

TABLE DES MATIÈRES

1. Les nombres complexes, algèbre, analyse, géométrie	3
1.1. Une construction de \mathbb{C}	3
1.2. Vocabulaire et notations.....	4
1.3. Le Théorème de d'Alembert-Gauss.....	6
1.4. Nombres complexes et géométrie.....	7
1.5. L'analyse complexe.....	9
1.6. Applications géométriques des conditions de Cauchy-Riemann.....	13
1.7. La sphère de Riemann ; homographies.....	14
1.8. Rappels et compléments sur la connexité.....	17
2. Séries entières, exponentielle, arguments, logarithmes, puissances	21
2.1. Rappels sur les séries de fonctions et les familles sommables.....	21
2.2. Séries entières de la variable complexe z	26
2.3. Définition de l'exponentielle complexe par une série.....	34
2.4. Arguments et Logarithmes d'un nombre complexe.....	38
3. L'intégrale de Cauchy et analyticité des fonctions holomorphes	41
3.1. L'intégrale de Cauchy.....	41
3.2. Conditions pour l'existence d'une primitive.....	44
3.3. La théorie de Cauchy sur un ouvert convexe.....	47
3.4. Les fonctions holomorphes sont analytiques.....	52
4. Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes	55
4.1. Les inégalités de Cauchy.....	55
4.2. Suites de fonctions holomorphes.....	56
4.3. Intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre.....	57
4.4. Le principe du maximum.....	58
4.5. Propriété de la moyenne.....	60
4.6. Singularités isolées.....	60
4.7. Le théorème d'inversion locale.....	62
5. Théorie de Cauchy et homotopie	65
5.1. Homotopie de lacets.....	65

5.2. Les théorèmes de Cauchy : versions homotopiques.....	68
5.3. L'indice d'un point par rapport à un lacet.....	70
6. La formule des résidus.....	75
6.1. Séries et développements de Laurent.....	75
6.2. Développement de Laurent en une singularité isolée.....	78
6.3. La formule des résidus.....	80
6.4. Fonctions méromorphes.....	80
6.5. Application à des calculs classiques d'intégrales.....	83
6.6. Les théorèmes de l'indice.....	85
6.7. Quelques calculs d'intégrales.....	89
7. La théorie de Cauchy via la formule de Green-Riemann.....	93
7.1. Formes différentielles.....	93
7.2. Le théorème de Stokes, la formule de Green Riemann.....	98
7.3. Le théorème de Cauchy pour un compact à bord.....	101
7.4. Une généralisation de la formule de Cauchy.....	104

CHAPITRE 1

LES NOMBRES COMPLEXES, ALGÈBRE, ANALYSE, GÉOMÉTRIE

D'après un cours de Mr Trépreau. ⁽¹⁾

1.1. Une construction de \mathbb{C}

Imaginons un corps commutatif \mathbf{F} tel que le corps \mathbf{R} des nombres réels soit contenu dans \mathbf{F} et soit un sous-corps de \mathbf{F} . Imaginons encore qu'il existe un élément $i \in \mathbf{F}$ tel que $i^2 = -1$. L'ensemble des combinaisons linéaires

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

est un sous-espace vectoriel \mathbb{C} du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{F} . Comme -1 n'est pas un carré dans \mathbf{R} , $i \notin \mathbf{R}$, donc \mathbb{C} est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbf{R} .

En particulier, \mathbb{C} est un sous-groupe du groupe additif \mathbf{F} . D'autre part, les règles de calcul dans un anneau commutatif donnent, pour tout $x, y, x', y' \in \mathbf{R}$:

$$(1) \quad (x + yi)(x' + y'i) = xx' + (xy' + x'y)i + yy'i^2 = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i,$$

un élément de \mathbb{C} : \mathbb{C} est un sous-anneau de \mathbf{F} . On a en particulier :

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \in \mathbf{R}^+.$$

Si $x + yi \neq 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$ et l'inverse de $x + yi$ vaut :

$$(2) \quad \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x - yi)(x + yi)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i,$$

un élément de \mathbb{C} : \mathbb{C} est un sous-corps de \mathbf{F} .

Donc, s'il existe un corps commutatif \mathbf{F} qui a les propriétés requises, il en existe un, \mathbb{C} , qui est de dimension 2 sur \mathbf{R} . Mieux, si un tel corps existe, la loi produit sur \mathbb{C} est donnée par (1) et l'inverse d'un élément non nul de \mathbb{C} par (2). L'existence d'un corps tel que \mathbb{C} est maintenant une question de vérifications.

On laisse au lecteur le soin de construire un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbf{R} , qui contienne \mathbf{R} comme sous-espace.

1. <http://www.licence.math.upmc.fr/UE/LM366/>

Définition 1.1.1. — \mathbb{C} est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} , qui contient \mathbb{R} comme sous-espace, et est muni d'un élément distingué $i \notin \mathbb{R}$ et de la loi de composition interne (produit, ou multiplication) définie par :

$$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i,$$

pour tout $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.2. — $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif; \mathbb{R} est un sous-corps de \mathbb{C} ; -1 a exactement deux racines carrées dans \mathbb{C} , i et $-i$. On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Démonstration. — Le lecteur vérifiera que la loi produit est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition, que 1 est élément neutre et que

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

est (un, donc) l'inverse de $x + yi$, si $x, y \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous les deux nuls. \square

L'existence d'un corps tel que \mathbb{C} n'a rien de banal. On peut montrer (noter que si K est un sous-corps commutatif d'un corps L , L est naturellement un espace vectoriel sur K) le résultat suivant :

Théorème 1.1.3. — Soit K un corps commutatif. On suppose que \mathbb{R} est un sous-corps de K et que K est de dimension finie n sur \mathbb{R} . Alors, ou bien $n = 1$ et $K = \mathbb{R}$, ou bien $n = 2$ et K est isomorphe à \mathbb{C} .

Si l'on supprime la condition que le corps K soit commutatif, il existe un dernier exemple : le corps des quaternions, qui est de dimension 4 sur son sous-corps \mathbb{R} .

1.2. Vocabulaire et notations

Un élément $z \in \mathbb{C}$ s'appelle un *nombre complexe*. Sa décomposition

$$z = x + yi \quad \text{ou} \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

dans la base canonique $\{1, i\}$ est l'écriture de z sous forme canonique; x est la partie réelle, y la partie imaginaire de z . On note :

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Le conjugué de z est défini par :

$$\bar{z} = x - iy.$$

On a donc les formules :

$$z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z, \quad \bar{z} = \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z; \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

On dit que z est *imaginaire pur* si $\operatorname{Re} z = 0$. Quand on écrira $x + iy$, il sera sous-entendu que x et y sont réels.

Théorème 1.2.1. — La conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme du corps \mathbb{C} . C'est une involution. Elle induit l'identité sur \mathbb{R} .

Démonstration. — Simples vérifications. \square

Réciproquement, si un automorphisme u du corps \mathbb{C} induit l'identité sur \mathbb{R} :

$$u(x + iy) = u(x) + u(i)u(y) = x + u(i)y,$$

avec $u(i)^2 = u(i^2) = -1$ et donc :

$$u(i)^2 + 1 = u(i)^2 - i^2 = (u(i) - i)(u(i) + i) = 0.$$

Ceci montre que $u(i) \in \{-i, +i\}$, donc que u est l'identité ou la conjugaison.

Le produit $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ est un réel positif. Le *module* de $z \in \mathbb{C}$ est le nombre réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

On se souviendra que si $z \neq 0$, la formule

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

donne l'écriture de $1/z$ sous forme canonique. On vérifie qu'on a :

Théorème 1.2.2. — *L'application module $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , qui induit la valeur absolue sur \mathbb{R} . Elle est multiplicative : $|zz'| = |z||z'|$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$.*

Soit $x + iy$ un nombre complexe de module 1. On a :

$$(3) \quad x^2 + y^2 = 1.$$

La trigonométrie nous apprend que, si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient l'équation (3), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$(4) \quad x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

et que si $t \in \mathbb{R}$ est une solution de (4), la solution générale est $t + k2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. On note :

$$(5) \quad t \in \mathbb{R}, \quad e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

La notation est justifiée par la *formule de Moivre* :

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \quad e^{it} e^{it'} = e^{i(t+t')},$$

qui est une conséquence des formules de trigonométrie très classiques :

$$\cos(t + t') = \cos t \cos t' - \sin t \sin t', \quad \sin(t + t') = \sin t \cos t' + \cos t \sin t'.$$

Plus généralement, si z est un nombre complexe *non nul*, $z/|z|$ est un nombre complexe de module 1, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z| \frac{z}{|z|} = |z|(\cos t + i \sin t) = |z|e^{it}.$$

Le nombre t est appelé *un argument* de z et l'écriture ci-dessus une écriture de z *sous forme trigonométrique* ; 0 n'a pas d'argument. Par exemple,

$$-1 = e^{i\pi}, \quad i = e^{i\pi/2}$$

sont des écritures de -1 et de i sous forme trigonométrique.

Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments, qui diffèrent d'un multiple de 2π . Il est d'usage de noter $\arg z$ l'un quelconque des arguments de $z \in \mathbb{C}^*$, mais *il est très important de se souvenir que \arg n'est pas une fonction!* On écrira sans danger, pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

$$\arg zz' \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}, \quad \arg z/z' \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}.$$

Ce sont deux formules fondamentales pour l'application des nombres complexes à la géométrie.

1.3. Le Théorème de d'Alembert-Gauss

Le théorème suivant est l'un des théorèmes les plus importants de toutes les mathématiques classiques (dans les manuels de langue anglaise, on l'appelle le *théorème fondamental de l'algèbre*).

Théorème 1.3.1 (d'Alembert-Gauss). — *Le corps \mathbb{C} est algébriquement clos.*

Cela signifie que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré ≥ 1 possède une racine.

Ce théorème a les conséquences suivantes, qu'il faut connaître et savoir démontrer ⁽²⁾ :

1. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré $n \geq 0$ a exactement n racines, compte tenu de leurs multiplicités. Il s'écrit $P(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$ et l'écriture est unique à l'ordre près des facteurs.
2. Une fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$ est combinaison linéaire de monômes z^p et d'éléments simples de première espèce $1/(z - a)^p$ ($a \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$).
3. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré $n \geq 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ si et seulement si $n = 1$, ou que $n = 2$ et que P n'a pas de zéro réel.

Le dernier énoncé est « purement réel ». Il en existe des démonstrations (je ne les connais pas) qui n'utilisent pas les nombres complexes, mais elles sont très complexes ! C'est un exemple d'une application de « l'algèbre complexe » à « l'algèbre réelle ». On verra que « l'analyse complexe » a des applications à « l'analyse réelle ».

Le Théorème 1.3.1 va être une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.3.2. — *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ et $a \in \mathbb{C}$. Si $z \mapsto |P(z)|$ a un minimum local en $z = a$, ou bien P est constant, ou bien $P(a) = 0$.*

Cet énoncé n'a pas d'analogue sur \mathbb{R} : le polynôme $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 + 1$ a un minimum non nul en $x = 0$. Comme l'affirme le lemme, la fonction $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = |z^2 + 1|$ n'en a pas : on a $f(iy) = |1 - y^2| < f(0)$ si $-1 < y < 1$.

Démonstration. — On suppose $P(a) \neq 0$ et que P n'est pas constant. On considère le comportement de $P(a + re^{i\theta})$ quand $r \rightarrow 0^+$, pour θ bien choisi. Par hypothèse, il existe un entier $p \geq 1$ et $u \neq 0$ tel qu'on ait ⁽³⁾ :

$$\frac{P(a + h)}{P(a)} = 1 + uh^p + |h|^p \epsilon(h).$$

Soit $u = |u|e^{i\theta_0}$ (forme trigonométrique). On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\frac{P(a + re^{i\theta})}{P(a)} = 1 + |u|r^p e^{i(p\theta + \theta_0)} + r^p \epsilon(r).$$

2. C'est le moment de réviser vos connaissances sur les polynômes et les fractions rationnelles à coefficient dans un corps commutatif, en particulier \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

3. On note $\epsilon(\cdot)$ toute fonction définie au voisinage épointé de 0 (dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} selon le contexte) et qui tend vers 0 avec son argument *i.e.* pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que $0 < |h| < \rho \Rightarrow |\epsilon(h)| < \epsilon$.

On choisit $\theta = \pi/p - \theta_0/p$, pour obtenir :

$$\frac{P(a + re^{i\theta})}{P(a)} = 1 - |u|r^p + r^p\epsilon(r),$$

et donc

$$\left| \frac{P(a + re^{i\theta})}{P(a)} \right| \leq 1 - |u|r^p + r^p\epsilon(r) < 1$$

si $r > 0$ est assez petit. D'où le lemme. □

Démonstration du Théorème de d'Alembert-Gauss. — Soit

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

un polynôme de degré $n \geq 1$. Posons :

$$m = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| \in [0, +\infty[.$$

Lorsque $|z|$ est suffisamment grand, on a :

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k/a_n||z|^{k-n} \right|.$$

Il existe $R > 0$ tel que le deuxième facteur soit $\geq 1/2$ si $|z| \geq R$; alors $|P(z)| \geq |a_n|R^n/2$. En choisissant R encore plus grand, on obtient :

$$|z| \geq R \Rightarrow |P(z)| > m,$$

donc

$$m = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|.$$

La fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue sur le disque $\{|z| \leq R\}$ fermé et borné dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, donc compact. Par théorème, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ atteint son infimum m en un point $a \in \overline{D}(0, R)$. D'après le lemme précédent, $m = 0$, donc a est une racine de P .

1.4. Nombres complexes et géométrie

En tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{R} , \mathbb{C} est canoniquement isomorphe à \mathbb{R}^2 via :

$$(6) \quad (x, y) \mapsto x + iy.$$

Dans cet isomorphisme, $|x + iy| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ correspond à la norme euclidienne usuelle de \mathbb{R}^2 . L'écriture $z = re^{it}$ correspond à l'écriture d'un vecteur en coordonnées polaires :

$$(x, y) = (r \cos t, r \sin t).$$

Comme les éléments de \mathbb{R}^2 , les nombres complexes ont une double interprétation géométrique, comme vecteurs ou comme points.

1.4.1. Le \mathbf{R} -plan vectoriel euclidien \mathbb{C} . — Dans ce paragraphe, on voit \mathbb{C} comme un espace vectoriel euclidien de dimension 2 sur \mathbf{R} . La base canonique $\{1, i\}$ définit un isomorphisme entre \mathbb{C} et \mathbf{R}^2 : $1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $i \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La base duale de $\{1, i\}$ est donnée par les formes \mathbf{R} -linéaires $z \mapsto \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $z \mapsto \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Théorème 1.4.1. — Soit $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbf{R} -linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u est \mathbb{C} -linéaire,
2. $u(i) = iu(1)$,
3. La matrice de u dans la base canonique est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
4. ou bien $u = 0$, ou bien u est une similitude vectorielle directe.

Démonstration. — Une application \mathbb{C} -linéaire $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est de la forme :

$$u(z) = \lambda z,$$

où $\lambda = u(1) \in \mathbb{C}$. Cette application \mathbb{C} -linéaire est a fortiori \mathbf{R} -linéaire. Si $\lambda = a + ib$, avec $a, b \in \mathbf{R}$, alors la matrice dans la base $\{1, i\}$ de $z = x + yi \mapsto \lambda \cdot z = (ax - by) + (bx + ay)i$ est

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si $u(1) \neq 0$, on écrit $u(1) = re^{it}$ (forme trigonométrique) et la matrice de u dans la base canonique $\{1, i\}$ est :

$$\begin{pmatrix} r \cos t & -r \sin t \\ r \sin t & r \cos t \end{pmatrix}$$

C'est la matrice d'une similitude vectorielle directe, le produit commutatif de l'homothétie vectorielle de rapport r et de la rotation d'angle t . Le déterminant de la matrice est strictement positif : on dit que u conserve l'orientation. Une telle transformation ne conserve pas la norme (mais elle conserve les proportions) ; elle conserve les angles orientés de vecteurs.

Réciproquement, soit $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbf{R} -linéaire de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. On a :

$$u(x + iy) = xu(1) + yu(i) \text{ pour tout } x, y \in \mathbf{R}.$$

Cette application est \mathbb{C} -linéaire si et seulement si elle est de la forme multiplication par le nombre complexe $u(1)$:

$$u(x + iy) = (x + iy)u(1) = xu(1) + yiu(1) \text{ pour tout } x, y \in \mathbf{R},$$

donc si et seulement si $u(i) = iu(1)$, si et seulement si $a = d$ et $b = -c$. □

1.4.2. \mathbb{C} et la géométrie plane. — Enfin, on voit \mathbb{C} comme plan de la géométrie plane élémentaire, ou géométrie affine euclidienne plane. La distance entre deux points $z, z' \in \mathbb{C}$ est donnée par :

$$d(z, z') = |z - z'|.$$

Soit $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ et considérons l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$(7) \quad T(z) = az + b.$$

On vérifie que l'ensemble des transformations de la forme (7) est un sous-groupe du groupe des bijections de \mathbb{C} .

Si $a = 1$, T est la translation de vecteur b . Si $b = 0$, on obtient l'interprétation géométrique de T en écrivant $a = ke^{i\phi}$, $z = re^{it}$ (forme trigonométrique). On a :

$$T(z) = kre^{i(t+\phi)};$$

T est la similitude (directe) de centre 0, de rapport $k = |a|$ et d'angle ϕ , un argument de a .

Dans le cas général on résout l'équation aux points fixes :

$$T(z) = z.$$

Si $a \neq 1$, elle a une seule solution $z_0 = b/(1 - a)$, qui est donc le seul point fixe de T ; on obtient :

$$T(z) - z_0 = a(z - z_0);$$

T est la similitude de centre z_0 , de rapport $|a|$ et d'angle un argument de a .

Rappelons qu'en géométrie on appelle *similitude directe toute bijection du plan qui est soit une translation, soit une similitude directe à centre*. On a donc :

Théorème 1.4.2. — *Le groupe des transformations $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto T(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$, s'identifie au groupe des similitudes directes du plan. Si $a \neq 1$, T est une similitude à centre, sinon T est une translation.*

1.5. L'analyse complexe

L'analyse complexe commence avec la définition suivante :

Définition 1.5.1. — Soit Ω un voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -dérivable en $a \in \Omega$ si le quotient :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a une limite $\in \mathbb{C}$ quand $h \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0. Dans ce cas, on dit que cette limite est la \mathbb{C} -dérivée de f en a et on la note $f'(a)$.

Autrement dit, f est \mathbb{C} -dérivable en a de \mathbb{C} -dérivée $f'(a)$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho > 0$, tel que

$$0 < |h| < \rho \Rightarrow \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon.$$

Si $h = re^{it}$ la condition porte sur $|h| = r$. De façon analogue au cas des fonctions d'une variable réelle, il revient au même de dire que f a un développement limité de la forme :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|\epsilon(h)$$

où $\epsilon(\cdot)$ est une fonction définie au voisinage de 0 dans \mathbb{C} et $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

Exemple 1.5.2. —

1) $f : z \mapsto z$ est \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ car $\frac{(z_0+h) - z_0}{h} = 1$. De plus $f'(z_0) = 1$.

2) $f : z \mapsto z^2$ est \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ car $\frac{(z_0+h)^2 - z_0^2}{h} = 2z_0 + h$. De plus $f'(z_0) = 2z_0$.

3) $f : z \mapsto \bar{z}$ n'est pas \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ car $\frac{\overline{z_0+h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0. En effet si une fonction g définie sur un voisinage épointé $D(0, r) \setminus \{0\}$ admet une limite a en 0, on doit avoir $\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{C}^*} g(h) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}^*} g(te^{i\theta})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. C'est à dire que si une limite pour h complexe tendant vers 0 existe, alors la limite suivant une droite affine passant par 0 doit exister et être égale à a . Dans notre cas $g(te^{i\theta}) = e^{-2i\theta}$ dépend de la direction d'approche.

1.5.1. Rappels. — Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable (ou différentiable) en a au sens de l'analyse réelle s'il existe une application \mathbb{R} -linéaire

$$T_a f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

(on réserve la notation usuelle $f'(a)$ à la \mathbb{C} -dérivée, si elle existe) telle qu'on ait :

$$f(a+h) = f(a) + T_a f(h) + |h|\epsilon(h),$$

où $\epsilon(\cdot)$ est une fonction définie au voisinage de 0 et $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. L'application linéaire $T_a f$ s'appelle la dérivée, ou la différentielle, ou encore l'application linéaire tangente de f au point a .

Théorème 1.5.3. — Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est \mathbb{C} -dérivable en a ,
2. f est dérivable en a et sa différentielle $T_a f$ est \mathbb{C} -linéaire.

Dans ce cas, $T_a f$ est l'application $h \mapsto f'(a)h$.

Démonstration. — Il est clair que si f est \mathbb{C} -dérivable en a , elle est dérivable en a de dérivée :

$$h \mapsto T_a f(h) = f'(a)h,$$

qui est une application \mathbb{C} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Réciproquement, si $T_a f$ est \mathbb{C} -linéaire, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $T_a f(h) \equiv ch$ donc f est \mathbb{C} -dérivable en a et $f'(a) = c$. \square

L'isomorphisme entre \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 définie par la base canonique permet, comme pour le cas des applications linéaires, d'interpréter la \mathbb{C} -dérivabilité de f en terme de ses dérivées partielles et de la matrice jacobienne de f dans cette base. À une fonction f d'une partie Ω de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , on associe une fonction F de deux variables réelles (x, y) , et à valeurs dans \mathbb{C} , définie par $F(x, y) = f(x + iy)$. On notera P sa partie réelle et Q sa partie imaginaire. Les dérivées

partielles, en $a = x_a + iy_a$, de la fonction f par rapport aux variables réelles x et y seront définies, si elles existent, par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_a, y_a) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_a, y_a) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_a, y_a) = \lim_{t \text{ réel}, t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x_a, y_a) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_a, y_a) + i \frac{\partial Q}{\partial y}(x_a, y_a) = \lim_{t \text{ réel}, t \rightarrow 0} \frac{f(a+it) - f(a)}{t}.\end{aligned}$$

La matrice jacobienne de f au point a dans la base $\{1, i\}$ est donc

$$\text{Mat}_{\{1, i\}} T_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_a, y_a) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_a, y_a) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_a, y_a) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_a, y_a) \end{pmatrix}.$$

Si f est dérivable en a , en notant $h = k + il$ (forme canonique), on a :

$$\begin{aligned}T_a f(k + il) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)k + \frac{\partial f}{\partial y}(a)l \\ T_a f(h) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \bar{h},\end{aligned}$$

car $k = (h + \bar{h})/2$, $l = (h - \bar{h})/2i$. Notons que l'application $T_a f$ est \mathbb{C} -linéaire si et seulement si le coefficient de \bar{h} est nul.

Définition 1.5.4. — Soit Ω un voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Si la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable (au sens réel) en a , on pose :

$$(8) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right).$$

Théorème 1.5.5. — Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est \mathbb{C} -dérivable en a ,
2. f est dérivable en a et sa différentielle $T_a f$ est \mathbb{C} -linéaire.
3. f est dérivable en a et vérifie l'équation, dite de Cauchy-Riemann :

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

4. f est dérivable en a et vérifie les équations, dites de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_a, y_a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_a, y_a) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_a, y_a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_a, y_a). \end{cases}$$

De plus, si f est \mathbb{C} -dérivable en a , on a les relations :

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Démonstration. — Supposons que f est dérivable en a . Alors $T_a f(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $T_a f(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, de sorte que f est \mathbb{C} -dérivable en a ssi $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Ceci équivaut encore au fait que la jacobienne de f dans la base canonique est du type multiplication par le nombre complexe $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. On obtient ainsi les conditions (réelles) de Cauchy-Riemann, équivalentes, lorsque f est dérivable, à ce qu'elle soit \mathbb{C} -dérivable en a :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_a, y_a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_a, y_a) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_a, y_a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_a, y_a). \end{cases}$$

□

Définition 1.5.6. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est *holomorphe* si elle est \mathbb{C} -dérivable en tout point de Ω . On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Les propriétés suivantes se démontrent comme leurs analogues en analyse réelle. On laisse au lecteur le soin de les démontrer.

1. La restriction d'une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ à un ouvert $\omega \subset \Omega$ est holomorphe sur ω .
2. Une fonction holomorphe est continue.
3. Si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a, b \in \mathbb{C}$, alors $(af + bg)$ et fg sont holomorphes et $(af + bg)' = af' + bg'$ et $(fg)' = fg' + f'g$. De plus, tant que g ne s'annule pas, $\frac{1}{g}$ est holomorphe et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
4. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ (respectivement une fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$) est holomorphe sur \mathbb{C} (respectivement sur le complémentaire de l'ensemble de ses pôles) et sa dérivée est donnée par la formule usuelle.
5. $\mathcal{O}(\Omega)$ est une sous-algèbre de l'algèbre, qu'on notera $C^0(\Omega)$, des fonctions continues à valeurs complexes sur Ω .
6. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, si $g \in \mathcal{O}(\Omega')$ et si $f(\Omega) \subset \Omega'$, $g \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Lemme 1.5.7. — Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} . Soient $a, b \in U$ tels que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U . On a alors l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{p \in]a, b[} |f'(p)|.$$

Démonstration. — On se ramène à une fonction réelle de la variable réelle :

la fonction continue $[0, 1] \ni t \mapsto g(t) = \operatorname{Re}[f(a + t(b - a)) - f(a)]$ est dérivable sur $]0, 1[$ comme composée de fonctions différentiables et

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\operatorname{Re}f(a + t(b - a)) - \operatorname{Re}f(a + t_0(b - a))}{t - t_0} \\ &= \operatorname{Re} \left((b - a) \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(a + t(b - a)) - f(a + t_0(b - a))}{(t - t_0)(b - a)} \right) = \operatorname{Re}((b - a)f'(a + t_0(b - a))) \end{aligned}$$

car $z \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ est une fonction continue de \mathbb{C} dans \mathbb{R} . Donc $|g'(t_0)| \leq |(b-a)f'(a+t_0(b-a))|$. L'inégalité des accroissements finis pour la fonction g entraîne donc

$$|\operatorname{Re}(f(b) - f(a))| \leq |b-a| \sup_{p \in]a,b[} |f'(p)|.$$

Cette inégalité est vraie pour toute fonction holomorphe définie au voisinage du segment $[a, b]$. Choisissons $\theta \in [0, 2\pi[$ telle que $e^{i\theta}(f(b) - f(a))$ soit réel, et appliquons cette inégalité à la fonction holomorphe $e^{i\theta}f$. On obtient

$$|f(b) - f(a)| = |e^{i\theta}(f(b) - f(a))| = |\operatorname{Re}(e^{i\theta}f(b) - e^{i\theta}f(a))| \leq |b-a| \sup_{p \in]a,b[} |e^{i\theta}f'(p)|.$$

□

Remarque 1.5.8. — On montrera dans le cours qu'une fonction holomorphe est infiniment dérivable de sorte que $\sup_{p \in]a,b[} |f'(p)| = \max_{p \in [a,b]} |f'(p)|$ est fini.

Proposition 1.5.9. — Si Ω est connexe, toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f' = 0$ est constante.

La notion d'ouvert connexe est rappelée dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

Démonstration. — Fixons arbitrairement un point $p_0 \in \Omega$ et montrons que $f^{-1}(\{f(p_0)\}) = \Omega$:

- 1) $f^{-1}(\{f(p_0)\})$ est non vide.
- 2) f étant continue sur Ω , $f^{-1}(\{f(p_0)\})$ est fermé dans Ω .
- 3) Montrons que cet ensemble est ouvert dans Ω : Si $p \in f^{-1}(\{f(p_0)\})$, comme Ω est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(p, \epsilon) \subset \Omega$. $\forall p' \in D(p, \epsilon)$, $[p, p'] \subset \Omega$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis : $\forall p' \in D(p, \epsilon)$, $|f(p') - f(p)| \leq |p' - p| \cdot 0 = 0$ par hypothèse. Donc $D(p, \epsilon) \subset f^{-1}(\{f(p_0)\})$ et cet ensemble est voisinage de chacun de ces points.

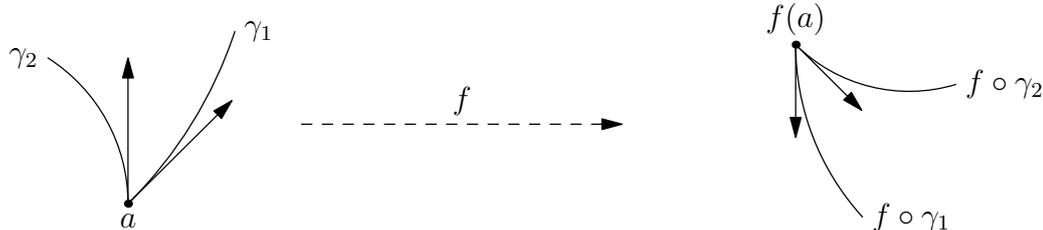
L'ensemble $f^{-1}(\{f(p_0)\})$, non vide, ouvert et fermé dans Ω connexe, est donc égale à Ω . □

L'étude des fonctions holomorphes est l'objet de ce cours.

