pi))\int_{-n}^n f(x)dx + \\ \lim_{n\to+\infty}\int_{[n,\,n+i\pi]} f(z)dz &- \int_{[-n,\,-n+i\pi]} f(z)dz = (1+ch(t\pi))\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + 0\,.\end{aligned}$$

Donc $I = \dfrac{2\pi ch(t\frac{\pi}{2})}{1 + ch(t\pi)}$.

(5) Les formules de trigonométrie hyperbolique donnent $1 + ch(t\pi) = 2ch^2(t\dfrac{\pi}{2})$. Utilisant la parité de $f$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{chx} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{ch(t\frac{\pi}{2})} .$$

**Exercice 3.**

(1) La fonction $r \mapsto \max\limits_{|z|\leq r} |f(z)|$ est croissante. Le principe du maximum, pour une fonction $f$ holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,R)}$, entraine donc que la fonction $[0,R] \ni r \mapsto \max\limits_{|z|\leq r} |f(z)| = \max\limits_{|z|=r} |f(z)| = M(r)$ est une fonction croissante de $r$. Elle est même strictement croissante si $f$ est non constante (car $M(r_1) = M(r_2)$ avec $r_1 < r_2$ entraine qu'il existe un point $z \in C(0,r_1)$, donc intérieur à $\overline{D(0,r_2)}$, tel que $M(r_1) = |f(z)| \geq M(r_2)$. Donc $z$ est un point de maximum local et $f$ serait constante par le principe du maximum).

On applique ce qui précède à $|e^{f(z)}| = e^{\mathrm{R}e(f(z))}$: La fonction $r \mapsto A(r) = \max\limits_{|z|=r} \mathrm{R}e(f(z)) = \ln \max\limits_{|z|=r} |e^{f(z)}|$ est strictement croissante sauf si $e^f$ est constante. Ceci entrainerait que $f$ est à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$, or $\overline{D(0,R)}$ est connexe donc $f$ est constante. On a montré que $A(r) = \max\limits_{|z|\leq r} Re(f(z))$.

(2) Si $\mathrm{R}e(f(0)) = 0$, on a $0 = A(0) < A(r)$ pour $0 < r$. Si $|z| \leq r$ alors $\mathrm{R}ef(z) \leq A(|z|) \leq A(r)$. Compte tenu de $A(r) \geq 0$, on a

$$|2A(r) - f(z)|^2 = (2A(r) - \mathrm{R}e(f(z)))^2 + \mathrm{I}m(f(z))^2 \geq A(r)^2 + \mathrm{I}m(f(z))^2 \geq |f(z)|^2 .$$

(3) La fonction $g$ est holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,R)}$ et nulle en 0. Elle est, d'après la question précédente, bornée par 1 sur $\overline{D(0,R)}$. Appliquant le lemme de Schwartz (à la fonction auxiliaire $u \mapsto f(u) = g(uR)$ définie au voisinage de $\overline{D(0,1)}$), on obtient l'inégalité $|g(z)| \leq \dfrac{|z|}{R}$. Un calcul algébrique donne l'inégalité de Borel-Carathéodory.