1.6. Applications géométriques des conditions de Cauchy-Riemann

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a \in \Omega$; supposons que $f'(a) \neq 0$. Considérons deux courbes paramétrées $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \Omega$, différentiables, telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ et $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$. Si α_1 est un argument de $\gamma_1'(0)$ et α_2 est un argument de $\gamma_2'(0)$, alors $\alpha_2 - \alpha_1$ est l'angle orienté, défini à un multiple de 2π près, des tangentes orientées de γ_1 et γ_2 en a ; notons-le ici $\operatorname{angle}(\gamma_1, \gamma_2)$ (ceci n'étant défini qu'à un multiple de 2π près, cette notation est à employer avec la même précaution que celle de l'argument). De même, notons $\operatorname{angle}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)$ l'angle orienté des tangentes orientées de $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ en $f(a)$. La formule de dérivation des fonctions composées donne : $(f \circ \gamma_1)'(0) = f'(a) \cdot \gamma_1'(0)$ et $(f \circ \gamma_2)'(0) = f'(a) \cdot \gamma_2'(0)$. Si α est un argument de $f'(a)$, alors $\alpha_1 + \alpha$ et $\alpha_2 + \alpha$ sont des arguments respectifs de $(f \circ \gamma_1)'(0)$ et $(f \circ \gamma_2)'(0)$. Donc $\operatorname{angle}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)$ vaut $\alpha_2 + \alpha - (\alpha_1 + \alpha)$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{angle}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) \equiv \operatorname{angle}(\gamma_1, \gamma_2) \text{ modulo } 2\pi.$$



Autrement dit, une application holomorphe préserve les angles, tant que sa dérivée est non nulle.

1.7. La sphère de Riemann ; homographies

Soit ∞ un élément qui n'appartient pas à \mathbb{C} . On définit l'ensemble

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

réunion disjointe de \mathbb{C} et de ∞ ; $\hat{\mathbb{C}}$ (muni de structures qui seront introduites peu à peu) est appelé *la sphère de Riemann*. On appelle ∞ le point à l'infini de $\hat{\mathbb{C}}$, ou par abus de langage *le point à l'infini de \mathbb{C}* : mais ce n'est pas un point de \mathbb{C} !

On étend *partiellement* les opérations de \mathbb{C} à $\hat{\mathbb{C}}$ en posant $a + \infty = \infty + a = \infty$ si $a \neq \infty$, $a \times \infty = \infty \times a = \infty$ si $a \neq 0$, $a/\infty = 0$ si $a \neq \infty$ et $a/0 = \infty$ si $a \neq 0$.

Si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, on étend le domaine de définition de l'homographie

$$(10) \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

en posant :

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \in \hat{\mathbb{C}}, \quad T(-\frac{d}{c}) = \infty.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.7.1. — Une homographie est une application bijective de $\hat{\mathbb{C}}$ et l'application réciproque est une homographie. L'ensemble des homographies est un sous-groupe du groupe des bijections de $\hat{\mathbb{C}}$, le groupe des homographies. On le note $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

Démonstration. — Les vérifications sont laissées au lecteur. □

Exemple 1.7.2. — Les similitudes $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$, sont les homographies qui conservent le point à l'infini. On fera attention au fait qu'une similitude considérée comme transformation de \mathbb{C} a un point fixe si c'est une similitude à centre et n'en a pas si c'est une translation. Considérée comme transformation de $\hat{\mathbb{C}}$, elle a toujours le point fixe ∞ .

Si, dans (10), on a $c \neq 0$, T n'est pas une similitude, mais on peut écrire :

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d},$$

et donc $T = T_1 \circ T_0 \circ T_2$, où T_2 est la similitude $T_2(z) = cz + d$, T_0 l'involution $T_0(z) = 1/z$ et T_1 la similitude $T_1(z) = a/c + (bc - ad)z/c$.

Lemme 1.7.3. — Le groupe des homographies est engendré par les similitudes et l'involution $z \mapsto T_0(z) = 1/z$.

Remarque 1.7.4. — L'homographie (10) est inchangée si l'on remplace le 4-uplet (a, b, c, d) par un 4-uplet proportionnel (ka, kb, kc, kd) , $k \in \mathbb{C}^*$. On dit que la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice de T . On vérifie facilement que si M et N sont des matrices de S et $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ respectivement, MN est une matrice de $S \circ T$, et M^{-1} une matrice de S^{-1} .

Selon que $c = 0$, ou $a = 0$, ou que a et c sont tous les deux non nuls, en mettant a et/ou c en facteur au numérateur et au dénominateur de (10), on obtient que toute homographie peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$(a) \quad T(z) = k(z - z_2), \quad (b) \quad T(z) = k \frac{1}{z - z_1}, \quad (c) \quad T(z) = k \frac{z - z_2}{z - z_1},$$

où $k \in \mathbb{C}^*$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dans le cas (a), $T(\infty) = \infty$ et $T(z_2) = 0$; dans le cas (b), $T(z_1) = \infty$ et $T(\infty) = 0$; dans le cas (c), $T(z_1) = \infty$, $T(z_2) = 0$ et $T(\infty) = k$.

Théorème 1.7.5. — Soit $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ trois points distincts. Il existe une et une seule homographie T telle que $T(z_1) = \infty$, $T(z_2) = 0$ et $T(z_3) = 1$.

Démonstration. — On prouve d'abord l'unicité. Si deux homographies S et T envoient le 3-uplet (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$, $S \circ T^{-1} = R$ conserve $(\infty, 0, 1)$. Comme $R(\infty) = \infty$, R est de la forme (a); $R(0) = 0$ donne $z_2 = 0$ et $R(1) = 1$ donne $k = 1$. Donc R est l'identité et $S = T$.

Pour l'existence, on suppose d'abord $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On utilise la forme (c); la condition $T(z_3) = 1$ donne la valeur de k . On obtient :

$$(11) \quad T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Si $z_1 = \infty$, on utilise (a), et si $z_2 = \infty$, on utilise (b). On obtient facilement la valeur de k . \square

Définition 1.7.6. — Soit z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points de $\hat{\mathbb{C}}$, tels que z_1, z_2 et z_3 sont distincts. On appelle *birapport* de ces points pris dans cet ordre et on note

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \hat{\mathbb{C}}$$

l'image de z_4 par l'unique homographie qui envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$.

Compte tenu des calculs précédents, on a donc :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

si $\infty \notin \{z_1, z_2, z_3\}$. Si $z_1 = \infty$, respectivement $z_2 = \infty$, $z_3 = \infty$, on obtient respectivement (on retrouve ces formules en faisant tendre la variable adéquate vers l'infini dans la formule précédente) :

$$\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}, \quad \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}, \quad \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

Quand on écrira un birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ il sera sous-entendu que les trois premiers points sont distincts. Par définition même du birapport, on a :

$$[\infty, 0, 1, z] \equiv z \text{ pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Théorème 1.7.7. — Soit (z_1, z_2, z_3, z_4) et (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) deux 4-uplets de points de $\hat{\mathbb{C}}$, les trois premiers éléments de chacun d'eux étant distincts. Il existe une homographie T telle que $T(z_k) = z'_k$, $k = 1, \dots, 4$, si et seulement si

$$(12) \quad [z_1, z_2, z_3, z_4] = [z'_1, z'_2, z'_3, z'_4].$$

Démonstration. — Soit S (respectivement S') l'homographie qui envoie (z_1, z_2, z_3) (respectivement (z'_1, z'_2, z'_3)) sur $(\infty, 0, 1)$. L'égalité (12) signifie $S(z_4) = S'(z'_4)$. Si elle est vérifiée, $T = S'^{-1} \circ S$ envoie z_k sur z'_k , $k = 1, \dots, 4$.

Réciproquement, si T existe comme dans l'énoncé, $S' \circ T \circ S^{-1}$ conserve $(\infty, 0, 1)$; c'est donc l'identité et $S'(z'_4) = S' \circ T(z_4) = S(z_4)$. \square

En particulier :

Corollaire 1.7.8. — Les homographies conservent le birapport.

La propriété géométrique la plus intéressante des homographies est leur action sur les cercles et les droites.

Définition 1.7.9. — Un cercle de \mathbb{C} , ou la réunion d'une droite de \mathbb{C} et du point à l'infini est appelé un *quasi-cercle*⁽⁴⁾.

Théorème 1.7.10. — L'image d'un quasi-cercle par une homographie est un quasi-cercle.

Démonstration. — Une similitude $T(z) = az + b$ transforme un cercle en un cercle et une droite en une droite. C'est une propriété géométrique bien connue (donnez-en une démonstration analytique!). Compte tenu du Lemme 1.7.3, il suffit de montrer que l'image d'un quasi-cercle par l'involution $T_0(z) = 1/z$ est un quasi-cercle.

Une droite de \mathbb{C} a une équation de la forme :

$$az + \bar{a}\bar{z} + \rho = 0, \quad a \in \mathbb{C}^*, \rho \in \mathbb{R}.$$

Un cercle de \mathbb{C} a une équation de la forme :

$$0 = |z - a|^2 - r^2 = (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) - r^2 = |z|^2 - (a\bar{z} + \bar{a}z) + |a|^2 - r^2$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. L'intersection d'un quasi-cercle C avec \mathbb{C} a donc une équation de la forme :

$$(13) \quad k|z|^2 + a\bar{z} + \bar{a}z + l = 0,$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et $k, l \in \mathbb{R}$. C est une droite si et seulement si $a \neq 0$ et $k = 0$; C est un cercle si et seulement si $k \neq 0$ et $kl < |a|^2$.

Hormis peut-être pour les points $0 = T_0(\infty)$ et $\infty = T_0(0)$, on obtient l'équation de $T_0(C)$ en substituant $T_0^{-1}(w) = 1/w$ à z dans l'équation (13). On obtient

$$k/|w|^2 + a/\bar{w} + \bar{a}/w + l = 0,$$

ou encore :

$$k + aw + \bar{a}\bar{w} + l|w|^2 = 0,$$

4. Cette terminologie n'est pas standard; « cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ » serait mieux; je veux seulement éviter toute confusion. Dans ce cours, un cercle est un cercle.

l'équation de l'intersection avec C d'un quasi-cercle C' . En considérant à part les cas de $0 = T_0(\infty)$ et $\infty = T_0(0)$, on vérifie que $T_0(C) = C'$. \square

On peut remarquer que si D est une droite, $T_0(D \cup \infty)$ est la réunion d'une droite et de ∞ si $0 \in D$ et un cercle sinon. Dans le dernier cas, l'un des points du cercle est l'image de ∞ . Par exemple, l'image de la droite D de \mathbb{C} d'équation $\operatorname{Re} z = 1$ par T_0 est le cercle qui passe par 0 et est tangent en 1 à D , *sauf le point 0*.

1.8. Rappels et compléments sur la connexité

La notion de connexité est utile pour établir des résultats d'unicité (*e.g.* une fonction différentiable sur un ouvert connexe, de différentielle nulle, est constante), pour passer d'information locale à une information globale (un ouvert connexe de \mathbb{R}^n est localement connexe par arc donc connexe par arc). Il est assez délicat d'établir la connexité d'un espace topologique. C'est pourquoi la notion de composante connexe d'un point dans un espace topologique est importante.

Dans les rappels qui suivent, X (ou X' ...) désigne un espace topologique; on pourra supposer sans inconvénient que X est un espace métrique, muni de la topologie associée. Si Y est une partie de X , Y est muni de la topologie induite.

Définition 1.8.1. — X est *connexe* si les seules parties de X qui sont ouvertes dans X et fermées dans X sont X et \emptyset .

Lemme 1.8.2. — X est connexe si et seulement si, pour toute partition $X = X' \sqcup X''$ par des ouverts de X , X' ou X'' est vide.

Démonstration. — Si $X = X' \sqcup X''$ est une partition par des ouverts de X , $X' = X \setminus X''$ et $X'' = X \setminus X'$ sont aussi des fermés de X ... \square

Lemme 1.8.3. — Si Y_i est une partie connexe de X pour tout $i \in I$ et si $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$, $\bigcup_{i \in I} Y_i$ est connexe.

Démonstration. — Soit $a \in \bigcap_{i \in I} Y_i$ et $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$. Si $Y = Y' \sqcup Y''$ est une partition par des ouverts de Y , par exemple $a \in Y'$. Pour chaque $i \in I$, $Y_i = (Y' \cap Y_i) \sqcup (Y'' \cap Y_i)$ est une partition par des ouverts de Y_i ; comme $Y' \cap Y_i \ni a$ est non vide et que Y_i est connexe, $Y'' \cap Y_i$ est vide. Comme c'est vrai pour tout $i \in I$, Y'' est vide. \square

On en déduit la notion de composante connexe :

Définition 1.8.4. — Soit $a \in X$. La réunion des connexes $Y \subset X$ tels que $a \in Y$ est appelée la *composante connexe de a dans X* . C'est « la plus grande partie connexe de X qui contienne a ».

Théorème 1.8.5. — Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et si X est connexe, $f(X)$ est connexe.

Démonstration. — On peut remplacer Y par $f(X)$ dans l'énoncé, *i.e.* on peut supposer f surjective. Si $Y = Y' \sqcup Y''$ est une partition par des ouverts de Y , $X = f^{-1}(Y') \sqcup f^{-1}(Y'')$ est une partition par des ouverts de X car f est continue. Si X est connexe, par exemple $f^{-1}(Y') = \emptyset$ et comme f est surjective, $Y' = \emptyset$. \square

Rappelons qu'un espace topologique Y est discret si toute partie de Y est ouverte. Donc Y est discret si et seulement si les singletons sont à la fois ouverts et fermés. Les seules parties connexes d'un espace discret sont donc les singletons.

Lemme 1.8.6. — Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) X est connexe.
- (2) Toute application continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.
- (3) Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ à valeurs dans un espace discret Y est constante.

Démonstration. — (1) \Rightarrow (2) découle du théorème précédent, parce que $\{0, 1\}$ n'est pas connexe.

Ensuite, si $f : X \rightarrow Y$ est non constante et si Y est discret, soient y_1, y_2 deux éléments distincts dans $f(X)$. On définit alors une application $g : Y \rightarrow \{0, 1\}$ par $g(y_1) = 0$ et $g(y) = 1$ pour tout $y \neq y_1$. Alors g est continue, puisque Y est discret. Donc $g \circ f$ est continue, non constante, de X dans $\{0, 1\}$: on vient de montrer que non(3) \Rightarrow non(2), donc (2) \Rightarrow (3). Puis (3) \Rightarrow (2) est immédiat.

Enfin, supposons (2) et prouvons (1). Soit $X = U \sqcup V$ une partition de X en deux ouverts. On définit alors $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ par $f|_U$ constante égale à 0 et $f|_V$ constante égale à 1. Alors f est continue, donc constante, donc U ou V est vide. \square

Il n'y a pas grand chose à ajouter dans un cadre aussi général. On s'intéresse maintenant aux sous-espaces (topologiques) de \mathbb{C} , mais ce qu'on va dire est vrai dans le cadre, par exemple, des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés. Les démonstrations sont identiques, aux notations près. Le théorème suivant est aussi fondamental que bien connu :

Théorème 1.8.7. — Les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

C'est une conséquence de la propriété (ou de l'axiome) de la borne supérieure. Cette propriété intervient aussi dans la démonstration, laissée au lecteur, du lemme suivant :

Lemme 1.8.8. — Soit X une partie de \mathbb{R} telle que si $x, x' \in X$ et $x \leq x'$, le segment $[x, x']$ soit contenu dans X . Alors X est un intervalle.

Démonstration. — Soit X une partie connexe de \mathbb{R} et $x < x'$ des points de X . S'il existe $c \in [x, x'] \setminus X$, $X = X \cap]-\infty, c[\sqcup X \cap]c, +\infty[$; contradiction. Donc X est un intervalle d'après le lemme.

Réciproquement, soit I un intervalle et supposons qu'il existe une partition $I = X' \sqcup X''$ par des ouverts non vides de I . On peut supposer $x' \in X', x'' \in X''$ et $x' < x''$. Soit $c = \sup([x', x''] \cap X')$. Notons que $c \in [x', x''] \subset I$ car I est un intervalle. Si $c \in X', c < x''$ et comme X' est ouvert dans I , $[c, c + \epsilon[\subset X'$ pour $\epsilon > 0$ assez petit ; c'est impossible par définition de c . Donc $c \in X'', c > x'$. Comme X'' est ouvert dans I , $]c - \epsilon, c[\subset X''$ pour $\epsilon > 0$ assez petit ; c'est encore impossible par définition de c . \square

On va donner une caractérisation des ouverts connexes de \mathbb{C} avec, on l'espère, un parfum plus géométrique que la simple définition de la connexité.

Définition 1.8.9. — Un arc dans X est une application continue $c : [t_0, t_1] \rightarrow X$, où $[t_0, t_1]$ est un segment non trivial (i.e. $t_0 < t_1$) de \mathbb{R} . On dit que $a = c(t_0)$ est l'origine et $b = c(t_1)$ l'extrémité de l'arc c . On dit aussi que c est un arc de a à b dans X . Si $a = b$, on dit que l'arc c est fermé. On note $\langle c \rangle := c([t_0, t_1])$ l'image de c .

Définition 1.8.10. — L'espace topologique X est *connexe par arcs* si, pour tout $a, b \in X$, il existe un arc de a à b dans X .

Proposition 1.8.11. — Si X est connexe par arcs, X est connexe.

Démonstration. — Si $X \neq \emptyset$ et $a \in X$, il existe, pour tout $x \in X$, un arc c_x de a à x dans X . Donc X est la réunion des connexes $\langle c_x \rangle$, $x \in X$, qui tous contiennent a . \square

La réciproque est fautive en général, même si X est un compact de \mathbb{R}^2 :

Exercice 1.8.12. — Soit $K = \{(t, \sin(1/t)), 0 < t \leq 1\} \cup \{(0, t), -1 \leq t \leq 1\}$. Montrer que K est compact, connexe, et que K n'est pas connexe par arcs.

Définition 1.8.13. — Soient $c_0 : [t_0, t_1] \rightarrow X$ et $c_1 : [t'_0, t'_1] \rightarrow X$ deux arcs, tels que $c_0(t_1) = c_1(t'_0)$. On définit l'*arc juxtaposé* de c_0 et c_1 par $c_0 \vee c_1 : [t_0, t_1 + t'_1 - t'_0] \rightarrow X$ tel que $(c_0 \vee c_1)(t) = c_0(t)$ si $t \leq t_1$ et $(c_0 \vee c_1)(t) = c_1(t - t_1 + t'_0)$ si $t_1 \leq t \leq t_1 + t'_1 - t'_0$.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 1.8.14. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Alors

$$\Omega \text{ est connexe} \iff \Omega \text{ est connexe par arcs.}$$

Démonstration. — Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} . Soit $a \in \Omega$. On introduit l'ensemble X des points $b \in \Omega$ tels qu'il existe un arc de a à b dans Ω .

$a \in X$. Prendre un arc constant !

X est un ouvert de Ω . En effet, soit $b \in X$ et $D(b, r) \subset \Omega$. Si $c \in D(b, r)$, $[b, c] : [0, 1] \ni t \rightarrow b + t(c - b)$ va de b à c dans Ω , donc si c_0 va de a à b dans Ω , $c_0 \vee [b, c]$ va de a à c dans Ω .

X est fermé dans Ω . Soit $b \notin X$ et $D(b, r) \subset \Omega$. En échangeant les rôles de b et c dans l'argument précédent, on voit que $X \cap D(b, r) = \emptyset$.

X est ouvert, fermé, non vide dans Ω . Donc $X = \Omega$. \square

Exercice 1.8.15. — Montrer que si Ω est un ouvert connexe de \mathbb{C} , on peut joindre deux points $a, b \in \Omega$ par un arc dont l'image est une union de segments horizontaux ou verticaux.

CHAPITRE 2

SÉRIES ENTIÈRES, EXPONENTIELLE, ARGUMENTS, LOGARITHMES, PUISSANCES

2.1. Rappels sur les séries de fonctions et les familles sommables

Ce paragraphe commence par des rappels de sujets traités en cours de deuxième année ⁽¹⁾ ; on y renvoie le lecteur pour plus de détails.

Rappelons que factorielle zéro est $0! = 1$ et que $z^0 = 1$.

2.1.1. Séries de fonctions. — Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite de fonctions de $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans \mathbb{C} . Nous désignerons par $\sum u_n(z)$, ou $\sum_{n \geq 0} u_n(z)$, avec $z \in \Omega$, la série numérique (complexe) de terme général $u_n(z)$, et nous désignerons par $\sum u_n$, ou encore $\sum_{n \geq 0} u_n$, la série de fonctions sur Ω , de terme général u_n . Les sommes partielles seront généralement notées

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N u_n(z), \quad \text{et} \quad S_N = \sum_{n=0}^N u_n.$$

Si, au point $z \in \Omega$, la suite $(S_N(z))_{N \geq 0}$ converge vers une limite (notons-la $f(z)$), on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ la *somme* de cette série numérique, et

$$R_N(z) = f(z) - S_N(z) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(z)$$

est alors le *reste* de la série numérique. Si, pour tout $z \in \Omega$, la série $\sum u_n(z)$ converge, on dit que la série $\sum u_n$ est *simplement convergente*.

On dit que $\sum u_n(z)$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n(z)|$ converge ; cela implique la convergence de la série $\sum u_n(z)$ et on a alors

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|.$$

1. Voir cours de LM250 ou LM260

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge absolument sur Ω si la série $\sum |u_n|$ est simplement convergente sur Ω .

On dit que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur Ω si elle converge simplement sur Ω et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$, et pour tout $z \in \Omega$, $|R_N(z)| \leq \varepsilon$.

On dit que $\sum u_n$ converge normalement sur Ω si la série de terme général $\|u_n\| = \sup_{z \in \Omega} |u_n(z)|$ est convergente.

Proposition 2.1.1. — (a) Toute série normalement convergente sur Ω y est absolument convergente et uniformément convergente. (b) La réciproque est fausse.

Démonstration. — (a) Supposons que $\sum u_n$ converge normalement sur Ω . Pour tout $z \in \Omega$, $|u_n(z)| \leq \sup_{z \in \Omega} |u_n(z)|$, donc le premier membre est le terme général d'une série convergente, autrement dit la série $\sum u_n$ converge absolument. En particulier elle converge simplement. Et

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$, on ait $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\| \leq \varepsilon$. Alors pour tout $z \in \Omega$ et $N \geq N_\varepsilon$, on a :

$$|R_N(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\| \leq \varepsilon,$$

autrement dit la série $\sum u_n$ converge uniformément.

(b) Prenons $\Omega = \mathbb{C}$, $u_0 = 0$, et pour tout $n \geq 1$ prenons la fonction u_n égale à $1/n$ en $z = n$ et nulle partout ailleurs. La convergence absolue est évidente parce que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum u_n(z)$ a au plus un terme non nul. Si $\varepsilon > 0$ et $N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$, alors pour tout $N \geq N(\varepsilon)$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|R_N(z)|$ est au plus égal à $\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N(\varepsilon)} \leq \varepsilon$, donc la convergence est uniforme sur \mathbb{C} . Mais cette convergence n'est pas normale puisque $\|u_n\| = \frac{1}{n}$ (dès que $n \geq 1$) est le terme général d'une série divergente. \square

Théorème 2.1.2. — La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur Ω est encore continue sur Ω .

Démonstration. — Notons u_n le terme général d'une série de fonctions convergeant uniformément vers f sur Ω . Soit $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Vu que $\sum u_n$ converge uniformément, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$, et tout $z \in \Omega$, on ait

$$|S_N(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

La fonction S_{N_ε} définie par $S_{N_\varepsilon}(z) = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} u_n(z)$, est continue en z_0 , donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega$,

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |S_{N_\varepsilon}(z) - S_{N_\varepsilon}(z_0)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout z tel que $|z - z_0| < \delta$, on a :

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - S_{N_\varepsilon}(z)| + |S_{N_\varepsilon}(z) - S_{N_\varepsilon}(z_0)| + |S_{N_\varepsilon}(z_0) - f(z_0)| < 3\varepsilon,$$

ce qui signifie que f est continue. \square

Enfin, rappelons le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions réelles.

Théorème 2.1.3. — Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe C^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum u_n(x_0)$ converge, et que la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur I . Alors la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction f de classe C^1 , qui vérifie, sur I : $f' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$.

2.1.2. Familles sommables. — Tous les ensembles d'indices considérés dans cette section sont finis ou dénombrables. On notera $F(I)$ l'ensemble des parties finies d'un ensemble I .

2.1.2.1. Familles sommables de nombres positifs. — On considère d'abord des sommes d'éléments de $[0, +\infty]$. Comme en intégration, on pose $0.(+\infty) = 0$.

Définition 2.1.4. — Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On définit sa somme dans $[0, +\infty]$ par :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{J \in F(I)} \sum_{i \in J} a_i.$$

Exemple 2.1.5. — On a $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$.

On vérifie qu'on a pour $a, b, a_i, b_i \in [0, +\infty]$, $i \in I$:

$$\sum_{i \in I} aa_i + bb_i = a \sum_{i \in I} a_i + b \sum_{i \in I} b_i$$

et que :

$$J \subset I \Rightarrow \sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i; \quad a_i \leq b_i \Rightarrow \sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

Lemme 2.1.6. — Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. Soit $I = \coprod_{l \in L} I_l$ une partition de I . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i \quad (\text{Associativité}).$$

Démonstration. — Si $I' \in F(I)$ alors l'ensemble L' des l tels que $I' \cap I_l \neq \emptyset$ est fini. Donc

$$\sum_{i \in I'} a_i = \sum_{l \in L'} \sum_{i \in I' \cap I_l} a_i \leq \sum_{l \in L'} \sum_{i \in I_l} a_i \leq \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i.$$

Réciproquement soit $L' \in F(L)$. Pour tout $l \in L'$, soit $I'_l \in F(I_l)$. Alors $\prod_{L'} I'_l \in F(I)$ donc

$$\sum_{l \in L'} \sum_{i \in I'_l} a_i \leq \sum_I a_i.$$

L' étant fixé, on passe au sup par rapport à $I'_l \in F(I_l)$. On obtient par linéarité

$$\sum_{l \in L'} \left(\sum_{i \in I_l} a_i \right) \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

□

2.1.2.2. Familles sommables de nombres complexes. —

Définition 2.1.7. — Une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est dite sommable si

$$\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty.$$

On note $l^1(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes.

Rappelons quelques notations : si $a \in \mathbf{R}$, on note $a^+ = \max(0, a)$ et $a^- = -\min(0, a)$. On a

$$a = a^+ - a^- \quad \text{et} \quad |a| = a^+ + a^-.$$

Si $a \in \mathbb{C}$, on a $\frac{1}{2}(|\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|) \leq |a| \leq |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|$. On en déduit :

Lemme 2.1.8. — Une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est sommable ssi $(\operatorname{Re} a_i)_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im} a_i)_{i \in I}$ le sont. Si les a_i sont réels, la famille est sommable ssi $(a_i^+)_{i \in I}$ et $(a_i^-)_{i \in I}$ sont sommables.

Définition 2.1.9. — Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Si les a_i sont réels, on pose

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-.$$

Si les a_i sont complexes, on pose

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re} a_i + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im} a_i.$$

Lemme 2.1.10. — Si $a_i \in \mathbf{R}$ s'écrit $a_i = b_i - c_i$ avec $(b_i)_{i \in I}$ et $(c_i)_{i \in I}$ des familles sommables de réels positifs alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in I} c_i.$$

Démonstration. — L'hypothèse $a_i^+ - a_i^- = b_i - c_i$ entraîne $a_i^+ + c_i = a_i^- + b_i$. Donc $\sum_{i \in I} a_i^+ + c_i =$

$\sum_{i \in I} a_i^- + b_i$. On applique la linéarité de la somme pour les familles de nombres positifs pour conclure. □

Théorème 2.1.11. — Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres complexes.

i) La somme $m = \sum_{i \in I} a_i$ de cette famille est caractérisée par

$$\forall \epsilon > 0, \exists J_0 \in F(I) \text{ tel que } \forall J \in F(I), J_0 \subset J \Rightarrow \left| \sum_{j \in J} a_j - m \right| < \epsilon.$$

ii) Soit $I = \coprod_{l \in L} I_l$ une partition de I . Pour tout $l \in L$, la famille $(a_i)_{i \in I_l}$ est sommable, la famille

$(\sum_{i \in I_l} a_i)_{l \in L}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i \text{ (Associativité) .}$$

iii) $l^1(I, \mathbb{C})$ est un \mathbb{C} –espace vectoriel, l'application

$$l^1(I, \mathbb{C}) \ni (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} |a_i|$$

est une norme, l'application

$$l^1(I, \mathbb{C}) \ni (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i \in \mathbb{C}$$

est linéaire et continue.

Démonstration. —

i) La preuve de l'unicité est laissée en exercice.

i.1) La propriété est vraie pour une famille de nombres positifs car alors $m = \sup_{J \in F(I)} \sum_{j \in J} a_j$: Soit

$$J_0 \in F(I) \text{ tel que } m - \epsilon < \sum_{j \in J_0} a_j. \text{ Si } J_0 \subset J \text{ alors } \sum_{j \in J_0} a_j \leq \sum_{j \in J} a_j \leq m.$$

i.2) Si $a_i \in \mathbb{R}$, soient $m_{\pm} = \sum_{i \in I} a_i^{\pm}$. $\exists J_{\pm} \in F(I)$ tels que $J_{\pm} \subset J \Rightarrow m_{\pm} - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{j \in J} a_j^{\pm} \leq m_{\pm}$.

Alors

$$J_+ \cup J_- \subset J \Rightarrow \left| m - \sum_{j \in J} a_j \right| \leq \left| m^+ - \sum_{j \in J} a_j^+ \right| + \left| m^- - \sum_{j \in J} a_j^- \right| \leq \epsilon.$$

i.3) Si $a_j \in \mathbb{C}$, on écrit $a_j = \operatorname{Re} a_j + i \operatorname{Im} a_j$.

ii1) La propriété est vraie pour les familles de nombres positifs.

ii2) Si $a_i \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{i \in I_l} a_i = \sum_{i \in I_l} a_i^+ - \sum_{i \in I_l} a_i^-$. Le lemme 2.1.10 implique

$$\sum_{l \in L} \left(\sum_{i \in I_l} a_i^+ \right) - \sum_{l \in L} \left(\sum_{i \in I_l} a_i^- \right) = \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i$$

donc

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- = \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i^+ - \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i^- = \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i.$$

ii3) On a $\operatorname{Re} \sum_{i \in I} a_i := \sum_{i \in I} \operatorname{Re} a_i = \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} \operatorname{Re} a_i := \sum_{l \in L} \operatorname{Re} \left(\sum_{i \in I_l} a_i \right) := \operatorname{Re} \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i$. La même relation est vraie pour la partie imaginaire, ce qui prouve l'identité.

iii) Le fait que $l^1(I, \mathbb{C})$ soit un espace vectoriel et que $\sum_{i \in I} |a_i|$ est une norme résulte de l'inégalité triangulaire, et des propriétés de croissance et de linéarité de la somme d'une famille de nombres positifs. Comme $a_i + b_i = a_i^+ + b_i^+ - a_i^- - b_i^-$, le lemme 2.1.10 entraîne l'additivité de la somme pour des familles de nombres réels. Que $\sum_{i \in I} a a_i = a \sum_{i \in I} a_i$ est clair si $a, a_i \in \mathbb{R}$. On déduit comme en ii3) la linéarité complexe. \square

Corollaire 2.1.12. — Soient $\sum_{i \geq 0} a_i$ et $\sum_{j \geq 0} b_j$ deux séries absolument convergentes. Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j,$$

la dernière série étant de plus absolument convergente.

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} |a_i| |b_j| &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{(i,j) \in \{i\} \times \mathbb{N}} |a_i| |b_j| \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i| \left(\sum_{(i,j) \in \{i\} \times \mathbb{N}} |b_j| \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i| \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |b_j| \right) = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |b_j| \right) \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i| < +\infty. \end{aligned}$$

La famille est donc sommable et on peut écrire les formules ci-dessus sans modules.

Pour la dernière égalité, on note que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } i + j = n\} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ alors $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{(i,j) \in T_n} a_i b_j$. \square

2.2. Séries entières de la variable complexe z

On rappelle qu'une série entière (complexe) est une série de fonctions du type : $\sum a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que le terme général est un monome de degré n .

L'étude de la convergence des séries entières repose sur la comparaison avec une série géométrique. La démonstration du lemme suivant est plus importante encore que son énoncé :

Lemme 2.2.1 (Abel). — Soit $r > 0$. Si la suite $a_n r^n$ est bornée, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in D(0, r)$. Pour tout $s \in]0, r[$, la convergence est normale sur le disque fermé $\overline{D}(0, s)$.

Démonstration. — Il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $|a_n|r^n \leq M$, ou encore $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit $s \in]0, r[$. Pour tout $z \in \overline{D}(0, s)$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$|a_n z^n| \leq |a_n| s^n \leq M \left(\frac{s}{r}\right)^n.$$

Le membre de droite est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{s}{r} < 1$ donc convergente. D'où le lemme. \square

La conséquence suivante est immédiate.

Théorème 2.2.2. — *Étant donnée la série entière $\sum a_n z^n$, on définit :*

$$r = \sup\{s \geq 0, \text{ la suite } a_n s^n \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty].$$

La série converge si $|z| < r$ et diverge si $|z| > r$.

Le $r \in [0, +\infty[$ dont cet énoncé assure l'existence est appelé le *rayon de convergence* de la série entière. Si $r > 0$, le disque $D(0, r)$ est appelé le *disque ouvert de convergence* de la série entière.

Le domaine de convergence de la série entière, i.e. l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels elle converge, vérifie donc :

$$D(0, r) \subset D \subset \overline{D}(0, r).$$

Le cercle $C(0, r)$ est souvent appelé *cercle d'incertitude* de la série entière : en chaque point de ce cercle, la série $\sum a_n z^n$ peut a priori avoir n'importe quel comportement, convergente ou divergente.

Exemple 2.2.3. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ fixé et considérons la série $\sum_{n \geq 1} n^\alpha z^n$. Comme $|z|^n n^\alpha$ converge vers 0 si $|z| < 1$ et vers $+\infty$ si $|z| > 1$, le rayon de convergence est 1. On a $\max_{|z| \leq 1} |z^n| n^\alpha = n^\alpha$.

Si $\alpha < -1$, la série converge normalement sur le disque unité fermé $\overline{D}(0, 1)$ vers une fonction continue sur ce disque. Si $\alpha \geq 0$ et $z \in C(0, 1)$, le terme général ($n^\alpha z^n$) de cette série ne converge pas vers zéro et la série diverge sur le cercle unité. Si $-1 < \alpha < 0$, on montre, par exemple à l'aide d'une transformation d'Abel, qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions sur tout ensemble de la forme $\overline{D}(0, 1) \setminus D(1, \epsilon)$ ($0 < \epsilon < 1$).

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière, nous dirons que sa *série entière dérivée* est la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Lemme 2.2.4. — *Toute série entière a le même rayon de convergence que sa série dérivée.*

Démonstration. — Notons r le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, et r' celui de la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$. Soit $s \in]0, r[$. Si $t \in]s, r[$, la suite $a_n t^n$ est bornée et

$$(n+1)|a_{n+1}|s^n \leq (|a_{n+1}|t^{n+1}) \times (n+1)(s/t)^n/t.$$

À droite, le premier facteur est borné et le second est décroissant en n pour n assez grand. La suite $(n+1)|a_{n+1}|s^n$ est donc bornée. Ceci montre que $r' \geq r$.

D'autre part, $|a_n|s^n \leq n|a_n|s^{n-1} \times s$ pour $n \geq 1$, montre que $r' \leq r$. \square

Cela entraîne encore la formule suivante (dans la pratique, cette formule sert rarement à déterminer un rayon de convergence) :

Lemme 2.2.5 (Formule d'Hadamard). — *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule :*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Démonstration. — Soit $z \in \mathbb{C}$. Si

$$|z| \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} > 1,$$

$|z||a_n|^{1/n} > 1$ donc $|a_n z^n| > 1$ pour une infinité de valeurs de n : la série diverge. Si

$$|z| \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} < 1,$$

il existe $c \in]0, 1[$ tel que $|z||a_n|^{1/n} \leq c$ donc $|a_n||z|^n \leq c^n$, pour n assez grand : la série converge. \square

On s'intéresse maintenant aux propriétés de la somme d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.

Théorème 2.2.6. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$; notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme de la série entière dans le domaine de convergence. Alors f est holomorphe sur $D(0, r)$ et, pour tout $z \in D(0, r)$,*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Autrement dit, la dérivée de la somme d'une série entière est la somme de sa série dérivée.

On peut obtenir ce résultat à l'aide du théorème 2.1.3. Mais nous allons en donner une démonstration plus directe, et instructive, tirée d'un cours de premier cycle donné à Lille.

Démonstration. — Soit $z \in D(0, r)$. En appliquant deux fois le lemme 2.2.4, on a la convergence des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1} = g_1(z)$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|z^{n-2} = g_2(z)$. Fixons s tel que $|z| < s < r$. Soit $h \in \mathbb{C}$ tel que $|z| + |h| < s$; notons $t = |z| + |h|$. On a

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n ((z+h)^n - z^n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(-z^n + \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} h^k \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(nhz^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^n C_n^k z^{n-k} h^{k-2} \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$f(z+h) - f(z) - hg_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n h^2 \left(\sum_{k=2}^n C_n^k z^{n-k} h^{k-2} \right),$$

et il s'agit maintenant de majorer le deuxième terme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n C_n^k |z^{n-k} h^{k-2}| &= \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)}{k(k-1)} C_{n-2}^{k-2} |z^{n-k} h^{k-2}| \\ &\leq n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k |z^{n-k-2} h^k| \\ &\leq n(n-1)(|z| + |h|)^{n-2}, \end{aligned}$$

autrement dit, $|f(z+h) - f(z) - hg_1(z)| \leq |h|^2 g_2(t)$. Notant M le maximum de la fonction (continue) $|g_2|$ sur le disque fermé $\overline{D}(0, s)$, nous avons donc montré que

$$|f(z+h) - f(z) - hg_1(z)| \leq |h|^2 M,$$

où M ne dépend pas de h : le théorème en découle. \square

La définition de la \mathbb{C} -dérivabilité à un ordre $p \in \mathbb{N}$ et, quand elle a lieu, de la \mathbb{C} -dérivée d'ordre p est évidente, par récurrence. Par récurrence aussi, on en déduit le résultat suivant :

Théorème 2.2.7. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$. Sa somme f est \mathbb{C} -dérivable à tous les ordres sur son disque ouvert de convergence $D(0, r)$, et elle est la somme de sa série de Taylor :

$$\text{pour tout } z \in D(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Démonstration. — Le théorème précédent entraîne que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k} = \sum_{u \geq 0} \frac{(k+u)!}{u!} a_{u+k} z^u.$$

Donc $f^{(k)}(0) = k!a_k$. On peut aussi écrire $\frac{f^{(k)}}{k!}(z) = \sum_{u \geq 0} \binom{k+u}{k} a_{u+k} z^u$ avec $\binom{k+u}{k}$ le coefficient binomial. □

Exemple 2.2.8. — on a le développement en série suivant sur $D(0, 1)$:

$$\frac{1}{(1-z)^{j+1}} = \sum_{i \geq 0} \frac{(i+j)!}{j!i!} z^i$$

$$\text{car } \left(\frac{1}{(1-z)^k}\right)^{(j)} = \frac{(j+k-1)!}{(k-1)!(1-z)^{j+k}}.$$

Corollaire 2.2.9. — La somme d'une série entière (de rayon de convergence non nul) est nulle au voisinage de 0 si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Théorème 2.2.10. — Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent sur $D(0, r)$, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors les séries entières $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ et $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, convergent aussi sur $D(0, r)$, et pour tout $z \in D(0, r)$ on a

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Démonstration. — Nous ne démontrons que la propriété concernant le produit. Si $|z| < r$, on a

$$+\infty > \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i| |z|^i \sum_{j \in \mathbb{N}} |b_j| |z|^j = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} |a_i b_j| |z|^{i+j}.$$

La famille $(a_i b_j z^{i+j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable donc

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_i b_j z^{i+j} = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i z^i\right) \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i z^i\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \left(\sum_{i+j=n; i,j \geq 0} a_i b_j\right).$$

□

2.2.1. Fonctions analytiques (complexes). — Soit $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f est *développable en série entière* en a s'il existe $r > 0$ et une suite a_n , $n \in \mathbb{N}$, de nombres complexes tels que pour tout $z \in D(a, r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

Bien sûr, la convergence du second membre fait partie de la condition. On dit aussi que f est *développable en série entière de $z-a$* sur $D(a, r)$. En posant $z = a + h$, la condition s'écrit :

$$h \in D(0, r), \quad f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n.$$

On peut donc utiliser les propriétés des séries entières.

Définition 2.2.11. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est *analytique* sur Ω si, pour tout $a \in \Omega$, f est développable en série entière en a . On note $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω . Une fonction analytique sur \mathbb{C} est appelée fonction *entière*.

Les résultats du paragraphe précédent entraînent :

Théorème 2.2.12. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

1. $A(\Omega)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
2. Si $f \in A(\Omega)$ et si l'ouvert ω est contenu dans Ω , alors $f|_\omega \in A(\omega)$.
3. Si $f \in A(\Omega)$, f a des \mathbb{C} -dérivées de tout ordre $p \in \mathbb{N}$ et $f^{(p)} \in A(\Omega)$.
4. Pour tout $a \in \Omega$, il existe un disque $D(a, r) \subset \Omega$ sur lequel f est la somme de sa série de Taylor en a :

$$z \in D(a, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n.$$

Les fractions rationnelles sont analytiques en dehors de leurs pôles. Plus précisément, on a :

Lemme 2.2.13. — Soit $R \in \mathbb{C}(z)$ et $A = \{a_1, \dots, a_d\}$ l'ensemble de ses pôles. Si $a \in \mathbb{C} \setminus A$, R est développable en série entière de $z - a$ sur le disque $D(a, r)$, où $r = \min_{k=1, \dots, d} |a - a_k|$ est la distance de a à A .

Démonstration. — On décompose R en éléments simples. On se ramène ainsi au cas où R est de la forme :

$$R(z) = \frac{1}{(z - b)^p}.$$

Si $a \neq b$, la formule de la série géométrique donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b - z} &= \frac{1}{(b - a) - (z - a)} = \frac{1}{b - a} \left(1 - \frac{z - a}{b - a}\right)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - a)^n}{(b - a)^{n+1}} \end{aligned}$$

sur $D(a, |b - a|)$. Dérivant $(p - 1)$ -fois, pour $z \in D(a, |b - a|)$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(p - 1)!}{(b - z)^p} &= \sum_{n \geq p-1}^{+\infty} n \dots (n - p + 2) \frac{(z - a)^{n-p+1}}{(b - a)^{n+1}} \\ \left(\frac{b - a}{b - z}\right)^p &= \sum_{u \geq 0}^{+\infty} \binom{u+p-1}{p-1} \left(\frac{z - a}{b - a}\right)^u \end{aligned}$$

La fraction rationnelle R est donc développable en série entière de $z - a$ sur ce disque. \square

Théorème 2.2.14. — La somme d'une série entière (de rayon de convergence non nul) est analytique sur son disque ouvert de convergence.

Démonstration. — Il ne s'agit pas d'une lapalissade ! Il s'agit de montrer que si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, avec $z \in D(0, r)$, et si $b \in D(0, r)$, alors f est développable en série entière en b . On va démontrer un résultat un peu plus précis : pour tout h tel que $|b| + |h| < r$, $f(b+h)$ est somme d'une série entière de h . On a

$$f(b+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (b+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_n C_n^k b^{n-k} h^k.$$

Mais $|b| + |h| < r$ entraîne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n |a_n| C_n^k |b|^{n-k} |h|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|b| + |h|)^n < +\infty.$$

La famille $(a_n C_n^k b^{n-k} h^k)_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n}$ est sommable et

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n} a_n C_n^k b^{n-k} h^k &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_n C_n^k b^{n-k} h^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} h^k \left(\sum_{n \geq k} a_n C_n^k b^{n-k} \right) \\ \forall h \in D(0, r - |b|), f(b+h) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} h^k \left(\sum_{n \geq k} a_n C_n^k b^{n-k} \right). \end{aligned}$$

□

De même, on peut montrer que la composée de fonctions analytiques est encore analytique (là où elle est définie), et, aussi, la fonction réciproque d'une bijection analytique est analytique. Nous reviendrons sur ces points à l'issue du chapitre 3.

Nous allons maintenant voir des propriétés très importantes des fonctions analytiques.

Théorème 2.2.15 (Principe du prolongement analytique). — *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. f est nulle sur Ω .
2. f est nulle sur un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$.
3. Il existe un point $a \in \Omega$ tel que pour tout $p \geq 0$, $f^{(p)}(a) = 0$.

Les implications (1) \Rightarrow (2) et (2) \Rightarrow (3) sont triviales et ne font pas intervenir la connexité. L'analyticité de f est cruciale pour (3) \Rightarrow (2) et (2) \Rightarrow (1), et la connexité de Ω est cruciale pour (2) \Rightarrow (1).

Démonstration. — (3) \Rightarrow (2) parce que si $f^{(p)}(a) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f , qui est au voisinage de a la somme de sa série de Taylor au point a , est nulle sur ce voisinage.

Pour montrer (2) \Rightarrow (1), on introduit :

$$U = \{a \in \Omega, f \text{ est nulle au voisinage de } a \text{ dans } \Omega\}.$$

Par définition, U est un voisinage (dans Ω ou dans \mathbb{C} , c'est pareil) de chacun de ses points ; c'est donc un ouvert de Ω . Si la propriété (2) est vérifiée, l'ouvert U est non vide. Pour démontrer que $U = \Omega$, il suffit de montrer que U est fermé dans Ω (pas dans \mathbb{C} , ce n'est pas pareil !).

Soit $a_n \in U$ une suite qui converge vers $a \in \Omega$. Par définition de U , f est nulle au voisinage de chacun des points a_n , donc toutes ses dérivées, d'ordre ≥ 0 , sont nulles en a_n . Comme $f^{(p)}$

est continue, $f^{(p)}(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(p)}(a_n) = 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}$. Comme f est analytique en a , f est nulle au voisinage de a , donc $a \in U$ par définition de U . L'ensemble U est fermé dans Ω . \square

En appliquant le théorème précédent à la différence $f - g$ de deux fonctions, on obtient :

Corollaire 2.2.16. — Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f, g \in A(\Omega)$. Si les fonctions f et g sont égales sur un ouvert non vide de Ω , elles sont égales.

Théorème 2.2.17 (Principe des zéros isolés). — Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f \in A(\Omega)$. Si f n'est pas la fonction nulle, l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ des zéros de f est discret : si $a \in \Omega$ est un zéro de f , il existe $D(a, \varepsilon) \subset \Omega$ tel que a soit le seul zéro de f contenu dans $D(a, \varepsilon)$.

L'ensemble des zéro Z étant fermé dans Ω , Z discret entraîne que Z est sans point d'accumulation dans Ω . Mais Z vu comme sous ensemble de \mathbb{C} n'est pas fermé en général et donc peut admettre des points d'accumulations dans \mathbb{C} . La fonction $f : z \rightarrow \sin \frac{1}{z}$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* , $Z = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ est discret, fermé dans \mathbb{C}^* , non fermé dans \mathbb{C} .

Démonstration. — Si f n'est pas la fonction nulle et si $a \in \Omega$, f n'est pas identiquement nulle au voisinage de a d'après le principe du prolongement analytique. Si $f(a) = 0$ et $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ au voisinage de a , la série de droite n'est donc pas la série nulle : il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$ et $a_p \neq 0$. On peut écrire :

$$f(z) = (z-a)^p g(z)$$

où g est analytique au voisinage de a et $g(a) \neq 0$. Par continuité, g ne s'annule pas sur un disque $D(a, \varepsilon)$ et $f^{-1}(\{0\}) \cap D(a, \varepsilon) = \{a\}$. \square

L'ensemble des zéros de $f \in A(\Omega)$ est fermé dans Ω , mais il n'est pas fermé dans \mathbb{C} en général! Un fermé de Ω peut ne pas avoir de point d'accumulation dans Ω et en avoir dans \mathbb{C} : ces derniers appartiennent alors à la frontière de Ω dans \mathbb{C} . On fera donc attention à bien comprendre le sens de la phrase suivante du principe des zéros isolés :

Corollaire 2.2.18. — Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f, g \in A(\Omega)$. Si l'ensemble $\{z \in \Omega, f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans Ω , $f = g$.

De la démonstration du théorème précédent, il découle :

Corollaire 2.2.19. — Soit $f \in A(\Omega)$ une fonction analytique sur un ouvert Ω non vide de \mathbb{C} et soit $a \in \Omega$. Ou bien f est identiquement nulle au voisinage de a , ou bien il existe un entier $p \in \mathbf{N}$, uniquement défini, qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :

1. $f^{(q)}(a) = 0$ si $0 \leq q < p$ et $f^{(p)}(a) \neq 0$;

2. le développement de f au voisinage de a est de la forme $f(z) = a_p(z-a)^p + \sum_{n \geq p+1} a_n(z-a)^n$

avec $a_p \neq 0$;

3. il existe une fonction h analytique au voisinage de a telle que $f(z) = (z-a)^p h(z)$ au voisinage de a et $h(a) \neq 0$.

4. il existe une fonction h analytique sur Ω telle que $f(z) = (z-a)^p h(z)$ sur Ω et $h(a) \neq 0$.

Si $p \geq 1$, on dit que a est un zéro de f , d'ordre ou de multiplicité p . Si $p = 0$, a n'est pas un zéro de f mais, par abus de langage, on dit que a est un zéro d'ordre 0 de f .

Démonstration. — Il reste à montrer le point 4) : on définit $h \in A(\Omega)$ par

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^p} & \text{si } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ \sum_{n \geq p} a_n (z-a)^n & \text{si } z \in D(a, \epsilon) \end{cases}$$

avec $\epsilon > 0$ assez petit. On vérifie que la définition est cohérente. On en déduit que h est analytique sur Ω . \square

2.3. Définition de l'exponentielle complexe par une série.

2.3.1. Définition. — La série entière de terme général $u_n = \frac{z^n}{n!}$, pour $n \geq 0$, a pour rayon de convergence $r = +\infty$ puisque $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z}{n+1} = 0$. On appelle *exponentielle complexe* la somme de cette série :

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Elle est définie sur \mathbb{C} , notée $z \mapsto e^z$ ou $z \mapsto \exp(z)$. La restriction de l'exponentielle complexe à \mathbb{R} coïncide avec celle définie au premier cycle.

Lemme 2.3.1. —

$$(14) \quad \text{L'exponentielle est } \mathbb{C}\text{-dérivable et } (e^z)' = e^z.$$

$$(15) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \quad e^{a+b} = e^a \cdot e^b.$$

$$(16) \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

Démonstration. — Le rayon de convergence de la série entière définissant l'exponentielle est infini donc on peut dériver sous le signe somme :

$$(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = e^z.$$

D'après le théorème 2.1.12, $e^a \cdot e^b$ est égale à la série de terme général

$$\sum_{\substack{m+n=k \\ m, n \geq 0}} \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{b^n}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{m+n=k \\ m, n \geq 0}} \frac{k! a^m b^n}{m! n!} = \frac{(a+b)^k}{k!}.$$

Le dernier point résulte du fait que la conjugaison complexe est continue sur \mathbb{C} (donc le conjugué d'une série est la série des conjugués) et que \exp est définie par une série entière à coefficients réels. \square

Remarque 2.3.2. — La formule $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ montre que l'exponentielle induit un homomorphisme de groupes $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2.3.2. Restriction de \exp aux valeurs imaginaires pures de z . —

Proposition 2.3.3. — On a $|e^{it}| = 1$ pour t réel et l'application $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme du groupe additif \mathbb{R} sur le cercle unité C de \mathbb{C}^* , muni de sa structure de sous-groupe multiplicatif de \mathbb{C}^* .

Démonstration. — En effet, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$, donc $e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it-it} = e^0 = 1$. Et d'après le lemme précédent, on a $e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1} \cdot e^{it_2}$, donc φ est bien un homomorphisme. \square

Pour étudier l'exponentielle, nous allons utiliser les propriétés des fonctions trigonométriques réelles cosinus et sinus. Cependant nous donnons au paragraphe suivant une autre méthode : on étudie *a priori* les fonctions $\mathbb{R} \ni t \mapsto \operatorname{Re}(e^{it})$, $\mathbb{R} \ni t \mapsto \operatorname{Im}(e^{it})$, on construit le nombre π , puis on montre que la longueur de l'arc du cercle unité $e^{i[0,t]}$ ($t \in [0, 2\pi[$) est t . Cette longueur est aussi par définition la mesure de l'angle (Ox, Oz) . On retrouve alors les propriétés des fonctions trigonométriques réelles.

2.3.2.1. *Propriétés de $t \mapsto e^{it}$ connaissant celles de \cos et \sin .* — On a

$$\operatorname{Re}(e^{it}) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} = \cos t \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(e^{it}) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sin t .$$

Donc si $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, alors $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Lemme 2.3.4. —

1. L'application $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in C$ est 2π -périodique et surjective sur le cercle unité.
2. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, elle définit un homéomorphisme

$$\varphi|_{]t_0-\pi, t_0+\pi[} :]t_0-\pi, t_0+\pi[\rightarrow C \setminus \{-\varphi(t_0)\}.$$

Démonstration. — Le premier point résulte des propriétés des fonctions trigonométriques réelles.

- 2) L'application $\varphi|_{]t_0-\pi, t_0+\pi[}$ est continue. Comme

$$e^{it} = 1 \iff \cos(t) = 1 \text{ et } \sin(t) = 0 \iff t \in 2\pi\mathbb{Z},$$

cette application est bijective. Notons θ_{t_0} l'application réciproque et montrons qu'elle est continue. Si $t_0 = 0$ alors $\theta = \theta_0$ est continue car donnée explicitement par les fonctions trigonométriques inverses

$$\theta(z) = \begin{cases} \arcsin \operatorname{Im}(z), & \text{pour } x = \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \arccos \operatorname{Re}(z), & \text{pour } y = \operatorname{Im}(z) > 0 \\ -\arccos \operatorname{Re}(z), & \text{pour } y = \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

En général, $\theta_{t_0}(z) = \theta(e^{-it_0}z) + t_0$, donc θ_{t_0} est continue. \square

2.3.2.2. *Constructions des fonctions trigonométriques réelles à partir de l'exponentielle complexe.* — Définissons *a priori* les fonctions suivantes :

$$(17) \quad a(t) = \operatorname{Re}(e^{it}) \quad \text{et} \quad b(t) = \operatorname{Im}(e^{it}).$$

De sorte que $e^{it} = a(t) + ib(t)$ et $|e^{it}|^2 = a(t)^2 + b(t)^2$. De (17), on déduit :

$$a(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad b(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Le rayon de convergence de ces séries entières est infini et on obtient par dérivation terme à terme

$$a(t)' = -b(t) \quad \text{et} \quad b(t)' = a(t).$$

Les fonctions a , b étant des sommes de séries entières de rayon de convergence infini, elles sont de classe C^1 . Comme $a(0) = 1$, il existe $t_1 > 0$ tel que a soit strictement positive sur $[0, t_1[$. Comme $b' = a$, la fonction b est strictement croissante sur $[0, t_1[$. Fixons $t_0 \in]0, t_1[$, alors

$$-a(t_1) + a(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} b(t) dt \geq (t_1 - t_0)b(t_0) > 0.$$

Donc $t_1 - t_0 \leq \frac{a(t_0)}{b(t_0)}$. Donc a ne peut rester > 0 sur tout \mathbb{R}_+ . Notons c_0 son plus petit zéro strictement positif.

Définition 2.3.5. — On note π le nombre $2c_0$.

Théorème 2.3.6. — L'application $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in C$ est 2π -périodique et surjective sur le cercle unité. Elle est localement un homéomorphisme. Plus précisément, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi|_{]t_0-\pi, t_0+\pi[} :]t_0 - \pi, t_0 + \pi[\rightarrow C \setminus \{-\varphi(t_0)\}$ est un homéomorphisme.

Démonstration. —

1) $\varphi = a + ib : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \varphi([0, \frac{\pi}{2}])$ est un homéomorphisme sur le premier quart de cercle, lequel est décrit dans le sens positif :

Par définition, a est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $b' = a$, la fonction b est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $a(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $b(\frac{\pi}{2}) > 0$. Mais $a^2 + b^2 = 1$ donc $b(\frac{\pi}{2}) = 1$. On en déduit que $b : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$ est une bijection continue strictement croissante. Comme $a' = -b$, on a $a : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [1, 0]$ est une bijection continue strictement décroissante.

2) Comme φ est un homomorphisme, on déduit que $\varphi : [t_0, t_0 + \frac{\pi}{2}] \rightarrow \varphi([t_0, t_0 + \frac{\pi}{2}])$ est un homéomorphisme sur un quart de cercle ($t_0 \in \mathbb{R}$). En particulier :

Soit $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ avec $t = \frac{\pi}{2} + \tau$. Alors $e^{i(\frac{\pi}{2}+\tau)} = i \cdot (e^{i\tau})$ i.e. $a(\frac{\pi}{2} + \tau) = -b(\tau)$ et $b(\frac{\pi}{2} + \tau) = a(\tau)$.

Donc e^{it} décrit le second quart de cercle quand t décrit l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $e^{i\pi} = -1$.

Soit $t \in [\pi, 2\pi]$, avec $t = \pi + \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Alors $e^{it} = e^{i(\pi+\theta)} = e^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = -e^{i\theta}$. Donc e^{it} décrit le demi-cercle inférieur dans le sens positif quand t décrit $[\pi, 2\pi]$ et $e^{i2\pi} = -e^{i\pi} = 1$.

3) Le nombre 2π est donc le plus petit réel strictement positif dont l'exponentielle vaut l'élément unité de \mathbb{C}^* , ce qui prouve que le noyau de l'homomorphisme φ est le sous-groupe additif $2\pi\mathbb{Z}$ et que $\varphi(t + n2\pi) = \varphi(t)$. Ce qui montre la périodicité de φ .

4) On a de plus montré que $\varphi_{|]0,2\pi[} :]0, 2\pi[\rightarrow C \setminus \{1\}$ est une bijection continue. Montrons que la bijection réciproque, notée r , est aussi continue :

Sinon, $\exists z \in C \setminus \{1\}$, $\exists \epsilon > 0$ et il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $C \setminus \{1\}$ qui converge vers z tels que $|r(z_n) - r(z)| \geq \epsilon$. $[0, 2\pi]$ étant compact, on peut extraire une sous-suite $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(r(z_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $t_0 \neq r(z)$. Mais $\varphi(t_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(r(z_{n_k})) = \lim_{k \rightarrow +\infty} z_{n_k} = z \in C \setminus \{1\}$.

Donc $t_0 \in [0, 2\pi] \setminus \{0, 2\pi, r(z)\}$ est tel que $\varphi(t_0) = \varphi(r(z))$. Ceci contredit l'injectivité de $\varphi_{|]0,2\pi[}$.

5) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. L'application $\varphi_{|]t_0-\pi, t_0+\pi[} :]t_0 - \pi, t_0 + \pi[\rightarrow \varphi(]t_0 - \pi, t_0 + \pi[)$ est un homéomorphisme car, sur cet intervalle, $t \mapsto e^{it} = e^{i(t-t_0)} \cdot e^{it_0}$ a pour réciproque $C \setminus \{-\varphi(t_0)\} \ni z \mapsto r(ze^{i(t_0)}) - t_0$ qui est continue. \square

2.3.2.3. Retour aux fonctions trigonométriques. — . On peut d'après le théorème précédent paramétrer le cercle unité par $[0, 2\pi[\ni t \mapsto e^{it}$. Si on munit \mathbb{C} de sa métrique euclidienne, la longueur de l'arc décrit par $t \in [t_0, t_1]$ est $\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d}{dt} \varphi(t) \right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} |e^{it}| dt = t_1 - t_0$. Donc $t_1 - t_0$ est la longueur de l'arc décrit sur C (qui est aussi la mesure en radian de l'angle balayé).

En particulier si $t_1 = t_0 + 2\pi$, on trouve que 2π est la longueur du cercle unité dans le plan euclidien.

Prenons $t_0 = 0$, alors $z = e^{it}$ est le point du cercle unité tel que la longueur de l'arc $(1, z)$ est t . C'est aussi la mesure de l'angle (Ox, Oz) . Ses coordonnées $\cos t$ et $\sin t$ sont bien les réels $a(t)$ et $b(t)$.

Il est à noter que les formules classiques de trigonométrie s'obtiennent à partir des propriétés de l'exponentielle complexe. Par exemple :

$$\cos(a + b) = \operatorname{Re}(e^{i(a+b)}) = \operatorname{Re}(e^{ia}e^{ib}) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin 3a = \operatorname{Im}(e^{3ia}) = \operatorname{Im}(e^{ia})^3 = 3 \cos^2 a \sin a - \sin^3 a = \sin a (3 - 4 \sin^2 a).$$

2.3.3. Fonctions trigonométriques complexes. — On définit les fonctions circulaires complexes par les formules d'Euler :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

de sorte que

$$\cos z = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad \sin z = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Notons que $\cos(z) = \operatorname{ch}(iz)$ et $i \sin z = \operatorname{sh} iz$, où

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

définissent le prolongement au plan complexe des fonctions ch et sh . En particulier, les fonctions circulaires complexes sont non bornées, 2π -périodiques. Par exemple, $|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)$.

2.4. Arguments et Logarithmes d'un nombre complexe

Lemme 2.4.1. — $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective et $2i\pi$ -périodique :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \exists w \in \mathbb{C} \quad \text{tel que } e^w = z \\ \forall w, w' \in \mathbb{C}, \quad e^w = e^{w'} \iff w - w' \in 2i\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Si $z \neq 0$, alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{C}$. D'après le théorème 2.3.6, il existe $t \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tel que $e^{it} = \frac{z}{|z|}$. Pour montrer le deuxième point, on note que si $w - w' = x + iy$ est tel que $e^{w-w'} = 1$ alors $x = 0$ et $y \in 2\pi\mathbb{Z}$. \square

Définition 2.4.2. — On appelle logarithme d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = z$.

On appelle argument d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^{it} = \frac{z}{|z|}$.

Donc $w = x + iy$ est un logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$ ssi $x = \ln|z|$ et y est un argument de z .

Définition 2.4.3. — Soit X une partie de \mathbb{C}^* . Une fonction continue $L : X \rightarrow \mathbb{C}$ est une *détermination continue du logarithme* (en abrégé dcl) si $\forall z \in X, e^{L(z)} = z$. Une fonction continue $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une *détermination continue de l'argument* (en abrégé dca) si $\forall z \in X, e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|}$.

Donc L est une dcl ssi $\forall z \in X, L(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ avec θ une détermination continue de l'argument.

Définition 2.4.4. — Soit $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. On note $Arg(z)$ l'unique argument de z qui appartient à $] -\pi, \pi[$. Alors $Arg : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow]-\pi, \pi[$ est une détermination continue de l'argument appelé argument principal. On appelle logarithme principal la fonction

$$Log : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto Log(z) = \ln|z| + iArg(z) \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. —

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. De sorte que $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{C} \setminus \{e^{-i\pi}\}$. D'après le théorème 2.3.6, $] -\pi, \pi[\ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C} \setminus \{e^{-i\pi}\}$ est un homéomorphisme. Notons r son inverse. Alors $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto r\left(\frac{z}{|z|}\right)$ est continue et vérifie $z = |z|e^{ir\left(\frac{z}{|z|}\right)}$. \square

Notons que si $p \in]-\infty, 0[$ alors

$$\lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \operatorname{Im}(z) > 0}} Log(z) = \ln|p| + i\pi \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \operatorname{Im}(z) < 0}} Log(z) = \ln|p| - i\pi.$$

Proposition 2.4.5. — Soit X une partie de \mathbb{C}^* et $L : X \rightarrow \mathbb{C}$ une détermination continue du logarithme. Alors

1. Si X est connexe, les dcl sur X sont de la forme $L + 2i\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. $e^{L(z)} = z$ pour tout $z \in X$.
3. Si Ω est connexe et $\exp : \Omega \rightarrow X$ alors $z \mapsto L(e^z) - z$ est constante à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. —

1. En effet, si L' est une autre dcl sur X , $\forall z \in X$, $L(z) - L'(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ donc $\frac{L - L'}{2i\pi} : X \rightarrow \mathbb{Z}$.

Cette application étant continue, elle est constante.

3. De même, $\Omega \ni z \mapsto L(e^z) - z$ est une application continue à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Elle est constante si Ω est connexe. \square

Remarque 2.4.6. —

La formule $e^z = e^x e^{iy}$ montre que l'exponentielle applique les droites horizontales $\{y = \alpha\}$ en les demi-droites $D_\alpha =]0, +\infty[\cdot e^{i\alpha}$ et les droites verticales $\{x = \beta\}$ sur des cercles $C(0, e^\beta)$.

Les propriétés de l'exponentielle entraînent que

$$\exp : B = \{-\pi + t_0 < \operatorname{Im}(z) < t_0 + \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus D_{t_0 - \pi}$$

est une bijection continue. C'est même un difféomorphisme car $(e^z)' = e^z$ ne s'annule jamais. La fonction réciproque est une dcl sur $\mathbb{C} \setminus D_{t_0 - \pi}$. Si on la note $\log_{t_0 - \pi}$, on vérifie que $\log_{t_0 - \pi}(z) = \operatorname{Log}(e^{-it_0} z) + it_0$.

Lemme 2.4.7. —

1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^* et $L : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une dcl sur Ω . Alors L est holomorphe sur Ω et $L'(z) = \frac{1}{z}$.

2. Réciproquement, si Ω est connexe : Soit F une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ telle que $F + c$ est une dcl sur Ω .

Démonstration. —

1) En effet si $z_0 \in \Omega$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{L(z) - L(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{L(z) - L(z_0)}{e^{L(z)} - e^{L(z_0)}} = \lim_{w \rightarrow L(z_0)} \frac{w - L(z_0)}{e^w - e^{L(z_0)}} = \frac{1}{e^{L(z_0)}} = \frac{1}{z_0}$$

car L est continue (deuxième égalité).

2) Comme $z \mapsto ze^{-F(z)} \in \mathbb{C}^*$ est de dérivée nulle sur Ω connexe, elle est égale à une constante non nulle $b = e^c$. Donc $ze^{-F(z)} = e^c$ et $F + c$ est bien une dcl sur Ω . \square

Corollaire 2.4.8. — $\forall z \in D(0, 1)$, $\operatorname{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$.

Démonstration. — En effet la série entière de droite est convergente sur $D(0, 1)$ et définit une fonction $L : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ qui est dérivable telle que

$$L'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} = \operatorname{Log}'(1+z).$$

Le disque étant connexe, $L - \operatorname{Log}$ est constante. Or elle est nulle en l'origine car $\operatorname{Log}(1) = 0$. \square

Corollaire 2.4.9. — Soit $L : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une dcl sur Ω . Alors L est analytique sur Ω . De plus $\forall z_0 \in \Omega$, soit $0 < \epsilon \leq |z_0|$ tel que $D(z_0, \epsilon) \subset \Omega$. Alors

$$\forall z \in D(z_0, \epsilon), L(z) = L(z_0) + \operatorname{Log} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0} \right).$$

Démonstration. — On vérifie que $D(z_0, |z_0|) \ni z \mapsto L_1(z) = L(z_0) + \text{Log}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)$ est une dcl. Or $L_1(z_0) = L(z_0)$. Donc $L|_{D(z_0, \epsilon)} = L_1$. Comme L_1 est somme d'une série entière de la variable $z - z_0$ (corollaire précédent), L est analytique. \square

Pour chaque complexe non nul, on peut choisir un logarithme (ou un argument). En général, on ne peut pas faire ce choix de manière continue, par exemple sur \mathbb{C}^* ou sur le cercle unité C :

Théorème 2.4.10. — *Il n'existe pas de détermination continue de l'argument définie sur \mathbb{C}^* .*

Démonstration. — Sinon soit $\theta : C \rightarrow \mathbb{R}$ une telle détermination. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = e^{i\theta(e^{it})}$, donc $t - \theta(e^{it}) \in 2\pi\mathbb{Z}$. La fonction $a : \mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{t - \theta(e^{it})}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ serait continue à valeurs dans \mathbb{Z} donc constante ($a(\mathbb{R})$ étant une partie connexe de \mathbb{Z} est un singleton). Mais $\frac{-\theta(1)}{2\pi} = a(0) = a(2\pi) = \frac{2\pi - \theta(1)}{2\pi}$ est faux. \square

2.4.1. Déterminations continues des puissances. — Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Si w un logarithme de z , alors $e^{\alpha w}$ est par définition une détermination de la puissance α de z . L'ensemble des déterminations de la puissance α de z , noté $\{z^\alpha\}$, est donc $\{e^{\alpha w + 2ik\pi\alpha}, k \in \mathbb{Z}\}$. Par exemple $\{z^i\} = \{e^{iw} e^{-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, cet ensemble est un singleton du fait de la périodicité de l'exponentielle. Dans ce cas z^α est égale à la puissance telle que définie par le calcul algébrique.

Définition 2.4.11. — Soient Ω un ouvert de \mathbb{C}^* et $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle détermination continue de la puissance α une fonction continue $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \Omega, g(z) \in \{z^\alpha\}$.

S'il existe sur Ω une détermination continue du logarithme $L : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ alors $e^{\alpha L}$ est une détermination continue de la puissance α . Cette détermination est holomorphe et vérifie

$$(e^{\alpha L(z)})' = \frac{1}{z} \alpha e^{\alpha L(z)} = \alpha e^{(\alpha-1)L(z)}.$$

Exemple 2.4.12. — Sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on définit la détermination principale de la puissance α par $z \mapsto e^{\alpha \text{Log}(z)} = DP(z^\alpha)$. Si $\alpha = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, alors $DP(z^\alpha) = e^{\alpha \ln|z| - b\theta(z)} e^{i(b \ln|z| + a\theta(z))}$. De sorte que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $Dp(z^\alpha) = |z|^\alpha e^{i(\alpha\theta(z))}$.

CHAPITRE 3

L'INTÉGRALE DE CAUCHY ET ANALYTICITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES

3.1. L'intégrale de Cauchy

3.1.1. Rappel : Intégration d'une fonction continue à valeurs complexes. — Soit $f : [t_0, t_1] \ni t \mapsto f(t) = \operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t)$ une fonction continue à valeurs complexes. On pose

$$\int_{[t_0, t_1]} f(t) dt := \int_{[t_0, t_1]} \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_{[t_0, t_1]} \operatorname{Im} f(t) dt.$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} f &\mapsto \int_{[t_0, t_1]} f(t) dt \text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire,} \\ \operatorname{Re} \int_{[t_0, t_1]} f(t) dt &= \int_{[t_0, t_1]} \operatorname{Re} f(t) dt \text{ et } \operatorname{Im} \int_{[t_0, t_1]} f(t) dt = \int_{[t_0, t_1]} \operatorname{Im} f(t) dt, \\ \left| \int_{[t_0, t_1]} f(t) dt \right| &\leq \int_{[t_0, t_1]} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Montrons la dernière propriété. C'est vraie si l'intégrale est nulle, sinon écrivons $\int_{[t_0, t_1]} f(t) dt = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{[t_0, t_1]} f(t) dt \right| &= e^{-i\theta} \int_{[t_0, t_1]} f(t) dt = \operatorname{Re} \int_{[t_0, t_1]} e^{-i\theta} f(t) dt \\ &= \int_{[t_0, t_1]} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \leq \int_{[t_0, t_1]} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Définition 3.1.1. — Un *chemin* c dans $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un arc $c : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ de classe C^1 par morceaux (on note C_{pm}^1).

On entend par là qu'il existe une subdivision $t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = t_1$ de $[t_0, t_1]$ telle que la restriction de c à chacun des segments $[s_k, s_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N-1$, soit de classe C^1 . Si $f : \langle c \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, les intégrales

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(c(t)) c'(t) dt$$

sont bien définies pour $k = 0, \dots, N - 1$ ($c'(s_k)$ et $c'(s_{k+1})$ sont les dérivées, respectivement à droite et à gauche de c en s_k et s_{k+1}). Par définition :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(c(t))c'(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} f(c(t))c'(t) dt,$$

bien qu'en toute rigueur, c' ne soit pas définie aux points de la subdivision.

Définition 3.1.2. — Soit $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin et $f : \langle c \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. L'intégrale (de Cauchy) de f sur c est notée et définie par :

$$(18) \quad \int_c f(z) dz := \int_{t_0}^{t_1} f(c(t))c'(t) dt.$$

On a alors, comme en analyse réelle, la formule :

Lemme 3.1.3. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. Notons $f = F'$ sa \mathbb{C} -dérivée. Alors, pour tout chemin c de a à b dans Ω , on a :

$$F(b) - F(a) = \int_c f(z) dz.$$

Démonstration. — Nous admettons pour le moment que $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ entraîne que F est de classe $C^1(\Omega)$, donc l'intégrale de Cauchy de F' est bien définie.

Soit $c : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ un chemin. Si $t, t + h \in [t_0, t_1]$ et c est dérivable en t ,

$$\begin{aligned} (F \circ c)(t + h) &= F(c(t) + c'(t)h + |h|\epsilon(h)) \\ &= F(c(t)) + F'(c(t))c'(t)h + |h|\epsilon(h). \end{aligned}$$

Il en résulte que $F \circ c$ est de classe C^1 par morceaux sur $[t_0, t_1]$, de dérivée :

$$(19) \quad (F \circ c)' = (F' \circ c)c'.$$

Donc

$$\int_c f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} F'(c(t))c'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (F \circ c)'(t) dt = F(c(t_1)) - F(c(t_0)) = F(b) - F(a).$$

□

Définition 3.1.4. — Deux chemins $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ et $d : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{C}$ sont *équivalents* s'il existe une bijection strictement croissante

$$\phi : [t_0, t_1] \rightarrow [s_0, s_1],$$

telle que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C_{pm}^1 et que $c = d \circ \phi$.

Deux chemins équivalents ont en particulier la même origine, la même extrémité et la même image.

Lemme 3.1.5. — Soit c et d deux chemins équivalents dans \mathbb{C} . Pour toute fonction continue $f : \langle c \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, on a :

$$\int_c f(z) dz = \int_d f(z) dz.$$

Démonstration. — Soit $c = d \circ \phi$, comme dans la définition. Par subdivision, on se ramène au cas où toutes les données sont de classe C^1 . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{d \circ \phi} f(z) dz &= \int_{t_0}^{t_1} (f \circ d)(\phi(t)) d'(\phi(t)) \phi'(t) dt \\ &= \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t_1)} (f \circ d)(t) d'(t) dt \\ &= \int_{s_0}^{s_1} (f \circ d)(t) d'(t) dt = \int_d f(z) dz. \end{aligned}$$

□

Définition 3.1.6. — Le chemin opposé $\text{opp}(c)$ d'un chemin $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ est le chemin $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par :

$$\text{opp}(c)(t) = c \circ \phi(t),$$

où ϕ est l'unique isomorphisme affine décroissant de $[t_0, t_1]$ sur $[t_0, t_1]$.

« C'est le même chemin parcouru dans l'autre sens ». La démonstration précédente, avec cette fois $\phi(t_0) = t_1$ et $\phi(t_1) = t_0$, donne :

Lemme 3.1.7. — Pour tout chemin c dans \mathbb{C} et toute fonction continue $f : \langle c \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, on a :

$$\int_{\text{opp}(c)} f(z) dz = - \int_c f(z) dz.$$

La longueur $L(c)$ d'un chemin $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} |c'(t)| dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} |c'(t)| dt.$$

Le théorème de changement de variable montre que deux chemins équivalents ont même longueur. On obtient l'estimation suivante en revenant à la paramétrisation du chemin c :

Lemme 3.1.8. — Pour tout chemin c dans \mathbb{C} et toute fonction continue $f : \langle c \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, on a :

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq L(c) \sup_{z \in \langle c \rangle} |f(z)|.$$

Démonstration. — En effet :

$$|f(c(t))c'(t)| \leq |c'(t)| \sup_{z \in \langle c \rangle} |f(z)|$$

et on obtient le résultat en intégrant. □

Ce lemme permet d'étudier la permutation d'une intégrale (de Cauchy) et d'un passage à la limite *sans revenir à la paramétrisation*. On a par exemple :

Corollaire 3.1.9. — Soit $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin. Si $f_n \in C^0(\langle c \rangle)$ converge uniformément vers f ,

$$\int_c f_n(z) dz \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_c f(z) dz.$$

Démonstration. — En effet :

$$\left| \int_c f_n(z) dz - \int_c f(z) dz \right| \leq L(c) \sup_{\langle c \rangle} |f_n - f|.$$

□

Si c_0 et c_1 sont deux chemins tels que l'extrémité de c_0 est égale à l'origine de c_1 , si f est continue sur $\langle c_0 \vee c_1 \rangle$ alors

$$\int_{c_0 \vee c_1} f(z) dz = \int_{c_0} f(z) dz + \int_{c_1} f(z) dz$$

Définition 3.1.10. —

- 1) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Une paramétrisation du segment orienté $[a, b]$ est un chemin équivalent à $c : [0, 1] \ni t \rightarrow a + t(b - a)$.
- 2) Si a_1, \dots, a_n est une suite finie de points de \mathbb{C} , une paramétrisation c de l'arc polygonal $[a_1, \dots, a_n] = [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$ est définie par la juxtaposition $c = c_1 \vee \dots \vee c_{n-1}$ des paramétrisations c_i des segments $[a_i, a_{i+1}]$.
- 3) Si f est continue sur $[a_1, \dots, a_n]$, l'intégrale de Cauchy de f le long de $[a_1, \dots, a_n]$ est par définition $\int_c f(z) dz$ avec c une paramétrisation de $[a_1, \dots, a_n]$. Elle ne dépend pas de la para-

métrisation de cet arc et est notée $\int_{[a_1, \dots, a_n]} f(z) dz$. On a

$$\int_{[a_1, \dots, a_n]} f(z) dz = \int_{[a_1, a_2]} f(z) dz + \dots + \int_{[a_{n-1}, a_n]} f(z) dz.$$

Le lemme suivant se démontre comme le théorème 1.8.14

Lemme 3.1.11. — *Un ouvert Ω de \mathbb{C} est connexe si et seulement si $\forall \{a, b\} \subset \Omega$, il existe un arc polygonal $[a, a_1, \dots, a_n, b]$ de a à b contenu dans Ω .*

3.2. Conditions pour l'existence d'une primitive

Une fonction holomorphe est une fonction dérivable (au sens complexe). Il est naturel d'introduire la notion de primitive :

Définition 3.2.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction, une *primitive* de f est une fonction $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ de dérivée f .

Le problème se pose de savoir si une fonction donnée, par exemple continue, possède une primitive. On sait que ce problème a une réponse positive dans le cadre des fonctions d'une variable réelle. La situation dans le domaine complexe est complètement différente. Il y a d'abord des « obstructions analytiques » :

Lemme 3.2.2. — *Si une fonction $f \in C^1(\Omega)$ possède une primitive, f est holomorphe.*

Démonstration. — En effet, soit F une fonction holomorphe, et supposons que $f = F'$ est de classe C^1 . On a (équations de Cauchy-Riemann) :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = f.$$

Donc :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = if.$$

La fonction F , qui a des dérivées partielles de classe C^1 , est de classe C^2 . Compte tenu du Théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

On calcule alors :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

□

Le « bon cadre » pour résoudre le problème des primitives est donc celui des fonctions holomorphes.

Notons qu'une fonction analytique admet toujours localement une primitive : Si $f \in A(\Omega)$ est sur $D(a, r) \subset \Omega$ somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ alors

$$D(a, r) \ni z \rightarrow F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

la somme de la primitive terme à terme de cette série entière, définit une primitive holomorphe de f sur $D(a, r)$.

Il y a une autre obstruction, dont on verra qu'elle est de « nature topologique ».

Théorème 3.2.3. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in C^0(\Omega)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) f a une primitive sur Ω ,
- 2) l'intégrale de Cauchy de f sur tout chemin fermé dans Ω est nulle,
- 3) l'intégrale de Cauchy de f sur tout arc polygonal fermé dans Ω est nulle.

Démonstration. —

(1) \Rightarrow (2) découle du lemme 3.1.3. En effet, si F est une primitive de f et $c: [t_0, t_1]$ est un chemin fermé, d'après ce lemme on a $\int_c f(z) dz = F(c(t_1)) - F(c(t_0)) = 0$.

(2) \Rightarrow (3) est évident.

On suppose (3). Quitte à remplacer Ω par une de ses composantes connexes, on peut supposer Ω connexe et non vide ; soit $a \in \Omega$. À tout point $z \in \Omega$, on associe un arc polygonal c_z de a à z dans Ω . On définit la fonction $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$F(z) = \int_{c_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Le point crucial est que la valeur $F(z)$ ne dépend pas du choix de c_z car, si $[a, b_1, \dots, b_p, z]$ et $[a, c_1, \dots, c_q, z]$ sont deux arcs polygonaux de a à z dans Ω , $[a, b_1, \dots, b_p, z, c_q, \dots, c_1, a]$ est un arc polygonal fermé. Donc :

$$\int_{[a, b_1, \dots, b_p, z]} f(z) dz - \int_{[a, c_1, \dots, c_q, z]} f(z) dz = \int_{[a, \dots, a]} f(z) dz = 0$$

par hypothèse.

Soit maintenant $D(z, r) \subset \Omega$ et $[a, \dots, z]$ un arc polygonal de a à z dans Ω . Si $|h| < r$, $[a, \dots, z, z+h]$ est un arc polygonal de a à $z+h$ dans Ω . On a :

$$\begin{aligned} |F(z+h) - F(z) - f(z)h| &= \left| \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta - f(z) \int_{[z, z+h]} d\zeta \right| \\ &\leq |h| \sup_{|\zeta-z| \leq |h|} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

Comme f est continue en z , le dernier membre est de la forme $|h|\epsilon(h)$: F est dérivable en z de dérivée $f(z)$. \square

Appliquons ceci à une fraction rationnelle R . Pour chercher une primitive de R , on peut se ramener, en la décomposant en éléments simples, au cas où R est un polynôme (la solution est alors évidente) ou un élément simple :

$$R(z) = \frac{1}{(z-a)^p}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

Si $p \geq 2$, R admet $(z-a)^{1-p}/(1-p)$ comme primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Le cas d'un pôle simple n'est pas si simple :

Lemme 3.2.4. — *Si $a \in \mathbb{C}$ est un pôle simple de la fraction rationnelle R , R n'admet de primitive dans aucun voisinage ouvert épointé de a .*

Démonstration. — Soit $R(z) = \frac{1}{z-a} + P(z) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z-a_i)^j}$ la décomposition de R en éléments simples, avec P un polynôme et $a \neq a_i$. Alors P admet une primitive sur \mathbb{C} et $z \mapsto \frac{1}{(z-a_i)^j}$ admet une primitive sur $D(a, |a-a_i|)$ car elle est somme d'une série entière sur ce disque. Donc $z \mapsto R(z)$ admet une primitive sur $D(a, r) \setminus \{a\}$ (avec $r \leq \min\{|a-a_i|, i=1, \dots, k\}$) si et seulement si $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ admet une primitive sur cet ouvert.

Supposons que $F \in \mathcal{O}(D(a, r) \setminus \{a\})$ soit une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z-a}$. Pour $0 < s < r$, on applique la formule (3.1.3) à l'arc

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad c(t) = a + se^{it}.$$

On obtient :

$$F(c(2\pi)) - F(c(0)) = \int_0^{2\pi} \frac{ise^{it}}{se^{it}} dt = i2\pi.$$

Mais le premier membre est nul. \square

3.3. La théorie de Cauchy sur un ouvert convexe

Définition 3.3.1. — Une partie X de \mathbb{C} est *convexe* si, pour tout $a, b \in X$, le segment $[a, b]$ est contenu dans X .

On laisse la démonstration des propriétés suivantes (faciles mais importantes) au lecteur :

1. Un convexe est connexe.
2. Un disque (ouvert ou fermé) est convexe.
3. Un demi-plan (ouvert ou fermé) (définition ?) est convexe.
4. L'intersection d'une famille de convexes est convexe.
5. L'intérieur d'un convexe est convexe.
6. L'adhérence d'un convexe est convexe.

La propriété 4. permet la définition suivante :

Définition 3.3.2. — L'*enveloppe convexe* de $X \subset \mathbb{C}$ est l'intersection de tous les convexes de \mathbb{C} qui contiennent X . C'est « le plus petit convexe de \mathbb{C} qui contient X ».

Le lemme suivant est crucial. La première partie de l'énoncé résout le problème des primitives sur un ouvert convexe, mais la précision apportée par la deuxième partie est indispensable pour démontrer la formule de Cauchy.

Lemme 3.3.3 (Goursat). — Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On a :

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z) dz = 0$$

pour tout $a, b, c \in \Omega$. De plus, le résultat reste vrai si f est continue sur Ω et dérivable en tout point de Ω , sauf peut-être un.

Remarque 3.3.4. — Il peut être utile de remarquer, pour ceux qui connaissent la théorie de l'intégration des formes différentielles dans le plan, que si la fonction f est supposée de classe C^1 , le lemme précédent est une conséquence de la formule de Green-Riemann ⁽¹⁾. Dans l'énoncé, on suppose seulement que f est dérivable : on ne suppose pas que f' soit continue.

Démonstration. — On démontre d'abord la première partie.

1. Voir Cartan, *opus cité*, pour la relation entre l'intégrale de Cauchy et l'intégrale des formes différentielles.

Soit a', b', c' les milieux respectifs des segments $[b, c]$, $[c, a]$ et $[a, b]$. Dans le calcul suivant, on omet d'écrire l'intégrand $f(z)dz$:

$$\begin{aligned}
 \int_{[a,b,c,a]} &= \int_{[a,b]} + \int_{[b,c]} + \int_{[c,a]} \\
 &= \int_{[a,c']} + \int_{[c',b]} + \int_{[b,a']} + \int_{[a',c]} + \int_{[c,b']} + \int_{[b',a]} \\
 &= \left(\int_{[a,c']} + \int_{[b',a]} \right) + \left(\int_{[c',b]} + \int_{[b,a']} \right) + \left(\int_{[a',c]} + \int_{[c,b']} \right) \\
 &= \left(\int_{[a,c',b',a]} + \int_{[b',c']} \right) + \left(\int_{[c',b,a',c']} + \int_{[c',a']} \right) + \left(\int_{[a',c,b',a']} + \int_{[a',b']} \right) \\
 &= \int_{[a,c',b',a]} + \int_{[c',b,a',c']} + \int_{[a',c,b',a']} + \int_{[a',b',c',a']} .
 \end{aligned}$$

C'est plus clair sur un dessin ! Ce calcul est correcte car tout les arcs sur lesquels on intègre sont contenus dans Ω , puisque Ω est convexe.

On a décomposé l'intégrale initiale en la somme de quatre intégrales du même type, dans lesquelles le triangle initial est remplacé par des triangles semblables, dans des similitudes de rapport $1/2$. Posons :

$$M := \left| \int_{[a,b,c,a]} f(z) dz \right|.$$

Parmi les quatre triangles qu'on a introduits, il en existe au moins un, dont on note les sommets a_1, b_1, c_1 , tel qu'on ait :

$$\left| \int_{[a_1,b_1,c_1,a_1]} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

On peut continuer indéfiniment cette construction. Si L désigne la longueur et D le diamètre du triangle initial, on obtient ainsi une suite décroissante de « triangles pleins » $T(a_n, b_n, c_n)$ (les enveloppes convexes des sommets) de sommets a_n, b_n, c_n , de longueurs $L/2^n$ et de diamètres $D/2^n$, tels que :

$$\left| \int_{[a_n,b_n,c_n,a_n]} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

Il est clair que les suites a_n, b_n, c_n convergent vers le point $d \in \Omega$ tel que $\{d\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T(a_n, b_n, c_n)$. Comme f est dérivable en d , on a le développement limité :

$$f(z) = f(d) + f'(d)(z - d) + |z - d|\epsilon(z - d).$$

Le polynôme holomorphe $z \mapsto f(d) + f'(d)(z - d)$ ayant une primitive, $\int_{[a_n,b_n,c_n,a_n]} f(d) + f'(d)(z - d) dz = 0$. Donc l'intégrale de f sur $[a_n, b_n, c_n, a_n]$ se réduit à l'intégrale du dernier terme.

On majore la dernière intégrale via le lemme 3.1.8 : Soient $D_n = \frac{D}{2^n}$ et $L_n = \frac{L}{2^n}$, le diamètre et la longueur du triangle de sommets a_n, b_n, c_n . Notons que la fonction $z \mapsto \epsilon(z - d)$ est continue

et nulle en d . Donc $\max_{z \in [a_n, b_n, c_n]} |z - d| \epsilon(z - d) \leq D_n \epsilon_n$ où $\epsilon_n \rightarrow 0$. On en déduit :

$$\left| \int_{[a_n, b_n, c_n, a_n]} f(z) dz \right| \leq D_n L_n \epsilon_n,$$

et

$$0 \leq M \leq \epsilon_n \times (LD).$$

Donc M est nul.

S'il existe un point $\alpha \in \Omega$ tel que f soit continue mais ne soit pas dérivable en α , on distingue plusieurs cas :

- Si α n'appartient pas à l'enveloppe convexe de a, b, c , la démonstration précédente s'applique.
- Sinon, on décompose $\int_{[a, b, c, a]}$ en une somme d'intégrales du même type, appartenant soit au premier cas, soit au suivant.
- Si $\alpha = a$, on décompose $\int_{[\alpha, b, c, \alpha]}$ en la somme d'intégrales qui rentrent dans le premier cas, donc nulles, et d'une intégrale $\int_{[\alpha, b', c', \alpha]}$, sur un arc de longueur aussi petite qu'on veut. Cette intégrale est aussi petite qu'on veut.

□

On peut maintenant démontrer :

Théorème 3.3.5 (Théorème de Cauchy, pour un convexe). — Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{C} . Toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ a une primitive sur Ω . Le résultat reste vrai si $f \in C^0(\Omega)$ est dérivable en tout point de Ω , sauf peut-être un.

Démonstration. — Compte tenu du Théorème 3.2.3, il suffit de montrer que

$$\int_{[a_1, \dots, a_N, a_1]} f(z) dz = 0$$

pour tout $a_1, \dots, a_N \in \Omega$. C'est vrai si $N = 2$, et c'est vrai si $N = 3$ d'après le Lemme de Goursat. Si $N \geq 4$ et compte tenu du fait que Ω est convexe,

$$\int_{[a_1, \dots, a_N, a_1]} f(z) dz = \int_{[a_1, a_2, a_3, a_1]} f(z) dz + \int_{[a_1, a_3, \dots, a_N, a_1]} f(z) dz,$$

car les images des arcs sur lesquels on intègre sont contenues dans Ω . On en déduit le résultat par récurrence sur N . □

Définition 3.3.6. — Soit c un chemin fermé dans \mathbb{C} et $z \in \mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$; on note et on définit :

$$(20) \quad \text{Ind}(c, z) := \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

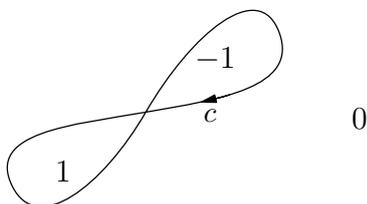
C'est l'indice de c par rapport à $z \notin \langle c \rangle$, ou l'indice de $z \notin \langle c \rangle$ par rapport à c .

Théorème 3.3.7 (Formule de Cauchy, pour un convexe). — Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Pour tout chemin fermé c dans Ω et tout $z \notin \langle c \rangle$, on a :

$$(21) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \text{Ind}(c, z) f(z).$$

Avant de prouver ce théorème (qui est un des plus grands théorèmes du XIXème siècle!), commençons par donner une interprétation géométrique de l'indice.

Proposition 3.3.8. — Soit $c: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé. La fonction $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle \ni z \mapsto \text{Ind}(c, z)$ est continue, à valeurs dans \mathbb{Z} . Elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$, et nulle sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$.



Démonstration. — La continuité de la fonction $z \mapsto \text{Ind}(c, z)$ découle de la continuité de la fonction $(t, z) \mapsto \frac{c'(t)}{c(t) - z}$ et du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (ou plus précisément, du corollaire 3.1.9).

Ensuite, prouver que le nombre $\text{Ind}(c, z)$ est entier revient à montrer que

$$\exp \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{c'(t) dt}{c(t) - z} \right) = 1.$$

Notons donc $\varphi(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{c'(s) ds}{c(s) - z} \right)$. En dérivant φ , on obtient : $\varphi'(t) = \frac{c'(t)}{c(t) - z} \varphi(t)$, donc on a

$$\frac{\varphi'(t)(c(t) - z) - \varphi(t)c'(t)}{(c(t) - z)^2} = 0,$$

sur chaque segment $[s_k, s_{k+1}]$ de la subdivision de $[t_0, t_1]$ où c est de classe C^1 . Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{c(t) - z}$ est constante sur chaque segment de la subdivision, donc constante sur $[t_0, t_1]$. On a donc $\frac{\varphi(t_0)}{c(t_0) - z} = \frac{\varphi(t_1)}{c(t_1) - z}$, or $c(t_0) = c(t_1)$, donc $\varphi(t_1) = \varphi(t_0) = \exp(0) = 1$. L'indice est donc bien à valeurs entières.

La fonction continue $z \mapsto \text{Ind}(c, z)$ est à valeurs entières donc d'après le lemme 1.8.6, elle est constante sur les composantes connexes de $\Omega \setminus \langle c \rangle$. Enfin, quitte à prendre $|z|$ assez grand on peut rendre $\left| \frac{c'(t)}{c(t) - z} \right|$ aussi petit que l'on veut, indépendamment de $t \in [t_0, t_1]$ où c est dérivable. En particulier, pour $|z|$ assez grand on a $|\text{Ind}(c, z)| < 1$, donc $\text{Ind}(c, z) = 0$ sur la composante connexe non bornée de $\Omega \setminus \langle c \rangle$. \square

Nous allons maintenant prouver le théorème 3.3.7.

Démonstration. — On écrit :

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \frac{f(z)}{\zeta - z}.$$

Par définition de l'indice :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \text{Ind}(c, z)f(z).$$

D'autre part, le point $z \notin \langle c \rangle$ étant fixé, on définit la fonction $g_z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$g_z(\zeta) = \begin{cases} (f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z) & \text{si } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{si } z \in \Omega \text{ et } \zeta = z. \end{cases}$$

La fonction g_z est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$. D'après la deuxième partie du Théorème de Cauchy, $\int_c g_z(\zeta) d\zeta = 0$. On en déduit la formule de Cauchy. \square

Le cas où le chemin fermé c est un cercle « orienté dans le sens trigonométrique » est le plus important. C'est le seul qu'on utilisera dans le prochain chapitre :

Notation 3.3.9. — On note $\partial D(a, r)$ le chemin fermé $c(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, et si $f \in C^0(C(a, r))$, on note

$$\int_{\partial D(a, r)} f(z) dz$$

l'intégrale de f sur c .

Lemme 3.3.10. — Pour tout $z \notin C(a, r)$, on a :

$$(22) \quad \text{Ind}(z, \partial D(a, r)) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in D(a, r), \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{D}(a, r). \end{cases}$$

Démonstration. — Si $z \in D(a, r)$, on a :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

avec convergence normale en $\zeta \in C(a, r)$. On peut intégrer terme à terme. Tous les termes ont des primitives en ζ sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ sauf le premier. On en déduit :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 1.$$

Si $z \notin \overline{D}(a, r)$, on a :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}},$$

avec convergence normale en $\zeta \in C(a, r)$. On peut intégrer terme à terme. Tous les termes ont des primitives en ζ sur \mathbb{C} . Les intégrales sont nulles. \square

Théorème 3.3.11. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, on a :

$$(23) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D(a, r), \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{D}(a, r). \end{cases}$$

Démonstration. — Si $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, il existe $s > r$ tel que $D(a, s) \subset \Omega$, et $D(a, s)$ est un ouvert convexe. La formule de Cauchy appliquée sur cet ouvert donne la formule pour $z \in D(a, s)$ car on sait calculer l'indice par rapport à un cercle.

Si $z \notin D(a, s)$, la fonction $\zeta \rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe sur l'ouvert convexe $D(a, s)$. Donc son intégrale de Cauchy est nulle sur le chemin $\partial D(a, r)$. \square

3.4. Les fonctions holomorphes sont analytiques

Répetons d'abord la formule de Cauchy, qui est la propriété fondamentale des fonctions holomorphes. Les autres propriétés des fonctions holomorphes étudiées dans ce cours sont des corollaires de cette formule et des propriétés élémentaires des séries entières.

Théorème 3.4.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, on a :

$$(24) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D(a, r), \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{D}(a, r). \end{cases}$$

On en déduit que les fonctions holomorphes sont analytiques :

Théorème 3.4.2. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est analytique. De plus, si $a \in \Omega$ et $r(a) = d(a, \partial\Omega)$, f est développable en série entière de $z - a$ sur $D(a, r(a))$ et cette série entière est sa série de Taylor en a .

Démonstration. — On sait déjà qu'une fonction analytique est holomorphe. On suppose maintenant $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et on se donne $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$.

Soit $z \in D(a, r)$. Pour tout $\zeta \in C(a, r)$, on a $|z - a|/|\zeta - a| = |z - a|/r < 1$ et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} (1 - (z - a)/(\zeta - a))^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n}. \end{aligned}$$

Si $M = \sup_{\zeta \in C(a, r)} |f(\zeta)|$, le terme général de la série précédente est majoré en module par

$Mr^{-1}(|z - a|/r)^n$, le terme général d'une série convergente : la série converge normalement sur $C(a, r)$. On peut donc substituer le développement précédent dans l'intégrale de Cauchy

(24) et intégrer terme à terme. On obtient :

$$(25) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{si } z \in D(a, r);$$

$$(26) \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

f est donc la somme d'une série entière de $z-a$ sur $D(a, r)$ quel que soit $0 < r < r(a)$. Par théorème, ce développement est indépendant de r : c'est la série de Taylor de f en a . \square

On a obtenu un résultat nouveau sur les fonctions analytiques : le rayon de convergence de la série de Taylor d'une fonction $f \in A(\Omega)$ en $a \in \Omega$ est égal à la distance de a au complémentaire de Ω . En particulier :

Corollaire 3.4.3. — *Si f est une fonction analytique sur $D(a, r)$, f est la somme sur ce disque de sa série de Taylor en a . Si f est une fonction entière et $a \in \mathbb{C}$, f est la somme sur \mathbb{C} de sa série de Taylor en a .*

Il n'y a pas d'analogue à ce résultat dans le cadre réel :

Exemple 3.4.4. — La fonction $t \mapsto (1+t^2)^{-1}$ est analytique sur \mathbb{R} , mais l'intervalle ouvert de convergence de sa série de Taylor en 0 est l'intervalle $] -1, +1[$. Le passage au plan complexe explique pourquoi : la fonction $z \mapsto (1+z^2)^{-1}$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$ et $D(0, 1)$ est le disque maximal centré en 0 contenu dans cet ouvert.

On dira maintenant plutôt fonction holomorphe que fonction analytique, ce qui évite la confusion possible avec les fonctions analytiques au sens réel. Certaines propriétés élémentaires des fonctions holomorphes (par exemple la stabilité par le produit) ont en fait été démontrées deux fois, dans chacun des deux cadres, holomorphe et analytique.

Dans la démonstration ci-dessus, on peut choisir de développer suivant $(z-b)$ pour $b \in D(a, r)$ i.e. pas nécessairement suivant le centre du domaine d'intégration :

Corollaire 3.4.5. — *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(a, r)}$ et $b \in D(a, r)$ alors*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{f^{(n)}(b)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} d\zeta.$$

Démonstration. — si $|z-b| < r - |b-a|$ alors il y a convergence normale en $\zeta \in C(a, r)$ de $\sum_{n \geq 0} \frac{f(\zeta)}{\zeta-b} \frac{(z-b)^n}{(\zeta-b)^n}$. Permutant série et intégrale, on obtient

$$\forall z \in D(b, r - |b-a|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-b)^{n+1}} \right) (z-b)^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient la formule. \square

Remarque 3.4.6. —

Soit $f \in C^0(C(a, r))$ alors $D(a, r) \ni z \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ est somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right) (z - a)^n.$$

L'intégrale à paramètre holomorphe (z) définit donc une fonction holomorphe sur $D(a, r)$.

On a vu que si f est la restriction d'une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{D(a, r)}$ alors cette intégrale coïncide avec f .

CHAPITRE 4

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS HOLOMORPHES

4.1. Les inégalités de Cauchy

Notation 4.1.1. — Si X est un espace topologique et $u : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, on note :

$$\|u\|_X = \sup_{x \in X} |u(x)| \in [0, +\infty].$$

Si X est compact, la borne supérieure est atteinte et la norme $\|u\|_X$ est finie.

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, on a obtenu la formule (25). Compte tenu de la relation entre les coefficients d'une série entière convergente et les dérivées de sa somme, on a donc :

$$(27) \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

On déduit les estimations de Cauchy :

Théorème 4.1.2 (Inégalités de Cauchy). — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Pour tout $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! r^{-n} \|f\|_{C(a, r)}.$$

Voici une application :

Théorème 4.1.3 (Liouville). — Toute fonction entière bornée est constante.

Démonstration. — Soit $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$. On écrit les inégalités de Cauchy en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$:

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! M r^{-n}.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $f^{(n)}(0) = 0$, sauf pour $n = 0$. Comme f est la somme de sa série de Taylor en 0, $f \equiv f(0)$. \square

Une autre démonstration. — On écrit seulement les inégalités pour $n = 1$, mais en tout point $a \in \mathbb{C}$. On obtient $|f'(a)| \leq M/r$ puis $f' \equiv 0$...

On retrouve en particulier le Théorème de d'Alembert-Gauss :

Corollaire 4.1.4. — Un polynôme non constant a une racine.

Démonstration. — En effet, si $P \in \mathbb{C}[z]$ ne s'annule pas sur \mathbb{C} , la fonction $z \mapsto 1/P(z)$ est une fonction entière qui tend vers 0 à l'infini, donc bornée. Elle est constante (Théorème de Liouville) donc aussi P . \square

On a la généralisation suivante des inégalités de Cauchy :

Théorème 4.1.5. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Soit K un compact contenu dans Ω et $0 < r < d(K, \partial\Omega)$. Notons $K(r) = \{z \in \mathbb{C}, d(z, K) \leq r\}$; c'est un compact contenu dans Ω . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f^{(n)}\|_K \leq n! r^{-n} \|f\|_{K(r)}.$$

Démonstration. — En effet, si $a \in K$, $\overline{D}(a, r) \subset K(r)$. Il suffit d'écrire les inégalités de Cauchy en a . \square

Remarque 4.1.6. — Propriétés de la distance à un ensemble :

1) Si A est une partie non vide d'un espace métrique (X, d) , alors la fonction $X \ni x \mapsto d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}$ est 1-lipschitzienne :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

En effet $\forall z \in A$, $d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ donc $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. On obtient l'inégalité en échangeant x et y .

2) On a $\overline{A} = \{x \in X, \text{ tel que } d(x, A) = 0\}$, donc A est fermé ssi $[d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A]$.

3) Si B est une autre partie non vide de X alors $d(A, B) = d(B, A) := \inf\{d(x, y), x \in X, y \in Y\} = \inf_{x \in A} d(x, B) = \inf_{y \in B} d(y, A) = d(\overline{A}, \overline{B})$

4) Si par exemple B est compact, comme $x \rightarrow d(x, A)$ est continue, il existe $b \in B$ tel que $d(b, A) = d(B, A)$ (l'inf. est un min.).

5) Donc si A est fermé, B compact et $A \cap B = \emptyset$ alors $d(A, B) > 0$.

6) Soit $\epsilon > 0$. Alors $A_\epsilon = \{x \in X, d(x, A) < \epsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon)$ est un ouvert. Si A, B sont deux parties de X telles que $d(A, B) = 2\epsilon > 0$ alors A_ϵ et B_ϵ sont deux ouverts qui séparent A et B ($A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$).

4.2. Suites de fonctions holomorphes

Définition 4.2.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une suite de fonctions $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ converge uniformément vers $u : X \rightarrow \mathbb{C}$ sur tout compact si, pour tout compact $K \subset \Omega$, $u_n|_K$ converge uniformément vers $u|_K$.

Si les u_n sont continues, ça revient à dire que $\|u_n - u\|_K \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Le résultat fondamental sur les suites de fonctions holomorphes est le suivant :

Théorème 4.2.2 (Weierstrass). — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $u_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ une suite. Si $u_n \rightarrow u$ uniformément sur tout compact de Ω , alors $u \in \mathcal{O}(\Omega)$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^{(p)} \rightarrow u^{(p)}$ uniformément sur tout compact de Ω .

Ce théorème n'a pas d'« analogue réel », bien au contraire : d'après un autre théorème de Weierstrass, toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est la limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de polynômes !

Démonstration. — La fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est continue car les u_n le sont et il y a convergence uniforme au voisinage compact de chaque point de Ω .

Si $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D(a, r)$

$$u_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

La suite de fonctions converge uniformément sur le cercle $C(a, r)$, on peut donc passer à la limite sous le signe intégrale : $\forall z \in D(a, r)$

$$u(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ce qui entraîne, comme on l'a vu, que u est analytique sur $D(a, r)$ donc holomorphe.

On applique maintenant les inégalités de Cauchy généralisées pour montrer la convergence uniforme de $u^{(p)} - u_n^{(p)}$ vers 0 :

Si $K \subset \Omega$ est compact et $r < d(K, \partial\Omega)$, $K(r) = \{z \in \mathbb{C}, d(z, K) \leq r\}$ est un compact contenu dans Ω et

$$\|u_n^{(p)} - u^{(p)}\|_K \leq C_p \|u_n - u\|_{K(r)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

où $C_p = p! r^{-p}$ ne dépend pas de n . □

4.3. Intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre

Théorème 4.3.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , T un ensemble muni (d'une tribu et) d'une mesure positive μ , et $f : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On suppose :

1. Pour presque tout $t \in T$, $z \mapsto f(z, t)$ est holomorphe sur Ω .
2. Pour tout $z \in \Omega$, $t \mapsto f(z, t)$ est mesurable.
3. Pour tout $a \in \Omega$, il existe $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ et une fonction mesurable $k : T \rightarrow [0, +\infty]$ telle que :

$$|f(z, t)| \leq k(t) \text{ si } (z, t) \in \overline{D}(a, r) \times T; \quad \int_T k(t) d\mu(t) < +\infty.$$

Alors

$$(28) \quad F(z) = \int_T f(z, t) d\mu(t)$$

définit une fonction holomorphe sur Ω et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \Omega$:

$$(29) \quad F^{(p)}(z) = \int_T \frac{\partial^p f}{\partial z^p}(z, t) d\mu(t).$$

On doit reconnaître dans cet énoncé la condition d'« intégrabilité localement dominée » des théorèmes de Lebesgue. Le point remarquable de l'énoncé est qu'on fait cette hypothèse sur f , mais pas sur ses dérivées $\partial^p f / \partial z^p$. Le point remarquable de la démonstration est qu'elle n'utilise pas le Théorème de Lebesgue.

Démonstration. — On va en fait montrer que F est analytique : Soit N un ensemble négligeable telle que $t \in T \setminus N \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{O}(\Omega)$. On montre par récurrence que les fonctions $t \mapsto f^{(n)}(z, t)$ (prolongées par 0 sur N) sont mesurables en tant que limites simples de fonctions mesurables (par exemple $f'(z, \cdot) = \lim_{m \rightarrow +\infty} m(f(z + 1/m, \cdot) - f(z, \cdot))$).

Si $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ alors $\forall t \in T \setminus N, \forall z \in D(a, r), f(z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)(z - a)^n$. Les fonctions $a_n(\cdot) = \frac{f^{(n)}(a, \cdot)}{n!}$ sont mesurables et vérifient les inégalités de Cauchy $|a_n(t)r^n| \leq k(t)$. De plus $\forall z \in D(a, r)$,

$$|f(z, t) - \sum_{n=0}^p a_n(t)(z - a)^n| \leq \sum_{n>p} |a_n(t)||z - a|^n \leq k(t) \frac{\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^{p+1}}{1 - \frac{|z-a|}{r}}.$$

Donc $\forall z \in D(a, r)$,

$$|F(t) - \sum_{n=0}^p (z - a)^n \int_T a_n(t) d\mu(t)| \leq \frac{\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^{p+1}}{1 - \frac{|z-a|}{r}} \int_T k(t) d\mu(t) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Ceci prouve que la série entière $\sum_{n \geq 0} (z - a)^n \int_T a_n(t) d\mu(t)$ converge sur $D(a, r)$ vers F . Cette fonction est donc analytique sur $D(a, r)$ et par unicité du développement en série entière,

$$F^{(p)}(a) = \int_T p! a_p(t) d\mu(t) = \int_T \frac{\partial^p f}{\partial z^p}(a, t) d\mu(t).$$

□

Exercice 4.3.2. — Soit $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x, 0) = 0$ et $f(x, t) = t/(x^2 + t)$ si $0 < t \leq 1$. Il est clair que f est bornée et que $x \mapsto f(x, t)$ est analytique sur \mathbb{R} quel que soit $t \in [0, 1]$. Montrer que $F(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$ n'est pas analytique au voisinage de 0.

4.4. Le principe du maximum

Théorème 4.4.1 (Principe du maximum). — Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} . Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ a un maximum local en $a \in \Omega$, elle est constante.

Démonstration. — L'hypothèse signifie qu'il existe $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$, tel que

$$z \in \overline{D(a, r)} \Rightarrow |f(z)| \leq |f(a)|.$$

Il suffit de montrer que $f \equiv f(a)$ au voisinage de a ; le principe du prolongement analytique permet alors de conclure. C'est évident si $f(a) = 0$. On suppose donc $f(a) \neq 0$. La démonstration est similaire à celle qu'on a donné au Chapitre 1 du Théorème de d'Alembert-Gauss.

Soit

$$z \in D(a, r), \quad \frac{f(z)}{f(a)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - a)^n,$$

et supposons f non constante. Il existe donc $p \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\frac{f(z)}{f(a)} = 1 + a_p(z-a)^p + |z-a|^p \varepsilon(z-a)$$

et $a_p \neq 0$. Soit $a_p = \rho e^{i\phi}$ (forme trigonométrique); on obtient

$$\frac{f(a + te^{-i\phi/p})}{f(a)} = 1 + \rho t^p + t^p \varepsilon(t)$$

pour tout $t \geq 0$ petit, donc $|f(a + te^{-i\phi/p})/f(a)| > 1$ si $0 \leq t$ est assez petit : $|f|$ n'a pas de maximum local en a . \square

Pour varier, on a donné une « démonstration analytique » mais on démontre facilement le principe du maximum en utilisant la formule de Cauchy :

Exercice 4.4.2. — Démontrer le théorème précédent en utilisant la formule de la moyenne, voir §4 ci-dessous.

On utilise souvent la forme suivante du principe du maximum :

Corollaire 4.4.3. — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{C} et f une fonction continue $\overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe sur Ω . On a :

$$\|f\|_{\overline{\Omega}} = \|f\|_{\partial\Omega}.$$

L'hypothèse que Ω est borné est cruciale, et les erreurs des étudiants qui appliquent le principe du maximum foisonnantes.

Démonstration. — On se ramène au cas d'un ouvert connexe. Comme Ω est borné, $\overline{\Omega}$ est compact, donc $|f|$ est bornée sur $\overline{\Omega}$ et il existe $a \in \overline{\Omega}$ tel que $\|f\|_{\overline{\Omega}} = |f(a)|$. Si $a \in \partial\Omega$, c'est terminé. Si $a \in \Omega$, f est constante sur Ω d'après le théorème précédent, donc sur $\overline{\Omega}$; c'est encore terminé. \square

L'application suivante du principe du maximum est souvent utile :

Théorème 4.4.4 (Lemme de Schwarz). — Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $D = D(0, 1)$, telle que :

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{pour tout } z \in D \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Alors :

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{pour tout } z \in D.$$

De plus, si $|f(z)| = |z|$ pour un $z \neq 0$, il existe $u \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $f(z) \equiv uz$.

Démonstration. — La fonction g définie par :

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \text{si } 0 < |z| < 1 \quad \text{et} \quad g(0) = f'(0)$$

est holomorphe sur D . En effet, si

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

sur D , on obtient un développement de g en série entière de z sur D en divisant par z .

Par hypothèse, si $0 < r < 1$, on a $|g(z)| \leq 1/r$ pour tout $z \in C(0, r)$ donc pour tout $z \in D(0, r)$ d'après le principe du maximum.

En faisant tendre r vers 1^- , on obtient $|g(z)| \leq 1$, donc $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$. C'est la première partie de l'énoncé.

Si $|f(z)| = |z|$ pour un $z \neq 0$, $|g|$ prend la valeur 1 dans D , donc a un maximum local dans D , donc g est constante de module 1, encore d'après le principe du maximum. \square

4.5. Propriété de la moyenne

Théorème 4.5.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. La valeur de f au centre a du disque $D(a, r)$ est égale à sa valeur moyenne sur le cercle $C(a, r)$, et aussi sur le disque $\overline{D}(a, r)$.

Le sens de l'énoncé est précisé par les formules (30) et (31) ci-dessous.

Démonstration. — On obtient la première propriété en écrivant la formule de Cauchy (24) pour $z = a$:

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

En revenant à la définition, on obtient :

$$(30) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

C'est la première propriété. La valeur moyenne $M(f, r)$ de f sur le disque $D(a, r)$ est définie par :

$$(31) \quad M(f, r) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a, r)} f(x + iy) dx dy.$$

On obtient la deuxième propriété en écrivant l'intégrale précédente en coordonnées polaires (de centre a) et en appliquant la première propriété aux cercles $C(a, s)$, $0 < s \leq r$:

$$M(f, r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + se^{it}) dt \right) s ds = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi f(a) s ds = f(a).$$

\square

4.6. Singularités isolées

Définition 4.6.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Un point isolé du complémentaire de Ω , i.e. tel qu'il existe un disque épointé $D(a, r) \setminus \{a\}$ contenu dans Ω , est appelée une *singularité isolée* de f .

On remarque que dans cette situation, $\Omega \cup \{a\}$ est aussi un ouvert de \mathbb{C} . Par exemple, si A est l'ensemble des pôles d'une fraction rationnelle R , chacun de ces pôles est une singularité isolée de $R \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus A)$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On dit qu'elle est :

1. *éliminable* s'il existe une fonction $\hat{f} \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{a\})$ telle que $f(z) = \hat{f}(z)$ pour tout $z \in \Omega$,

2. *polaire* si elle n'est pas éliminable et s'il existe une fonction $\hat{g} \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{a\})$ et un entier $p \geq 1$, tels que $f(z) = \hat{g}(z)/(z-a)^p$ pour tout $z \in \Omega$,
3. *essentielle* si elle n'est ni éliminable, ni polaire.

On va montrer que la nature d'une singularité isolée se lit simplement sur le comportement de f . On a d'abord :

Théorème 4.6.2 (Riemann). — *Soit a une singularité isolée de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si f est bornée sur un voisinage épointé de a , la singularité a est éliminable.*

Démonstration. — On suppose d'abord que f a une limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand $z \rightarrow a$ et on prolonge f en une fonction $\hat{f} : \Omega \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant $\hat{f}(a) = \ell$. Il s'agit de montrer que \hat{f} est holomorphe ; le problème se pose seulement au voisinage de a .

La fonction définie par $z \mapsto g(z) := (z-a)\hat{f}(z)$ est holomorphe sur Ω , mais elle est aussi \mathbb{C} -dérivable en a :

$$\frac{g(z) - g(a)}{z - a} = f(z) \xrightarrow{z \rightarrow a} \hat{f}(a).$$

Elle est donc holomorphe sur $\Omega \cup \{a\}$. Au voisinage de a , elle a un développement de la forme :

$$g(z) = (z-a) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

car $g(a) = 0$. En divisant les deux membres par $z-a$, on obtient que \hat{f} est analytique sur $D(a, r)$, donc sur $\Omega \cup \{a\}$.

Dans le cas général, où f est supposée bornée au voisinage épointé de a , on applique le résultat préliminaire à la fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = (z-a)f(z)$, qui tend vers 0 quand $z \rightarrow a$. On termine comme dans la première partie de la démonstration. \square

On a :

Théorème 4.6.3. — *Une singularité isolée a de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est polaire si et seulement si :*

$$(32) \quad f(z) \xrightarrow{z \rightarrow a} \infty.$$

Bien entendu, (32) signifie que pour tout $R > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z)| > R$ si $0 < |z-a| < \varepsilon$.

Démonstration. — On laisse au lecteur le soin de vérifier que si a est une singularité polaire de f , on a (32) ; c'est une conséquence directe de la définition.

Réciproquement, on suppose que f vérifie (32). En particulier, f ne s'annule pas au voisinage épointé de a . Il existe donc $r > 0$ tel que $z \mapsto 1/f(z)$ est définie et holomorphe sur $D(a, r) \setminus \{a\}$ et tend vers 0 quand $z \rightarrow a$. D'après le Théorème de Riemann, a est une singularité éliminable de $1/f$. Il existe donc une fonction $u \in \mathcal{O}(D(a, r))$ telle que $u(z) = 1/f(z)$ si $z \neq a$. On a $u(a) = 0$. Comme u ne s'annule pas en dehors de a , on peut écrire $u(z) = (z-a)^p v(z)$ avec $p \geq 1$ et $v \in \mathcal{O}(D(a, r))$ sans zéro. La fonction g sur Ω définie par $g(z) = (z-a)^p f(z)$ si $z \neq a$ et $g(a) = 1/v(a)$ est holomorphe sur Ω et au voisinage de a car elle coïncide avec $1/v$ au voisinage de a . On en déduit que a est une singularité polaire de f . \square

En poussant un peu l'argument précédent, on obtient le résultat plus fort suivant :

Théorème 4.6.4 (Casorati-Weierstrass). — Si $a \in \mathbb{C}$ est une singularité isolée essentielle de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors pour tout $r > 0$ tel que $D(a, r) \setminus \{a\}$ soit contenu dans Ω , $f(D(a, r) \setminus \{a\})$ est dense dans \mathbb{C} .

Un théorème beaucoup plus fort (et plus difficile à démontrer) dû à Picard précise que, sous les mêmes hypothèses, $f(D(a, r) \setminus \{a\})$ contient tous les nombres complexes, sauf peut-être un.

Démonstration. — Si $f(D(a, r) \setminus \{a\})$ n'est pas dense dans \mathbb{C} , il existe un disque $D(b, s)$ tel que

$$f(D(a, r) \setminus \{a\}) \cap D(b, s) = \emptyset.$$

La fonction

$$u(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

est holomorphe et bornée sur $D(a, r) \setminus \{a\}$:

$$|u(z)| = \frac{1}{|f(z) - b|} \leq \frac{1}{s}.$$

D'après le Théorème de Riemann, $u(z)$ a une limite finie ℓ quand $z \rightarrow a$ et :

$$f(z) = b + \frac{1}{u(z)}$$

a une limite, finie ou infinie, quand $z \rightarrow a$. D'après les résultats précédents, a est une singularité éliminable ou polaire de f . \square

Exemple 4.6.5. — Soit f une fonction entière qui n'est pas un polynôme. Alors $\forall r > 0$, $f(\{|z| > r\})$ est dense.

On montre la contraposée : Si $f(\{|z| > r_0\})$ est non dense, le théorème de Casaroti-Weierstrass entraîne que la fonction $D(0, \frac{1}{r_0}) \ni z \rightarrow f(\frac{1}{z})$ est de la forme $f(\frac{1}{z}) = \frac{g(z)}{z^k}$ pour une fonction g holomorphe sur $D(0, \frac{1}{r_0})$. Donc $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^k} = g(0)$ existe. Il existe r_1 telle que $|z| > r_1$ entraîne $|f(z)| \leq |z^k|(|g(0)| + 1)$. Les inégalités de Cauchy entraîne que f est un polynôme de degré au plus k .

4.7. Le théorème d'inversion locale

C'est le théorème suivant :

Théorème 4.7.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a \in \Omega$. Si $f'(a) \neq 0$, il existe un disque $D = D(a, r) \subset \Omega$ tel que $f(D)$ est un ouvert de \mathbb{C} et $f : D \rightarrow f(D)$ une bijection dont l'application réciproque est holomorphe.

Il en résulte que si $U \subset D$ est un ouvert, $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow f(U)$ est aussi une bijection dont l'application réciproque est holomorphe. Il existe plusieurs démonstrations intéressantes de ce théorème important.

On peut d'abord le voir comme un corollaire du théorème d'inversion locale usuel, que nous rappelons, dans notre cadre :

Théorème 4.7.2. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $f \in C^\infty(\Omega)$ et $a \in \Omega$. Si la \mathbb{R} -dérivée $T_a f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est un isomorphisme, il existe un disque $D = D(a, r) \subset \Omega$ tel que $f(D)$ est un ouvert de \mathbb{C} et $f : D \rightarrow f(D)$ une bijection dont l'application réciproque est de classe C^∞ .

Démonstration du Théorème 4.7.1. — Si f est holomorphe, f est de classe C^∞ , et si $f'(a) \neq 0$, $h \mapsto T_a f(h) = f'(a)h$ est un \mathbb{R} -isomorphisme de \mathbb{C} . Le théorème d'inversion locale usuel donne ce qu'on veut; il reste seulement à vérifier que l'application réciproque $g : f(D) \rightarrow D$ est holomorphe. Mais, de $g \circ f = \text{id}_D$, il résulte que, si $z \in D$ et $w = f(z) \in f(D)$:

$$T_w g \circ T_z f = I_{\mathbb{C}}.$$

Donc $T_w g = (T_z f)^{-1}$ est \mathbb{C} -linéaire. □

On peut aussi démontrer le Théorème 4.7.1 directement dans le cadre holomorphe, sans faire appel au théorème réel. Une méthode ⁽¹⁾ consiste, après s'être ramené au cas $a = 0$, $f(0) = 0$, à considérer la série de Taylor \hat{f} de f et à montrer que si $f'(0) \neq 0$, cette série est formellement inversible, *i.e.* qu'il existe une série formelle \hat{g} (et une seule) telle que $\hat{g}(0) = 0$ et $\hat{g} \circ \hat{f}(z) \equiv z$. Enfin, et c'est la partie délicate, on montre que la série entière \hat{g} est convergente.

On va donner une autre démonstration du théorème d'inversion locale. Elle repose sur le résultat suivant, qui a son intérêt propre :

Théorème 4.7.3 (de l'application ouverte). — Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si f n'est pas constante, f est ouverte, *i.e.* si $U \subset \Omega$ est un ouvert, $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{C} .

Dans cet énoncé, on ne fait pas d'hypothèse sur f' , sauf que f' n'est pas identiquement nulle. Il n'y a pas d'analogue à ce théorème dans le cadre réel : la fonction $x \mapsto x^2$ n'est ouverte dans aucun voisinage de 0.

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour tout $D(a, r) \subset \Omega$, $f(D(a, r))$ est un voisinage de $f(a)$ dans \mathbb{C} .

Compte tenu des hypothèses et du principe des zéros isolés, il existe $0 < s < r$ tel que $\overline{D}(a, s) \cap \{z \in \Omega, f(z) = f(a)\} = \{a\}$.

En particulier, $f(a)$ n'appartient pas au compact $f(C(a, s))$. Soit :

$$\epsilon := d(f(a), f(C(a, s))) > 0.$$

On va montrer que :

$$D(f(a), \epsilon/3) \subset f(\overline{D}(a, r)).$$

En effet, s'il existait $w \in D(f(a), \epsilon/3) \setminus f(\overline{D}(a, r))$, la fonction

$$z \mapsto g(z) = 1/(f(z) - w)$$

serait continue sur $\overline{D}(a, r)$ et holomorphe sur $D(a, r)$. On a $|g(a)| \geq 3/\epsilon$ et $|g(z)| \leq 3/(2\epsilon)$ si $z \in C(a, r)$. Il en résulte que $g : \overline{D}(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ atteint son maximum en un point de $D(a, r)$; elle est constante d'après le principe du maximum, donc f aussi. C'est une contradiction. □

1. Voir H. Cartan, *opus cité*, Chapitre I, pages 26–27.

Une autre démonstration du Théorème 4.7.1. — En composant f à gauche et à droite avec des translations, on se ramène au cas $a = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$.

Par continuité, il existe $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$ tel que f' ne s'annule pas sur $\overline{D}(a, R)$. Posons :

$$\inf_{z \in \overline{D}(a, R)} |f'(z)| := \mu > 0, \quad \|f''\|_{\overline{D}(a, R)} := M.$$

On montre d'abord :

Si $0 < r < R$ est assez petit, la restriction de f à $\overline{D}(a, r)$ est injective. En effet, si $z_1, z_2 \in \overline{D}(a, r)$, on a :

$$f(z_2) - f(z_1) - (z_2 - z_1)f'(z_1) = \int_{[z_1, z_2]} (f'(z) - f'(z_1)) dz,$$

avec

$$|f'(z) - f'(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z]} f''(\zeta) d\zeta \right| \leq M|z_2 - z_1|$$

là où on intègre, donc :

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &\geq \mu |z_2 - z_1| - M |z_2 - z_1|^2 \\ &\geq (\mu - 2rM) |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $r < R$ et $r < \mu/(2M)$, ce qu'on fait, pour avoir l'injectivité. Posons $\kappa = \mu - 2rM > 0$.

Soit $D := D(a, r)$. Compte tenu du Théorème 4.7.3, qui est crucial ici, $f(D)$ est un ouvert de \mathbb{C} .

Il reste à montrer que l'application réciproque $g : f(D) \rightarrow D$ est dérivable. On part des inégalités :

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &\geq \kappa |z_2 - z_1|, \\ |f(z_2) - f(z_1) - (z_2 - z_1)f'(z_1)| &\leq M |z_1 - z_2|^2. \end{aligned}$$

On substitue $g(w_1)$ à z_1 et $g(w_2)$ à z_2 ; on obtient :

$$\begin{aligned} |w_2 - w_1| &\geq \kappa |g(w_2) - g(w_1)|, \\ |w_2 - w_1 - (g(w_2) - g(w_1))f'(z_1)| &\leq M |g(w_1) - g(w_2)|^2, \end{aligned}$$

pour tout $w_1, w_2 \in f(D)$ et :

$$|g(w_2) - g(w_1) - (w_2 - w_1)/f'(z_1)| \leq \frac{M}{|f'(z_1)|\kappa^2} |w_1 - w_2|^2.$$

Ceci montre que g est dérivable en w_1 de dérivée $g'(w_1) = 1/f'(g(w_1))$.

CHAPITRE 5

THÉORIE DE CAUCHY ET HOMOTOPIE

5.1. Homotopie de lacets

Dans ce chapitre, il sera commode de prendre le même segment de définition pour tous les arcs considérés. On donne donc la définition suivante d'un lacet :

Définition 5.1.1. — Soit X un espace topologique. Un *lacet de* ou *dans* X est une fonction continue $c : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $c(0) = c(1)$. On dit que c est un *lacet constant* si c'est une fonction constante.

Définition 5.1.2. — Soit c_0 et c_1 deux lacets de X . Une *homotopie de* c_0 à c_1 *dans* X est une application continue $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, telle que :

1. pour tout $s \in [0, 1]$, $C(s, 0) = C(s, 1)$,
2. pour tout $t \in [0, 1]$, $C(0, t) = c_0(t)$ et $C(1, t) = c_1(t)$.

S'il existe une telle application, on dit que c_0 est *homotope* à c_1 *dans* X ⁽¹⁾.

Le pléonasme « homotopie dans $X...$ » est volontaire. Dans la suite, X sera souvent une partie d'un espace donné et il sera important d'avoir en tête que l'homotopie a lieu dans X .

Si C est une homotopie de c_0 à c_1 dans X , pour tout $s \in [0, 1]$,

$$t \in [0, 1], \quad C_s(t) := C(s, t)$$

est un lacet de X , qui « dépend continûment » du paramètre $s \in [0, 1]$, et $C_0 = c_0$, $C_1 = c_1$. On peut interpréter une homotopie de c_0 à c_1 comme une famille de lacets c_s , indexée par $0 \leq s \leq 1$, dépendant continûment de s et qui relie c_0 à c_1 .

Lemme 5.1.3. — *L'homotopie dans* X *est une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacets de* X .

Démonstration. — Soit c_1 , c_2 et c_3 trois lacets de X .

L'application $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ donnée par $C(s, t) = c_1(t)$ est une homotopie de c_1 à c_1 : l'homotopie est une relation réflexive.

1. Il y a d'autres notions d'homotopie. Celle qu'on vient de définir, l'homotopie de lacet, est la seule que nous utiliserons.

Si C est une homotopie de c_1 à c_2 , l'application $D : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ définie par

$$D(s, t) = C(1 - s, t)$$

est une homotopie de c_2 à c_1 : l'homotopie est symétrique.

Si C est une homotopie de c_1 à c_2 et D une homotopie de c_2 à c_3 , l'application $E : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ donnée par :

$$E(s, t) = \begin{cases} C(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ D(2s - 1, t) & \text{si } 1/2 < s \leq 1, \end{cases}$$

est une homotopie de c_1 à c_3 : l'homotopie est transitive. \square

La classe d'équivalence d'un lacet c pour cette relation est sa classe d'homotopie (dans X). Elle est inchangée par « changement de paramétrisation direct ». On a même mieux :

Lemme 5.1.4. — Soit $c : [0, 1] \rightarrow X$ un lacet et $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$. Les lacets c et $c \circ \phi$ sont homotopes dans X .

Démonstration. — On remarque d'abord que :

$$\forall s, t \in [0, 1], \quad (1 - s)t + s\phi(t) \in [0, 1].$$

On peut donc définir :

$$C(s, t) := c((1 - s)t + s\phi(t)).$$

C'est une homotopie de c à $c \circ \phi$ dans X . \square

On peut aussi déplacer l'origine d'un lacet sans changer sa classe d'homotopie. Si $c : [0, 1] \rightarrow X$ est un lacet d'origine $c(0) = c(1) = a \in X$, et si $b = c(h)$, $0 \leq h \leq 1$, est un point de $\langle c \rangle$,

$$c_h(t) = \begin{cases} c(h + t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 - h \\ c(h + t - 1) & \text{si } 1 - h \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est un lacet d'origine b , et $C(s, t) = c_{sh}(t)$, $s, t \in [0, 1]$, est une homotopie de c à c_h dans X .

Définition 5.1.5. — Un lacet est *homotope à un point* dans X s'il est homotope à un lacet constant dans X . L'espace X est dit *simplement connexe* si X est connexe par arcs et si tout lacet de X est homotope à un point dans X .

Lemme 5.1.6. — Si l'espace X est connexe par arcs, deux lacets constants de X sont homotopes.

Démonstration. — Si $c_0(t) \equiv a$, $c_1(t) \equiv b$ et si $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ est un arc de a à b , $C(s, t) := \phi(s)$, $s, t \in [0, 1]$, est une homotopie de c_0 à c_1 . \square

La simple connexité est une propriété topologique, c'est-à-dire invariante par homéomorphisme :

Théorème 5.1.7. — Si X est un espace topologique simplement connexe et si X' est homéomorphe à X , X' est simplement connexe.

Démonstration. — Soit $\phi : X \rightarrow X'$ un homéomorphisme. Si $c : [0, 1] \rightarrow X$ est un arc de a à b dans X , $\phi \circ c : [0, 1] \rightarrow X'$ est un arc de $\phi(a)$ à $\phi(b)$ dans X' . On en déduit que la connexité par arcs est une propriété topologique.

On voit facilement que l'application $c \mapsto \phi \circ c$ induit une bijection de l'ensemble des lacets de X sur l'ensemble des lacets de X' . On vérifie aussi que si C est une homotopie du lacet c_0 au lacet c_1 dans X , $\phi \circ C$ est une homotopie du lacet $\phi \circ c_0$ au lacet $\phi \circ c_1$ dans X' . \square

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ la norme de E , et si $c : [0, 1] \rightarrow E$, on note :

$$\|c\|_{[0,1]} = \sup_{t \in [0,1]} \|c(t)\|.$$

Si Ω est un ouvert non vide de E et K un compact non vide contenu dans Ω , on note :

$$d(K, \partial\Omega) = \inf\{\|x - y\|, x \in K, y \in E \setminus \Omega\}$$

la distance de K au complémentaire de Ω . Rappelons que cette distance est strictement positive (c'est $+\infty$ si $\Omega = E$).

Définition 5.1.8. — Une partie X est *étoilée* par rapport à un de ses points $a \in X$ si pour tout $x \in X$, le segment $[a, x]$ est contenu dans X .

Exemple 5.1.9. — Par exemple un ensemble convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points. \mathbb{C} privé d'une demi-droite fermée $S_{a,v} = \{a + \lambda v, \lambda \in [0, +\infty[\}$ est étoilé par rapport à chaque point de $\{a - \lambda v, \lambda \in [0, +\infty[\}$. En effet après transformation affine, il suffit de montrer que $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ est étoilé par rapport à $t \in]-\infty, 0[$: soit $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Si $z \in]-\infty, 0[$ alors $[t, z] \subset \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Sinon $y \neq 0$ donc la partie imaginaire de $st + (1-s)z$, $s \in [0, 1]$, est nulle seulement pour $s = 1$.

Théorème 5.1.10. — Si $X \subset E$ est étoilé par rapport à un de ses points $a \in X$ alors X est simplement connexe.

Démonstration. — Il découle de la définition d'une partie étoilée qu'elle est connexe (voir le lemme 1.8.3). Il reste à montrer que tout lacet γ est homotope à un point.

On définit $R : [0, 1] \times E \rightarrow E$ par $R(s, x) = (1-s)x + sa$. Cette application est continue, et pour tout $x \in E$, $R(s, x) \in [a, x]$. Comme X est étoilé par rapport à $a \in X$, la restriction de R à $[0, 1] \times X$ est à valeurs dans X . On garde la même notation pour sa restriction $R : [0, 1] \times X \rightarrow X$.

Alors pour tout $x \in X$, $R(0, x) = x$ et $R(1, x) = a$. Si c est un lacet dans X alors on définit $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ par $H(s, t) = R(s, c(t))$: c'est une homotopie entre c et le chemin constant a (on dit que R définit un rétract par déformation de X sur a). \square

Lemme 5.1.11. — Soit Ω un ouvert de E , c_0 et c_1 deux lacets de Ω . Si :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \|c_1(t) - c_0(t)\| < d(c_0(t), \partial\Omega),$$

l'homotopie standard de c_0 à c_1 définie par

$$(33) \quad s, t \in [0, 1], \quad C(s, t) := (1-s)c_0(t) + sc_1(t),$$

prend ses valeurs dans Ω . C'est en particulier le cas si :

$$\|c_1 - c_0\|_{[0,1]} < d(\langle c_0 \rangle, \partial\Omega).$$

Démonstration. — En effet, si $C(s, t) = (1 - s)c_0(t) + sc_1(t)$,

$$\|C(s, t) - c_0(t)\| = s\|c_1(t) - c_0(t)\| \leq \|c_1(t) - c_0(t)\| < d(c_0(t), \partial\Omega),$$

donc $C(s, t) \in \Omega$. □

5.2. Les théorèmes de Cauchy : versions homotopiques

Théorème 5.2.1 (Cauchy). — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si c_0 et c_1 sont deux lacets de classe C_{pm}^1 homotopes dans Ω , on a :

$$\int_{c_0} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz.$$

Démonstration. — Soit C une homotopie de c_0 à c_1 dans Ω et $K := C([0, 1] \times [0, 1])$ son image. C'est un compact contenu dans Ω . Soit $d := d(K, \partial\Omega) > 0$ la distance de K au bord de Ω .

Par continuité uniforme de C , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$\max(|s - s'|, |t - t'|) < \frac{1}{n} \Rightarrow \|C(s, t) - C(s', t')\| < \frac{d}{2} = \alpha.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, notons D_k le lacet polygonal $[C(\frac{k}{n}, 0), C(\frac{k}{n}, \frac{1}{n}), \dots, C(\frac{k}{n}, \frac{n-1}{n}), C(\frac{k}{n}, 1)]$ paramétré par $[0, 1]$ comme ci dessus. De sorte que

$$\|D_k - C(\frac{k}{n}, \cdot)\|_{[0,1]} < 2\alpha = d.$$

Notons $D_{-1} = c_0$ et $D_{n+1} = c_1$.

Pour $-1 \leq i \leq n$ et $0 \leq k \leq n$, le chemin fermé

$$H_{i,k} = D_{i|\lfloor \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \rfloor} \vee [D_i(\frac{k+1}{n}), D_{i+1}(\frac{k+1}{n})] \vee \text{opp} \left([D_i(\frac{k}{n}), D_{i+1}(\frac{k}{n})] \vee D_{i+1|\lfloor \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \rfloor} \right)$$

est telle que

$$\text{dist}(D_i(\frac{k}{n}), \langle H_{i,k} \rangle) = \max\{\|D_i(\frac{k}{n}) - y\|, y \in \langle H_{i,k} \rangle\} < 2\alpha$$

Or $f \in \mathcal{O}(D(D_i(\frac{k}{n}), 2\alpha))$ et le disque est convexe. Donc $\int_{H_{i,k}} f(z) dz = 0$. C'est à dire (omettons $f(z) dz$ dans les intégrales ci dessous) :

$$\int_{D_{i|\lfloor \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \rfloor}} - \int_{D_{i+1|\lfloor \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \rfloor}} = \int_{[D_i(\frac{k}{n}), D_{i+1}(\frac{k}{n})]} - \int_{[D_i(\frac{k+1}{n}), D_{i+1}(\frac{k+1}{n})]}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{c_0} - \int_{c_1} &= \sum_{i=-1}^n \int_{D_i} - \int_{D_{i+1}} = \sum_{i=-1}^n \sum_{k=0}^n \int_{D_{i|\lfloor \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \rfloor}} - \int_{D_{i+1|\lfloor \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \rfloor}} \\ &= \sum_{i=-1}^n \sum_{k=0}^n \int_{[D_i(\frac{k}{n}), D_{i+1}(\frac{k}{n})]} - \int_{[D_i(\frac{k+1}{n}), D_{i+1}(\frac{k+1}{n})]} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=-1}^n \int_{[D_i(0), D_{i+1}(0)]} - \int_{[D_i(1), D_{i+1}(1)]} = 0$$

□

On peut étendre la formule de Cauchy aux lacets homotopes à un point dans le domaine de définition de la fonction qu'on intègre.

Théorème 5.2.2 (Formule de Cauchy). — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Soit c un chemin fermé de Ω homotope à un point dans Ω . C'est le cas pour tout chemin fermé de Ω si Ω est simplement connexe. Alors

$$\forall z \notin \langle c \rangle, \quad \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \text{Ind}(c, z) f(z).$$

Démonstration. —

i) Le point $z \notin \langle c \rangle$ étant fixé, on définit la fonction $g_z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$g_z(\zeta) = \begin{cases} (f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z) & \text{si } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{si } z \in \Omega \text{ et } \zeta = z. \end{cases}$$

La fonction g_z est holomorphe sur Ω : c'est clair sur $\Omega \setminus \{z\}$. Mais comme f est analytique au voisinage de z , on a $f(\zeta) - f(z) = (\zeta - z) \sum_{n \geq 1} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (\zeta - z)^{n-1} = (\zeta - z)g(\zeta)$ avec g holomorphe au voisinage $D(z, \epsilon)$ de z telle que $g(z) = f'(z)$. Donc $g_z|_{D(z, \epsilon)} = g$ est holomorphe au voisinage de z .

D'après la deuxième partie du Théorème de Cauchy, $\int_c g_z(\zeta) d\zeta = 0$. On en déduit la formule de Cauchy. □

On a vu que l'indice $\text{Ind}(c, z)$ est nul lorsque z est dans la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$. Le théorème de Cauchy homotopique nous donne un résultat un peu plus général :

Corollaire 5.2.3. — Soit $a \in \mathbb{C}$, et soient c_1 et c_2 deux chemins homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Alors $\text{Ind}(c_1, a) = \text{Ind}(c_2, a)$.

Le théorème de Cauchy homotopique entraîne :

Corollaire 5.2.4. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si c est un lacet de classe C_{pm}^1 de Ω , homotope à un point dans Ω , alors :

$$\int_c f(z) dz = 0.$$

Par définition d'un ouvert simplement connexe, on a donc :

Théorème 5.2.5. — Si Ω est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} ,

$$\int_c f(z) dz = 0,$$

pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et tout chemin fermé c de Ω . Toute $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ a une primitive sur Ω .

On en déduit :

Théorème 5.2.6. — Soit Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si f ne s'annule pas sur Ω , il existe une fonction $\phi \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f(z) = e^{\phi(z)}$ pour tout $z \in \Omega$. En particulier, si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ est un ouvert simplement connexe, il existe une détermination holomorphe de $\log z$ sur Ω .

Démonstration. — Si f ne s'annule pas sur Ω , la fonction $z \mapsto f'(z)/f(z)$ est holomorphe donc admet une primitive $\phi \in \mathcal{O}(\Omega)$. Étant donné $a \in \Omega$ et quitte à ajouter une constante à la fonction ϕ , on peut supposer que $\phi(a)$ est un logarithme de a . *i.e.* que $e^{\phi(a)} = f(a)$. Posons :

$$u(z) = f(z)^{-1}e^{\phi(z)}.$$

C'est une fonction holomorphe et on calcule :

$$u'(z) = -u(z)f'(z)f(z)^{-2} + \phi'(z)f(z)^{-1}u(z) = 0.$$

Comme Ω est connexe, la fonction u est constante, égale à $u(a) = 1$. On obtient $e^{\phi(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$. \square

5.3. L'indice d'un point par rapport à un lacet

On a défini au Chapitre 4 l'indice d'un point $a \in \mathbb{C}$ par rapport à un chemin fermé c tel que $a \notin \langle c \rangle$:

$$\text{Ind}(a, c) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{dz}{z - a}.$$

Cet indice intervient, comme on l'a vu, dans la formule de Cauchy. Pour l'instant, on ne l'a calculé que dans le cas où c est « un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique ». Un peu plus généralement, l'indice de

$$t \in [0, 1], \quad c_n(t) = e^{i2n\pi t},$$

par rapport à 0 vaut

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{c_n'(t)}{c_n(t)} dt = n.$$

C'est le nombre de tours, comptés algébriquement, que c_n fait autour de 0. On va voir que cette interprétation est valable en général.

Définition 5.3.1. — Soit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ un arc. On appelle *détermination continue de l'argument le long de c* toute fonction continue $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\theta(t)$ soit un argument de $c(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, *i.e.* telle que $c(t) = |c(t)|e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Il ne faut pas confondre cette notion avec celle, déjà introduite, de détermination continue de l'argument sur une partie de \mathbb{C}^* : il n'existe pas de détermination continue de l'argument sur S , mais $\theta(t) = 2\pi t$ est évidemment une détermination continue de l'argument le long du lacet $c : [0, 1] \rightarrow S$ défini par $c(t) = e^{i2\pi t}$, d'image S !

Le résultat suivant est important :

Théorème 5.3.2. — Pour tout arc $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$, il existe une détermination continue de l'argument le long de c . Elle est unique à l'addition près d'une constante $\in 2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. — On montre d'abord l'unicité modulo $2\pi\mathbb{Z}$. Si $\theta, \theta_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux déterminations continues de l'argument le long de l'arc c , $\theta_1 - \theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$: elle est constante.

On montre maintenant l'existence. Soit $d := \inf_{0 \leq t \leq 1} |c(t)|$. On a $d > 0$. Par continuité uniforme de $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$, il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ telle que :

$$c([t_k, t_{k+1}]) \subset D_k := D(c(t_k), d)$$

pour $k = 0, \dots, t_{N-1}$. Comme D_k est un disque contenu dans \mathbb{C}^* , on sait qu'il existe une détermination continue

$$\Theta_k : D_k \rightarrow \mathbb{R}$$

de l'argument sur D_k . On définit la fonction $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $\theta(0) = \Theta_0(c(0))$ et, si $k = 0, \dots, N - 1$:

$$\text{si } t_k < t \leq t_{k+1}, \quad \theta(t) = \Theta_k(c(t)) + 2\pi n_k,$$

où $n_0 = 0$ et n_1, \dots, n_{N-1} sont des entiers que l'on choisit de façon que la fonction θ soit continue. Par exemple, n_1 est déterminée par :

$$\Theta_0(c(t_1)) = \Theta_1(c(t_1)) + 2\pi n_1.$$

C'est possible puisque $\Theta_0(c(t_1))$ et $\Theta_1(c(t_1))$ sont des arguments du même nombre $c(t_1)$. On détermine ainsi les entiers n_k par récurrence. \square

Remarque 5.3.3. — Notons que θ est de classe C_{pm}^1 si c l'est : Si c est C^1 au voisinage de $t \in]0, 1[$ fixé, choisissons une détermination analytique du logarithme L sur $D(c(t), |c(t)|)$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $c(]t - \epsilon, t + \epsilon[) \subset D(c(t), |c(t)|)$. Alors $ImL \circ c$ est une détermination continue de l'argument de c sur $]t - \epsilon, t + \epsilon[$ qui est de classe C^1 . Comme il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta - ImL \circ c = 2ik\pi$ sur $]t - \epsilon, t + \epsilon[$, l'assertion est montrée.

On peut maintenant donner une autre interprétation de l'indice d'un point par rapport à un chemin fermé et donner plusieurs propriétés importantes de l'indice. Par translation, il suffit de comprendre le cas où le point est 0 :

Théorème 5.3.4. — Soit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ un chemin fermé, et $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une détermination continue de l'argument le long de c . On a :

$$(34) \quad \text{Ind}(0, c) = \frac{1}{2\pi} (\theta(1) - \theta(0)).$$

Autrement dit, l'indice est égal à la « variation de l'argument le long de c » divisée par 2π . En particulier, c 'est un entier relatif.

Démonstration. — Comme c ne prend pas la valeur 0, la fonction $\rho(t) = |c(t)|$ est de classe C_{pm}^1 . On a :

$$c(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}, \quad c'(t) = \rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)},$$

donc :

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + i\theta'(t).$$

Compte tenu de la définition de l'indice, on obtient :

$$\text{Ind}(0, c) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{c'(t)}{c(t)} dt = \frac{1}{2i\pi} [\text{Log } |\rho(t)| + i\theta(t)]_0^1$$

et le résultat. \square

Le résultat précédent permet aussi de définir l'indice d'un lacet, sans supposer qu'il soit de classe C_{pm}^1 .

Définition 5.3.5. — Soit $a \in \mathbb{C}$ et c un lacet de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. On définit et on note *l'indice de a par rapport à c* :

$$\text{Ind}(a, c) = \frac{1}{2\pi} (\theta(1) - \theta(0)),$$

où θ est une détermination de l'argument de $z - a$ le long de c ; ça ne dépend pas du choix de θ . C'est un entier rationnel.

Le Théorème de Cauchy donne facilement le résultat suivant dans le cas des lacets de classe C_{pm}^1 . C'est un exercice conseillé.

Théorème 5.3.6. — On a :

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Deux lacets homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ont le même indice par rapport à a .
2. Soit c un lacet de \mathbb{C} . La fonction

$$\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle \ni z \mapsto \text{Ind}(z, c) \in \mathbb{Z}$$

est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$. Elle est nulle sur sa composante non bornée.

Démonstration. — Pour démontrer la première propriété, il suffit de montrer que deux lacets c_0 et c_1 de \mathbb{C}^* ont le même indice par rapport à 0 si $\|c_1 - c_0\|_{[0,1]}$ est assez petit. C'est une conséquence du lemme suivant

Lemme 5.3.7. — Si deux lacets $c_0, c_1 : I \rightarrow \mathbb{C}^*$ vérifient :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |c_1(t) - c_0(t)| < |c_0(t)|,$$

ils ont le même indice par rapport à 0.

Démonstration. — Soit c_0 et c_1 comme dans l'énoncé, et θ une détermination continue de l'argument le long de c_0 . Soit $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ la détermination principale de l'argument. On a :

$$\left| \frac{c_1(t)}{c_0(t)} - 1 \right| < 1.$$

Il en résulte que $K(t) := \text{Arg}(c_1(t)/c_0(t))$ est bien défini et que

$$t \mapsto \theta(t) + K(t)$$

est une détermination continue de l'argument le long de c_1 . On a $K(0) = K(1)$ et le résultat. \square

Pour la deuxième partie de l'énoncé, on note que si $a \notin \langle c \rangle$ et $|h| < d(a, \langle c \rangle)$, les lacets c et $c - h$ sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Donc, si $|z - a| < d(a, \langle c \rangle)$, on a :

$$\text{Ind}(z, c) = \text{Ind}(a, c - (z - a)) = \text{Ind}(a, c).$$

La fonction $z \mapsto \text{Ind}(z, c)$ est donc localement constante sur $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$. Enfin, si $\langle c \rangle \subset \overline{D}(0, r)$, c est homotope à un point dans ce disque (convexe donc simplement connexe), donc aussi dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, si $|z| > r$. \square

Corollaire 5.3.8. — *Le plan épointé \mathbb{C}^* et le cercle unité ne sont pas simplement connexes.*

Démonstration. — L'indice du lacet $c(t) = e^{i2\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$, par rapport à 0 est 1. Ce lacet n'est donc pas homotope à un point dans \mathbb{C}^* ni *a fortiori* dans le cercle unité. \square

Pour terminer, on détermine les classes d'homotopie dans \mathbb{C}^* et dans le cercle unité S :

Théorème 5.3.9. — *Deux lacets de \mathbb{C}^* (respectivement de S) sont homotopes dans \mathbb{C}^* (respectivement dans S) si et seulement s'ils ont le même indice par rapport à 0.*

Corollaire 5.3.10. — *Tout lacet de \mathbb{C}^* (respectivement de S) est homotope dans \mathbb{C}^* (respectivement dans S) à un et un seul des lacets $c_n(t) = e^{in2\pi t}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Comme on a calculé $\text{Ind}(0, c_n) = n$, il suffit de montrer qu'un lacet c d'indice n par rapport à 0 est homotope au lacet c_n . On utilisera plusieurs fois le fait que l'homotopie de lacets est une relation d'équivalence.

Si c est un lacet de \mathbb{C}^* ,

$$t \in [0, 1], \quad c^*(t) = \frac{c(t)}{|c(t)|}$$

est un lacet de S et l'homotopie standard de c à c^* prend ses valeurs dans \mathbb{C}^* . En effet :

$$|(1-s)c(t) + sc^*(t)| = (1-s)|c(t)| + s > 0.$$

Donc tout lacet de \mathbb{C}^* est homotope dans \mathbb{C}^* à un lacet de S . Il suffit de démontrer le théorème dans le cas de S .

Soit c un lacet de S , $c(0) = e^{it_0} \in S$. L'homotopie $C(s, t) = e^{-ist_0}c(t)$, $s, t \in [0, 1]$, est une homotopie de c à $e^{-it_0}c$ dans S . On peut donc supposer $c(0) = 1$.

Soit n l'indice de 0 par rapport à c et θ une détermination continue de l'argument le long de c , telle que $\theta(0) = 0$. Par hypothèse, on a :

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 2n\pi.$$

Soit :

$$s, t \in [0, 1], \quad C(s, t) = e^{i((1-s)\theta(t) + s2n\pi t)}.$$

On a $C(0, t) \equiv c(t)$ et $C(1, t) = c_n(t)$. C'est une homotopie (de lacets). En effet, pour tout $s \in [0, 1]$, on a :

$$C(s, 0) = e^{i((1-s)\theta(0))} = 1, \quad C(s, 1) = e^{i((1-s)\theta(1) + s2n\pi)} = 1.$$

\square

Exercice 5.3.11. — Montrer que si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et la sphère S^n définie par :

$$S^n := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1 \right\}$$

sont simplement connexes.

CHAPITRE 6

LA FORMULE DES RÉSIDUS

6.1. Séries et développements de Laurent

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On note respectivement :

$$A(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - a| < R\},$$
$$\bar{A}(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}, r \leq |z - a| \leq R\},$$

l'anneau ouvert et l'anneau fermé de centre a et de rayons r et R . Quand on utilisera ces notations, il sera toujours sous-entendu que $0 \leq r < R$.

On appelle *série de Laurent en $a \in \mathbb{C}$, ou de $z - a$* , une « série » de la forme :

$$(35) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - a)^n,$$

où $a_n \in \mathbb{C}$. La série converge pour $z \in \mathbb{C}$ fixé si chacune des deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n$ et

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - a)^{-n}$ converge au sens usuel. En fait, on ne s'intéressera qu'à la convergence absolue de la série.

Exemple 6.1.1. — La série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n / (1 + n^2)$ converge si et seulement si $|z| = 1$.

Définition 6.1.2. — Le *domaine ouvert de convergence* d'une série de Laurent est l'intérieur de son domaine de convergence. S'il n'est pas vide, la série de Laurent est dite convergente.

Une série entière est un cas particulier de série de Laurent. En général, l'étude d'une série de Laurent se ramène à celle de deux séries entières.

Théorème 6.1.3. — *Le domaine ouvert de convergence d'une série de Laurent de $(z - a)$ convergente est un disque ouvert $D(a, R)$ si c'est une série entière, un anneau ouvert $A(a, r, R)$ sinon. Dans le second cas, la série est normalement convergente sur tout anneau fermé $\bar{A}(a, s, S) \subset A(a, r, R)$.*

Démonstration. — On peut supposer que la série est donnée par (35) et que ce n'est pas une série entière. Soit D et D' les domaines de convergences et R et R' les rayons de convergence

des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$. On sait que :

$$D(0, R) \subset D \subset \overline{D}(0, R), \quad D(0, R') \subset D' \subset \overline{D}(0, R').$$

Posons $r = 1/R'$. On en déduit que le domaine Δ de convergence de la série (35) vérifie

$$D(a, R) \setminus \overline{D}(a, r) \subset \Delta \subset \overline{D}(a, R) \setminus D(a, r).$$

Si $R < r$, c'est l'ensemble vide ; si $R = r$, Δ est contenu dans le cercle de centre a et de rayon r , donc est d'intérieur vide. Enfin, si $r < R$, la série est convergente et

$$A(a, r, R) \subset \Delta \subset \overline{A}(a, r, R).$$

C'est la première partie de l'énoncé.

Si $r < s < S < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, S)$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - a)^{-n}$ converge normalement sur le complémentaire de $D(0, s)$. D'où la deuxième partie de l'énoncé. \square

Lemme 6.1.4. — *Les coefficients d'une série de Laurent convergente sur $A(a, r, R)$ sont déterminés par sa somme f qui définit une fonction holomorphe sur $A(a, r, R)$:*

$$(36) \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, s)} f(z) (z - a)^{-(n+1)} dz.$$

Démonstration. — Supposons que la série (35) converge sur l'anneau ouvert $A(a, r, R)$. Notons f sa somme. La fonction $f_1 : z \rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est définie holomorphe sur $D(0, R)$, la fonction

$f_2 : u \rightarrow \sum_{n \geq 1} a_{-n} u^n$ est définie et holomorphe sur $D(0, r^{-1})$ donc $z \rightarrow f(z) = f_1(z) + f_2(\frac{1}{z})$ est

holomorphe sur $A(a, r, R)$. Soit $r < s < R$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on calcule :

$$\int_{\partial D(a, s)} f(z) (z - a)^n dz.$$

Comme la convergence de (35) est normale sur le cercle $\partial D(a, s)$, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_{\partial D(a, s)} f(z) (z - a)^n dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{\partial D(a, s)} (z - a)^{k+n} dz.$$

La fonction $z \mapsto (z - a)^{k+n}$ a une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, sauf si $k + n = -1$. La somme ci-dessus se réduit donc au terme d'indice $k = -n - 1$ et l'on obtient :

$$(37) \quad a_{-n-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, s)} f(z) (z - a)^n dz.$$

D'où le lemme. □

On étudie maintenant la réciproque.

Notation 6.1.5. — Soit $f \in \mathcal{O}(A(a, r, R))$. Étant donnés $r < s < S < R$, on note :

$$\int_{\partial A(a, s, S)} f(z) dz := \int_{\partial D(a, S)} f(z) dz - \int_{\partial D(a, s)} f(z) dz.$$

C'est l'intégrale de f sur le bord orienté de l'anneau $A(a, s, S)$.

Théorème 6.1.6 (Formule de Cauchy sur un anneau). — Soit $f \in \mathcal{O}(A(a, r, R))$ et $\bar{A}(a, s, S) \subset A(a, r, R)$. On a :

$$\forall z \in A(a, s, S), \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial A(a, s, S)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Démonstration. — Soit $z \in A(a, s, S)$; z étant fixé, on pose :

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, \quad g(z) = f'(z).$$

C'est une fonction holomorphe sur $A(a, r, R)$. Les lacets $\partial D(a, s)$ et $\partial D(a, S)$ sont donnés respectivement par :

$$0 \leq t \leq 1, \quad c_0(t) = a + se^{i2\pi t}, \quad c_1(t) = a + Se^{i2\pi t}.$$

Ils sont homotopes dans $A(a, r, R)$:

$$u, t \in [0, 1], \quad C(u, t) = a + ((1 - u)s + uS)e^{i2\pi t}$$

est une homotopie de c_0 à c_1 dans $A(a, r, R)$. D'après le Théorème de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial A(a, s, S)} g(\zeta) d\zeta = 0.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial A(a, s, S)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{\partial A(a, s, S)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= f(z)(\text{Ind}(z, \partial D(a, S)) - \text{Ind}(z, \partial D(a, s))). \end{aligned}$$

Comme $z \in A(a, s, S)$, l'indice de z par rapport au lacet $\partial D(a, s)$ est nul et son indice par rapport au lacet $\partial D(a, S)$ vaut 1. D'où le théorème. □

De même que la formule de Cauchy sur un disque donne l'existence du développement en série entière d'une fonction holomorphe, la formule de Cauchy sur un anneau donne l'existence du développement d'une fonction holomorphe sur un anneau en série de Laurent.

Théorème 6.1.7. — Toute fonction holomorphe f sur l'anneau ouvert $A(a, r, R)$ est la somme d'une (unique) série de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - a)^n$ sur cet anneau. De plus, $\forall s \in]r, R[$, $a_n =$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, s)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz.$$

On dit que c'est la série de Laurent de f sur l'anneau $A(a, r, R)$.

Démonstration. — L'unicité a déjà été démontrée, voir Lemme 6.1.4. Si $r < s < S < R$ et $z \in A(a, s, S)$, on écrit :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, S)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dans la première intégrale, on utilise le développement normalement convergent

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

et dans la seconde, le développement normalement convergent

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}.$$

En intégrant terme à terme, on obtient que la restriction de f à l'anneau $A(a, s, S)$ est la somme d'une série de Laurent. Compte tenu de l'unicité, la série de Laurent qu'on obtient est indépendante de s et S tant que $r < s < S < R$. D'où le théorème. \square

On déduit les inégalités de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall s \in]r, R[, |a_n|s^n \leq \|f\|_{\infty, \partial D(a, s)}.$$

Corollaire 6.1.8. — Toute fonction $f \in \mathcal{O}(A(a, r, R))$ peut s'écrire

$$z \in A(a, r, R), \quad f(z) = g(z) + h(z),$$

où g est holomorphe sur $D(a, R)$ et h holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a, r)$.

Démonstration. — Si $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - a)^n$, il suffit de prendre

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - a)^n, \quad h(z) = \sum_{n < 0} a_n(z - a)^n.$$

\square

Remarque 6.1.9. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $A(a, r, R), A(a, r', R') \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. La fonction f est la somme d'une série de Laurent en $(z - a)$ sur $A(a, r, R)$ et aussi sur $A(a, r', R')$. D'après le théorème précédent, si ces anneaux ont une intersection non vide, ces deux séries coïncident. C'est faux en général si l'intersection des anneaux est vide, même si Ω est connexe. On pourra, pour s'en convaincre, développer $f(z) = 1/z + 1/(z - 1)$ en série de Laurent sur $A(0, 0, 1)$ et sur $A(0, 1, +\infty)$.

6.2. Développement de Laurent en une singularité isolée

Soit $a \in \mathbb{C}$ une singularité isolée d'une fonction holomorphe f : f est holomorphe sur un disque époinché $D(a, r) \setminus \{a\} = A(a, 0, r)$. Les résultats de la section précédente s'appliquent.

On dira que le développement de Laurent de f en puissance de $(z - a)$ sur $D(a, r) \setminus \{a\}$ est son développement de Laurent en a .

Proposition 6.2.1. — Soit $f \in \mathcal{O}(D(a, r) \setminus \{a\})$ et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - a)^n$$

le développement de Laurent de f en a . La singularité a est éliminable si et seulement si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. Elle est polaire si et seulement s'il existe $p > 0$ tel que $a_{-p} \neq 0$ et $a_{-n} = 0$ pour tout $n > p$.

Démonstration. — Compte tenu de l'unicité du développement de Laurent, la série de Laurent d'une fonction holomorphe sur $D(a, r)$ est une série entière. C'est la première propriété.

Si la singularité a est polaire ou éliminable, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que a soit une singularité éliminable de $z \mapsto g(z) = (z - a)^p f(z)$. La série de Laurent de f en a est obtenue en multipliant la série de Taylor de \tilde{g} (le prolongement holomorphe de g sur $D(a, r)$) par $(z - a)^{-p}$. \square

Définition 6.2.2. — Soit a une singularité isolée de $f \in \mathcal{O}(D(a, r) \setminus \{a\})$.

1) La série $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - a)^n$ converge sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Sa somme est une fonction holomorphe sur

$\mathbb{C} \setminus \{a\}$ appelée partie principale de f en a .

2) Le coefficient a_{-1} de $(z - a)^{-1}$ dans le développement de Laurent de f en a est le résidu de f en a . On le note $\text{Rés}(f, a)$. Pour tout $0 < s < r$, on a :

$$(38) \quad \text{Rés}(f, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, s)} f(z) dz.$$

La formule ci-dessus a été démontrée plus haut, voir (36). L'importance du résidu vient du lemme suivant :

Lemme 6.2.3. — Une fonction holomorphe sur $D(a, r) \setminus \{a\}$ a une primitive sur $D(a, r) \setminus \{a\}$ si et seulement si son résidu en a est nul.

Démonstration. — Si f a une primitive sur $D(a, r) \setminus \{a\}$, son intégrale sur tout chemin fermé de $D(a, r) \setminus \{a\}$ est nulle. En particulier, si $0 < s < r$,

$$2i\pi \text{Rés}(f, a) = \int_{\partial D(a, s)} f(z) dz = 0.$$

Réciproquement, si le résidu de f en a est nul, f est de la forme $f(z) = \sum_{n \neq -1} a_n (z - a)^n$; f est alors la dérivée sur $D(a, r) \setminus \{a\}$ de la somme de la série de Laurent

$$\sum_{n \neq -1} a_n (z - a)^{n+1} / (n + 1).$$

\square

6.3. La formule des résidus

Théorème 6.3.1 (Formule des résidus). — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , A une partie finie de Ω et $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$. Si c un chemin fermé homotope à un point dans Ω et $\langle c \rangle \subset \Omega \setminus A$, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Rés}(f, a) \times \text{Ind}(a, c).$$

C'est en particulier le cas pour tout chemin fermé de $\Omega \setminus A$ si Ω est simplement connexe.

Démonstration. — Soit $A = \{a_1, \dots, a_N\}$. Pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$,

Soit f_k la partie principale de f en a_k :

$$f_k(z) = \sum_{n < 0} u_{k,n}(z - a_k)^n$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$. Posons :

$$z \in \Omega \setminus A, \quad g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^N f_k(z).$$

C'est une fonction holomorphe telle que chaque singularité a_k est éliminable. Notons \tilde{g} son prolongement holomorphe à Ω . D'après le théorème de Cauchy :

$$\int_c \tilde{g}(z) dz = 0.$$

D'autre part, pour $k = 1, \dots, N$, on peut écrire :

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{a_k\}, \quad f_k(z) = \frac{r_k}{z - a_k} + h_k(z),$$

où r_k est le résidu de f en a_k et où h_k (la somme des termes de degrés < -1 dans le développement de Laurent de f en a_k) possède une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$. On a donc

$$1 \leq k \leq N, \quad \int_c h_k(z) dz = 0$$

et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c f_k(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{r_k dz}{z - a_k} = \text{Rés}(f, a_k) \times \text{Ind}(a_k, c).$$

On en déduit le théorème. □

Remarque 6.3.2. — On a un énoncé analogue sans hypothèse que A est fini, il suffit de supposer A fermé discret dans Ω .

6.4. Fonctions méromorphes

Un ensemble $P \subset \mathbb{C}$ est *discret* si tous ses points sont isolés dans P , i.e. si, pour tout $a \in P$, il existe $r > 0$ tel que $D(a, r) \cap P = \{a\}$.

Lemme 6.4.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et P un fermé de Ω . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. P est discret.

2. P n'a pas de point d'accumulation dans Ω .
3. Pour tout compact K contenu dans Ω , $P \cap K$ est fini.

Démonstration. — Si a est un point d'accumulation de P dans Ω , $a \in P$ puisque P est fermé dans Ω ; c'est donc un point de P non isolé dans P : (1) \Rightarrow (2).

Si P n'a pas de point d'accumulation dans Ω , et si $K \subset \Omega$, $P \cap K$ n'a pas de point d'accumulation dans K . Mais toute partie infinie d'un compact a un point d'accumulation dans ce compact : (2) \Rightarrow (3).

Supposons (3). Soit $a \in P$. Pour tout $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, $P \cap \overline{D}(a, r)$ est fini, donc $P \cap D(a, r) = \{a\}$ si r est assez petit : (3) \Rightarrow (1). □

Définition 6.4.2. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction méromorphe f sur Ω est une fonction définie et holomorphe sur un ouvert $\Omega \setminus P(f)$ telle que :

1. $P(f) \subset \Omega$ est un ensemble discret, fermé dans Ω ;
2. tout $a \in P(f)$ est une singularité polaire de f .

Les éléments de $P(f)$ sont les pôles de f . On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω .

Rappelons une caractérisation très importantes des singularités non-essentiels :

Lemme 6.4.3. —

- 1) Une fonction $f \in \mathcal{O}(D(a, r) \setminus \{a\})$ est méromorphe sur $D(a, r)$ si et seulement si elle admet un développement de Laurent sur $D(a, r) \setminus \{a\}$ de la forme

$$f(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}.$$

- 2) i) Si $p \geq 0$, la singularité est éliminable et le développement de Laurent est le développement de Taylor du prolongement holomorphe de la fonction f .

ii) Si $p < 0$ et $a_p \neq 0$, le point a est un pôle.

- 3) La fonction f admet une singularité polaire d'ordre $m \geq 1$ si et seulement s'il existe des nombres complexes a_{-m}, \dots, a_{-1} (uniques, avec $a_{-m} \neq 0$) tels que la fonction

$$D(a, r) \setminus \{a\} \ni z \mapsto f(z) - \sum_{-m \leq i \leq -1} a_i(z-a)^i$$

admette en a une singularité éliminable.

Démonstration. —

- 1) Si a est une singularité éliminable, la fonction \hat{f} qui est le prolongement par continuité de f en a est holomorphe sur $D(a, r)$. Elle admet un développement en série de entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ sur $D(a, r)$. Cela montre le lemme dans ce cas.

2) La singularité isolée a est polaire pour une fonction $f \in \mathcal{O}(D(a, r) \setminus \{a\})$ si elle n'est pas éliminable et s'il existe une fonction $\hat{g} \in \mathcal{O}(D(a, r))$ et un entier $p \geq 1$, tels que $\hat{g}(a) \neq 0$ et $f(z) = \hat{g}(z)/(z-a)^p$ pour tout $z \in D(a, r)$. Comme \hat{g} est holomorphe sur $D(a, r)$ elle est égale

à la somme de sa série de Taylor en a : $\hat{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n$.

Donc sur $D(a, r) \setminus \{a\}$,

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} b_{n+p}(z-a)^n = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=-p}^{-1} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n.$$

□

Théorème 6.4.4. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . L'ensemble $\mathcal{M}(\Omega)$ est naturellement un anneau commutatif unitaire. Si de plus Ω est connexe, c'est un corps.

Démonstration. — Soit f et g deux fonctions méromorphes sur Ω . Les fonctions $s := f + g$ et $p := fg$ sont définies sur $\Omega \setminus P$, où $P = P(f) \cup P(g)$ est un fermé de Ω discret. Soit $a \in P$. Par définition des singularités isolées au plus polaires, i.e. polaires ou éliminables, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que a soit une singularité éliminable de $(z-a)^q f$ et $(z-a)^q g$. On en déduit que a est une singularité (isolée) au plus polaire de s et p . Si a est une singularité éliminable de s (respectivement de p), on prolonge s (respectivement p) en a par continuité. Ceci étant fait pour tout $a \in P$, on obtient des fonctions méromorphes sur Ω . La première partie de l'énoncé en résulte assez immédiatement.

Si de plus Ω est connexe et $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, on remarque d'abord que $\Omega \setminus P(f)$ est aussi un ouvert connexe (démonstration?). On en déduit que, si f n'est pas la fonction nulle, f n'a que des zéros d'ordre fini et que l'ensemble $Z(f)$ de ses zéros est discret. La fonction $1/f$, définie sur $\Omega \setminus (Z(f) \cup P(f))$ a des singularités polaires en tout point de $Z(f)$ et des singularités éliminables en tout point de $P(f)$. Après « élimination des singularités éliminables », on obtient un inverse de f pour le produit. □

Remarque 6.4.5. — Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, alors au voisinage de tout point $a \in \Omega$, f s'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes. En fait ce résultat est global : si Ω est connexe, alors $\mathcal{M}(\Omega) = \text{Frac } \mathcal{O}(\Omega)$. Ce théorème sera établi dans le cours de LM368.

Exercice 6.4.6. — Montrer que la dérivée d'une fonction méromorphe f (définie en dehors de $P(f)$) est naturellement une fonction méromorphe.

Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a \in \Omega$, on voit, par exemple en écrivant le développement de Laurent de f , qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, uniquement défini, tel que :

$$(39) \quad f(z) = (z-a)^p h(z)$$

au voisinage de a et que a ne soit ni un pôle ni un zéro de h . Si $p > 0$, f a un zéro d'ordre p en a , et si $p < 0$, f a un pôle d'ordre $-p$ en a (c'est une définition). On dit aussi *multiplicité* au lieu d'ordre. Posons :

$$\mu_a(f) := p.$$

Lemme 6.4.7. — Avec ces notations, on a :

$$\mu_a(fg) = \mu_a(f) + \mu_a(g), \quad \mu_a(1/f) = -\mu_a(f).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur. □

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 6.4.8. — Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $a \in \mathbb{C}$. On appelle *multiplicité de f en a* l'ordre de a comme zéro de $f - f(a)$.

Concernant le calcul des résidus, en général, il s'agira de calculer le résidu en un point $a \in \mathbb{C}$ d'une fonction de la forme $f = g/h$, où g et h sont holomorphes au voisinage de a et $h(a) = 0$. Le résidu s'obtient alors en faisant un développement limité de g et h au point a , à l'ordre convenable. Il y a un cas simple qui vaut la peine d'être retenu :

Lemme 6.4.9. — Si g et h sont holomorphes au voisinage de a , si $g(a) \neq 0$, et si h a un zéro simple en a , alors :

$$\text{Rés}\left(\frac{g}{h}, a\right) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Démonstration. — En effet, on a $h(z) = (z - a)H(z)$, avec $H(a) = h'(a) \neq 0$. D'où :

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)} \frac{1}{z - a} + O(1).$$

□

Pour un pôle d'ordre m , le résidu se calcule en faisant un développement limité de $(z - a)^m f(z)$ à l'ordre $m - 1$, ou encore par la formule de Taylor :

$$\text{Rés}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{m-1} [(z - a)^m f(z)].$$

6.5. Application à des calculs classiques d'intégrales

Nous illustrons la méthode sur des exemples simples.

Exemple 6.5.1 (Abel). — Soient P et Q deux polynômes tels que $\deg P \leq \deg Q - 2$. Supposons que les racines de Q soient simples. Alors

$$\sum_{a \text{ tel que } Q(a)=0} \frac{P(a)}{Q'(a)} = 0.$$

En effet, l'inégalité sur les degrés implique qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout R assez grand, on ait, pour tout $u \in C(0, R)$: $\left| \frac{P}{Q}(u) \right| \leq \frac{C}{R^2}$. On a alors $\left| \int_{C(0, R)} \frac{P}{Q}(u) du \right| \leq 2\pi R \frac{C}{R^2}$, donc

$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{C(0, R)} \frac{P}{Q}(u) du \right| = 0$. Le théorème des résidus permet de conclure.

Par exemple pour $Q(z) = z^n - 1$, on obtient $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(e^{\frac{2ik\pi}{n}}) e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$, si $\deg P \leq n - 2$. Formule que l'on sait démontrer directement sur chaque monôme.

Exercice 6.5.2. — Calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)/Q(t) dt,$$

où P, Q sont deux polynômes, Q n'a pas de zéro réel et $\deg Q \geq \deg P + 2$.

Solution. — Puisque Q n'a pas de zéro réel, la fonction $t \mapsto P(t)/Q(t)$ est continue sur \mathbb{R} , et puisque $\deg Q \geq \deg P + 2$, on peut choisir $R > 0$ et $C > 0$ tels que :

$$|z| \geq R \Rightarrow |P(z)/Q(z)| \leq C|z|^{-2}.$$

Les hypothèses sont donc les hypothèses qu'il faut faire pour que I soit, au choix, une intégrale de Lebesgue bien définie ou une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente.

Étant donné $r > 0$, on introduit le chemin :

$$0 \leq t \leq \pi, \quad c_r(t) = re^{it},$$

le segment orienté $[-r, +r]$ et le lacet l_r obtenu en suivant le segment $[-r, +r]$ puis l'arc c_r . Soit $\{a_1, \dots, a_N\}$ l'ensemble des zéros de Q et $R_0 > \max_{k=1, \dots, N} |a_k|$. On peut supposer que a_1, \dots, a_M , ont des parties imaginaires > 0 , et a_{M+1}, \dots, a_N des parties imaginaires < 0 . Si $r \geq R_0$, l'intégrale de Cauchy de P/Q sur l_r est bien définie. L'indice de a_k par rapport à l_r est nul si $\text{Im } a_k < 0$, et vaut $+1$ si $\text{Im } a_k > 0$. On en déduit :

$$\int_{l_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2i\pi \sum_{k=1}^M \text{Rés} \left(\frac{P}{Q}, a_k \right),$$

quel que soit $r \geq R_0$. D'autre part, on a :

$$\int_{l_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-r}^{+r} \frac{P(t)}{Q(t)} dt + \int_{c_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz.$$

Si $r \geq R$,

$$\left| \int_{c_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \pi r \times (C/r^2),$$

tend vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$. Finalement :

$$2i\pi \sum_{k=1}^M \text{Rés} \left(\frac{P}{Q}, a_k \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{l_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = I.$$

Par exemple, on calcule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

□

Exercice 6.5.3. — Calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos t} dt.$$

La méthode s'applique au calcul de $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$, où $R(x, y)$ est une fraction rationnelle en (x, y) dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x^2 + y^2 = 1$.

Solution. — On écrit $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$, d'où :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{4e^{it} - (e^{2it} + 1)} dt = 2i \int_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z^2 - 4z + 1} dz.$$

La fonction rationnelle $z \mapsto 1/(z^2 - 4z + 1)$ a deux pôles $a_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}$; a_- appartient au disque unité, mais pas a_+ . Le résidu au point a_- est $1/(2a_- - 4)$. On a donc :

$$I = 2\pi/\sqrt{3}.$$

□

6.6. Les théorèmes de l'indice

On énonce quelques résultats importants dans le cas, le plus utile, d'un disque.

Théorème 6.6.1 (Théorème de l'indice). — Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de $\overline{D}(a, r)$. On suppose que f ne s'annule pas sur le cercle $\partial D(a, r)$. Alors, l'intégrale de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

est égale au nombre des zéros de f dans $D(a, r)$, comptés avec leurs multiplicités. Elle est aussi égale à l'indice de 0 par rapport au lacet :

$$t \in [0, 1], \quad c(t) = f(a + re^{i2\pi t}).$$

Démonstration. — Soit a_1, \dots, a_N , les zéros de f dans $D(a, r)$, d'ordres respectifs n_1, \dots, n_N . On a :

$$k = 1, \dots, N, \quad f(z) = (z - a_k)^{n_k} F_k(z),$$

où F_k est holomorphe et $F_k(a_k) \neq 0$, donc :

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z - a_k)^{n_k} F_k'(z) + n_k (z - a_k)^{n_k - 1} F_k(z), \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{F_k'(z)}{F_k(z)} + \frac{n_k}{z - a_k}. \end{aligned}$$

Le premier terme est holomorphe au voisinage de a_k , donc :

$$\text{Rés}(f'/f, a_k) = n_k.$$

La formule des résidus, appliquée à la fonction f'/f , donne le premier résultat.

Le deuxième est une conséquence directe des définitions :

$$\begin{aligned} \text{Ind}(c, 0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{c'(t)}{c(t)} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(a + re^{it})}{f(a + re^{it})} ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

□

Corollaire 6.6.2. — Soit f une fonction holomorphe non constante sur Ω , un ouvert connexe de \mathbb{C} . Soient $z_0 \in \Omega$ et $w_0 = f(z_0)$. Soit m la multiplicité du zéro de $f(z) - w_0$ en z_0 . Il existe des ouverts $V \ni z_0$, $W \ni w_0$ tels que $f(V) = W$ et pour tout $w \in W \setminus \{w_0\}$, l'équation $f(z) = w$ a exactement m racines distinctes dans V . En particulier, f est une application ouverte.

Démonstration. — Comme f est non constante, il existe $r > 0$ telle que $0 < |z - z_0| < 2r \Rightarrow f'(z) \neq 0$ et $f(z) \neq f(z_0)$.

Soit $c : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ une paramétrisation du cercle $\partial D(a, r)$ et $\Gamma = f \circ c$.

Soit W la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ qui contient w_0 (W est bornée car $\text{Ind}(\Gamma, w_0) = m \neq 0$).

Pour $w \in W$, l'indice $\text{Ind}(\Gamma, w)$ est constant égal à $\text{Ind}(\Gamma, w_0) = m > 0$. Par le théorème de l'indice, c'est aussi le nombre de zéros de $f - w$ contenus dans $D(a, r)$, donc dans $D(a, r) \cap f^{-1}(W)$. Ceci entraîne que $f : V = D(z_0, r) \cap f^{-1}(W) \rightarrow W$ est surjective. Comme $f'(z) \neq 0$ pour $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, les racines de $z \mapsto f(z) - w$ sont simples. □

Corollaire 6.6.3. —

- 1) Si une fonction holomorphe f est injective alors f' ne s'annule pas.
- 2) Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est une application holomorphe bijective entre deux ouverts alors f est un difféomorphisme et la fonction réciproque $f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ est holomorphe.

Démonstration. — On montre la contraposée du premier point en utilisant le théorème précédent. Pour le second, on note que f est ouverte, c'est donc un homéomorphisme. Le premier point entraîne que f' ne s'annule pas. Montrons que f^{-1} est holomorphe : soit $y_0 = f(z_0) \in \Omega_2$.

$$\lim_{y \rightarrow f(z_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(z_0))}{y - f(z_0)} = \lim_{u = f^{-1}(y) \rightarrow z_0} \frac{u - z_0}{f(u) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Ce qui montre que f^{-1} est analytique en particulier f est un difféomorphisme. □

Nous donnerons plus bas une formule pour f^{-1} .

Donnons une version du théorème de l'indice pour des fonctions méromorphes.

Théorème 6.6.4. — Soit f une fonction méromorphe dans un ouvert non vide Ω , n'ayant qu'un nombre fini de zéros a_1, \dots, a_n (comptés avec multiplicités) et un nombre fini de pôles b_1, \dots, b_m (comptés avec multiplicités) dans Ω . Soit c un chemin fermé homotope à un point dans Ω , ne passant par aucun des zéros ou des pôles de f . Soit g une fonction holomorphe dans Ω . Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n g(a_i) \text{Ind}(c, a_i) - \sum_{j=1}^m g(b_j) \text{Ind}(c, b_j).$$

En particulier pour la fonction $g = 1$,

$$\text{Ind}(f \circ c, 0) = \sum_{i=1}^n \text{Ind}(c, a_i) - \sum_{j=1}^m \text{Ind}(c, b_j).$$

Démonstration. —

Un résidu logarithmique est un résidu associé à une fonction méromorphe du type $\frac{f'}{f}$ qui est la dérivée logarithmique de la fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Les pôles de la dérivée logarithmique sont contenus dans la réunion de l'ensemble des zéros et des pôles de f : si $a \in P(f) \cup Z(f)$, au voisinage W de a , la fonction f s'écrit $f(z) = h(z)(z-a)^m$ avec $m \in \mathbb{Z}^*$ et h holomorphe, non nulle sur W si W assez petit. Donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{(z-a)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Le second terme est holomorphe sur W . Donc la partie principale de la dérivée logarithmique $\frac{f'}{f}$ en a est $\frac{m}{(z-a)}$, de résidu m .

Si $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, sur W comme ci-dessus, on a

$$g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = g(z) \frac{m}{(z-a)} + g(z) \frac{h'(z)}{h(z)} = g(a) \frac{m}{(z-a)} + H(z).$$

avec H une fonction holomorphe au voisinage de a . □

Exemple 6.6.5. —

1) Si f est méromorphe sur un voisinage ouvert de $\overline{D(a, r)}$ est telle que $[P(f) \cup Z(f)] \cap C(a, r) = \emptyset$, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \#Z(f) \cap D(a, r) - \#P(f) \cap D(a, r) = \sum_{a \in (Z(f) \cup P(f)) \cap D(a, r)} \mu(a).$$

Donc la notation $\#$ dit que les éléments sont comptés avec multiplicités. Avec la notation de (39) :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a, r)} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in (Z(f) \cup P(f)) \cap D(a, r)} \mu(a) a^k.$$

Si f ne prend pas la valeur w sur $C(a, r)$, $Z(f-w)$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = w$ et $P(f-w) = P(f)$. On obtient une formule donnant les fonctions de Newton des racines de l'équation $f-w=0$.

2) En particulier, avec les notations du corollaire précédent, si f est holomorphe sur $D(z_0, 2r)$ est telle que f' est non nulle hors de z_0 . Si $w \in W$, notons $z_1(w), \dots, z_m(w)$ les m -racines (distinctes si $w \neq f(z_0)$) de l'équation $f(z) = w$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a, r)} z^k \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = z_1(w)^k + \dots + z_m(w)^k.$$

Les fonctions de Newton $w \rightarrow N_k(w) = z_1(w)^k + \dots + z_m(w)^k$ des racines de l'équation $f-w=0$ sont donc holomorphes car données par une intégrale à paramètre holomorphe.

3) Lorsque $k = 1$ et $m = 1$, f est un difféomorphisme local d'inverse la fonction $f^{-1} : W \rightarrow V$ explicitement donnée par la formule intégrale suivante :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = z_1(w) = f^{-1}(w).$$

4) On peut aussi changer la forme du domaine de départ : Si $f : V \rightarrow W$ est un biholomorphisme, soit $\overline{D(a, \epsilon)} \subset W$ alors $f|_{f^{-1}(D(a, \epsilon))} : f^{-1}(D(a, \epsilon)) \rightarrow D(a, \epsilon)$ est donnée par

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a, \epsilon)} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = z_1(w) = f^{-1}(w).$$

Donnons encore une application de la formule de l'indice.

Théorème 6.6.6 (Rouché). — Soient f et g deux fonctions holomorphes dans Ω telles que f (resp. g) n'ait qu'un nombre fini de zéros, a_1, \dots, a_n (resp. b_1, \dots, b_m) dans Ω , comptés avec leur multiplicité. Soit c un chemin fermé homotope à un point dans Ω . On suppose que :

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{pour tout } z \in \langle c \rangle.$$

(Donc f et g ne s'annulent pas sur $\langle c \rangle$.) Alors

$$\sum_{i=1}^n \text{Ind}(c, a_i) = \sum_{j=1}^m \text{Ind}(c, b_j).$$

En particulier si $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ et c paramètre $\partial D(a, r)$ dans le sens direct alors

$$\#(Z(f) \cap D(a, r)) = \#(Z(g) \cap D(a, r)).$$

Démonstration. — D'après le théorème de l'indice, on a :

$$\text{Ind}(f \circ c, 0) = \sum_{i=1}^n \text{Ind}(c, a_i) \quad \text{et} \quad \text{Ind}(g \circ c, 0) = \sum_{j=1}^m \text{Ind}(c, b_j).$$

Il s'agit donc de montrer que $\text{Ind}(f \circ c, 0) = \text{Ind}(g \circ c, 0)$, à l'aide de l'inégalité : $|f \circ c - g \circ c| < |f \circ c|$; c'est une conséquence du lemme 5.1.11 qui montre que les deux lacets $f \circ c$ et $g \circ c$ sont homotopes dans \mathbb{C}^* . \square

Pour constater l'importance de ce théorème, contentons-nous d'une preuve très courte du théorème de d'Alembert-Gauss :

Corollaire 6.6.7. — Soit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ une application polynomiale dans \mathbb{C} . Alors P possède exactement n zéros, comptés avec multiplicité. Autrement dit, P est un produit de polynômes de degré 1.

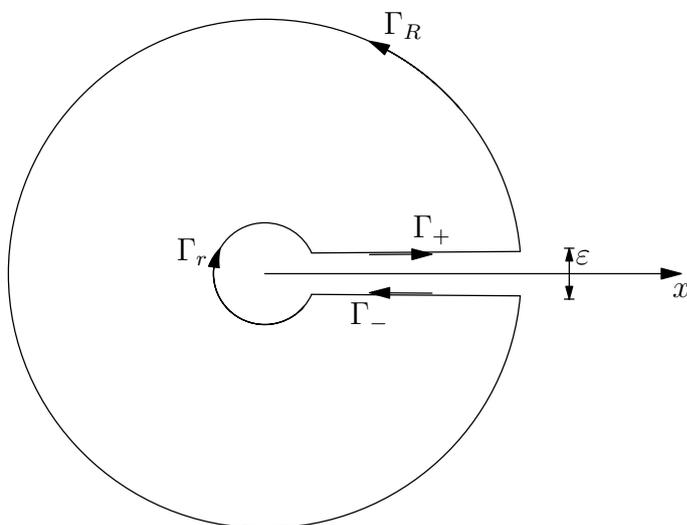
Démonstration. — On suppose $a_n \neq 0$. Vu que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{P(z) - a_n z^n}{a_n z^n} = 0$, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $z \in C(0, R)$, $|a_n z^n - P(z)| < |a_n z^n|$. Le théorème de Rouché implique alors que les deux fonctions $z \mapsto a_n z^n$ et $z \mapsto P(z)$ ont le même nombre de zéros, comptés avec multiplicité, dans le disque $D(0, R)$, c'est-à-dire n . \square

6.7. Quelques calculs d'intégrales

Exemple 6.7.1. — Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx$, avec $\alpha \in]0, 1[$ et Q une fraction rationnelle sans pôles sur la demi-droite \mathbb{R}_+ . On se place bien sûr dans le cas où cette intégrale est convergente, donc $Q(x) = O(\frac{1}{x})$ en $\pm\infty$.

Commençons par choisir une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$: choisissons $\log z = i\pi + \text{Log}(-z)$, où Log est la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ nous allons donc noter ici $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

On va calculer $\int_\Gamma \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$, où Γ est le chemin suivant :



Décomposons le chemin Γ en Γ_R , Γ_- , Γ_r et Γ_+ comme ci-dessus. Alors

$$\int_\Gamma \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\Gamma_r} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\Gamma_-} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\Gamma_+} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz.$$

Fixons d'abord R et r . Lorsque ε tend vers 0, on vérifie aisément que

$$\int_{\Gamma_-} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\Gamma_+} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$$

tend vers $(1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_r^R \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$ (car $|z^\alpha| = |z|^\alpha$).

On majore facilement les intégrales $\int_{\Gamma_R} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$ et $\int_{\Gamma_r} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$, qui tendent vers 0 lorsque r tend vers 0 et R tend vers $+\infty$.

L'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ étant simplement connexe (en effet, il est étoilé par rapport à -1), la formule des résidus donne :

$$(1 - e^{-2\pi i \alpha})I = 2i\pi \sum_{\omega \text{ pôle de } Q} \text{Rés}\left(\frac{Q(z)}{z^\alpha}, \omega\right).$$

Par exemple, on trouve : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$, lorsque $0 < \alpha < 1$.

On peut appliquer la même méthode pour calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} Q(x) \ln x dx$, sous les mêmes hypothèses sur Q .

Cependant, l'intégrale de $Q(z) \log z$ sur le chemin Γ , comme dans l'exemple précédent, mène à la formule (élégante, quoique peu utile) $0 = 0$. L'astuce consiste à intégrer la fonction $Q(z)(\log z)^2$ sur ce chemin.

Un autre exemple d'application du calcul des résidus :

Exemple 6.7.2. — Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière telle qu'il existe $M > 0$ et $\tau > 0$ vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M e^{\tau |Imz|}.$$

Alors, si $\sigma > \tau$, et $\sigma z \notin \mathbb{Z}\pi$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right) \frac{\sin \sigma\left(z - \frac{n\pi}{\sigma}\right)}{\sigma\left(z - \frac{n\pi}{\sigma}\right)} := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq k} f\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right) \frac{\sin \sigma\left(z - \frac{n\pi}{\sigma}\right)}{\sigma\left(z - \frac{n\pi}{\sigma}\right)} \quad (*)$$

(la série est donnée comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{|i| \leq n} \dots$).

C'est à dire qu'une telle fonction se reconstruit à partir de l'échantillon $\left\{f\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right), n \in \mathbb{Z}\right\}$.

En fait la formule est valable aussi pour les points $\sigma z \in \pi\mathbb{Z}$.

On notera que l'écart entre les points de l'échantillon est inversement proportionnel à l'ordre de croissance de la fonction.

Cette formule montre aussi qu'une fonction dont la croissance est contrôlée par $e^{\tau |Im(z)|}$ ne peut s'annuler sur toute une suite de réels en progression arithmétique $\{a + rn, n \in \mathbb{Z}\}$ de raison $0 < r < \frac{\pi}{\tau}$.

Une telle fonction se rencontre lorsque l'on étudie la transformée de Fourier d'une fonction g intégrable et de support contenu dans $[-\tau, \tau] \subset]-\sigma, \sigma[$ (i.e. g est nulle presque partout sur $\mathbb{R} \setminus [-\tau, \tau]$). Alors sa transformée de Fourier est $z \rightarrow f(z) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{itz} dt$. L'intégrale est en fait sur $[-\tau, \tau]$. On voit facilement que cette fonction est holomorphe sur \mathbb{C} (développer l'exponentielle en série, montrer qu'il y a convergence dominée en utilisant que g est intégrable, donc on peut commuter série et intégrale). De plus $|f(z)| \leq e^{\tau |Imz|} \int_{[-\tau, \tau]} |g(t)| dt$.

Démonstration. —

1) Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que tout nombre complexe z on ait

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |z - n\pi| \geq \varepsilon \Rightarrow |\sin z| \geq C(\varepsilon) e^{|Im(z)|}.$$

La fonction $z \mapsto e^{-|Imz|} |\sin z|$ est continue sur \mathbb{C} et 2π -périodique. Sur la bande $B = \{-\pi \leq Re(z) \leq \pi\}$, on a

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} e^{-|Imz|} |\sin z| = \lim_{|y| \rightarrow +\infty} e^{-|y|} |\sin(x + iy)| = \frac{1}{2}.$$

(car

$$|\sin(x + iy)|^2 = \frac{1}{4}(e^{ix-y} - e^{-ix+y})(e^{-ix-y} - e^{ix+y}) = \frac{1}{4}(e^{-2y} + e^{2y} - e^{-2ix} - e^{2ix}).$$

Donc $e^{-2|y|} |\sin(x + iy)|^2 = \frac{1}{4}(1 + e^{-4|y|} - e^{-2|y|} 2 \cos 2x)$.

Il existe $R > 0$ tel que $|Imz| > R$ et $z \in B$ entraîne $e^{-|Imz|} |\sin z| \geq \frac{1}{4}$. Mais sur le compact $\{z \in B, |Imz| \leq R, |z - n\pi| \geq \varepsilon\}$, la fonction $z \mapsto e^{-|Imz|} |\sin z|$ est strictement positive, donc minorée par une constante $C_1(\varepsilon) > 0$. On pose $C_\varepsilon = \min(C_1(\varepsilon), \frac{1}{4})$.

On conclut par périodicité : Si $z \in \mathbb{C} \setminus \cup_{n \in \mathbb{Z}} D(n\pi, \varepsilon)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que $z - 2\pi k \in B \setminus D(0, \varepsilon)$. Donc $e^{-|Imz|} |\sin z| = e^{-|Im(z-2\pi k)|} |\sin(z - 2\pi k)| \geq C_\varepsilon$.

2) On note $\gamma_n = \{z \in \mathbb{C}, |z| = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}\}$. D'après 1), $\exists m > 0$ tel que $|\sin \sigma z| \geq m e^{\sigma|Imz|}$ si $z \in \gamma_n$

3) Soit $|z| < (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}$, $\sigma z \notin \mathbb{Z}\pi$. Le théorème des résidus donne

$$I_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\sin \sigma \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{\sin \sigma z} - \sum_{|i| \leq n} \frac{(-1)^i f(i\frac{\pi}{\sigma})}{\sigma(z - i\frac{\pi}{\sigma})}.$$

En effet, pour un tel z fixé, la fonction $g : u \mapsto \frac{f(u)}{\sin \sigma u} \frac{1}{u - z}$ est méromorphe au voisinage du

disque $\overline{D(0, (n + \frac{1}{2})\pi)}$, de pôle simple en $\frac{i\pi}{\sigma}$, $|i| \leq n$, et en z . Les résidus sont $\text{Rés}(g, \frac{i\pi}{\sigma}) =$

$-\frac{(-1)^i f(i\frac{\pi}{\sigma})}{\sigma(z - i\frac{\pi}{\sigma})}$ et $\text{Rés}(g, z) = \frac{f(z)}{\sin \sigma z}$. Comme le disque fermé admet un voisinage convexe et que

l'indice de γ_n par rapport aux pôles envisagés est 1, le théorème des résidus donne la formule.

3) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(z) = 0$. On en déduira la formule d'interpolation (*).

Choisissons n tel que $(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} \geq |z|$. Sur γ_n , $|f(\zeta)| \leq M e^{\tau|Im\zeta|}$; d'après le premier point, sur γ_n , $|\sin \sigma \zeta| \geq m e^{|\sigma Im\zeta|}$. Donc

$$|I_n(z)| \leq \frac{M}{2\pi m} \int_0^{2\pi} e^{-(\sigma-\tau)(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} |\sin t|} \frac{(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}}{(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} - |z|} dt.$$

On a paramétré γ_n par $t \mapsto (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} e^{it}$. D'où

$$|I_n(z)| \leq 4 \frac{M(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}}{2\pi((n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} - |z|)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\sigma-\tau)(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} \frac{2}{\pi} t} dt$$

$$= \frac{2M}{m((n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} - |z|)(\sigma - \tau)} (1 - e^{-(\sigma - \tau)(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}})$$

(on utilise la concavité du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(z) = 0$ on déduit la formule demandée car $(-1)^n \sin \sigma z = \sin \sigma(z - \frac{n\pi}{\sigma})$. □

CHAPITRE 7

LA THÉORIE DE CAUCHY VIA LA FORMULE DE GREEN-RIEMANN

Il est possible d'amorcer l'étude des fonctions holomorphes et méromorphes sans utiliser ni le lemme de Goursat, ni l'homotopie. On utilise alors la formule de Green-Riemann, un outils important de l'analyse réelle. ⁽¹⁾

Ce chapitre expose rapidement les notions de forme différentielle et leurs intégrales, puis rappelle la formule de Green-Riemann. Un cas particulier de forme différentielle est l'expression $z \mapsto f(z)dz$ dont l'intégrale sur un chemin est détaillée dans la première section du chapitre 3.

Dans ce chapitre, une fonction holomorphe sera toujours supposée de classe \mathcal{C}^1 .

7.1. Formes différentielles

On rappelle qu'une base de l'espace vectoriel réel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (resp. de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$) des formes linéaires sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles (resp. à valeurs complexes) est donnée par :

$$e_1^* : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \quad \text{et} \quad e_2^* : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y.$$

Cette base est la base duale de la base canonique (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 . La décomposition d'une forme linéaire L sur \mathbb{R}^2 dans cette base est :

$$L = L(e_1)e_1^* + L(e_2)e_2^* \iff \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xL \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yL \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'application $L \mapsto \begin{pmatrix} L(e_1) \\ L(e_2) \end{pmatrix}$ définit donc des isomorphismes $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^2$.

Définition 7.1.1. — Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 .

- 1) Une application $\omega : U \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^k s'appelle une 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^k à valeurs réelles.
- 2) Une application $\omega : U \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^2$ de classe \mathcal{C}^k s'appelle une 1-forme différentielle de degrés 1 et de classe \mathcal{C}^k à valeurs complexes.

1. On doit cependant admettre que les fonctions holomorphes sont de classe \mathcal{C}^1 , résultat établi dans le chapitre 3, via le lemme de Goursat.

Pour chaque point $p \in U$, la forme linéaire $\omega(p)$ se décompose dans la base (e_1^*, e_2^*) . Ses coordonnées définissent des fonctions. ω est de classe \mathcal{C}^k sur U ssi ses coordonnées sont de classe \mathcal{C}^k .

On ne considérera essentiellement que des formes à valeurs complexes, les formes à valeurs réelles étant un cas particulier.

Exemple 7.1.2. —

1) Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} une fonction de classe \mathcal{C}^{k+1} . Par définition, pour chaque point $p \in U$, il existe une forme linéaire $df(p) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C})$ telle que $f(p+h) = f(p) + df(p)(h) + o(h)$. L'application $df : U \ni p \mapsto df(p) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C})$ est un exemple de forme différentielle de classe \mathcal{C}^k .

Les coordonnées de $df(p)$ dans la base (e_1^*, e_2^*) sont par définition

$$(40) \quad df(p)(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad df(p)(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

2) Les fonctions coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}^2 . En effet pour un point $p \in \mathbf{R}^2$, on a

$$x(p+h) = e_1^*(p+h) = e_1^*(p) + e_1^*(h) = x(p) + e_1^*(h).$$

D'où $dx(p) : h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto e_1^*(h) = h_1$. De même $dy(p) : h \mapsto e_2^*(h) = h_2$. On voit que les formes différentielles dx et dy sur \mathbf{R}^2 sont constantes (donc \mathcal{C}^∞), égales respectivement à $p \mapsto e_1^*$ et $p \mapsto e_2^*$.

3) Soit ω une forme différentielle sur U . Les fonctions $\omega_1 : p \mapsto \omega(p)(e_1)$ et $\omega_2 : p \mapsto \omega(p)(e_2)$, définies sur U , sont telles que :

$$(41) \quad \omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy \iff \forall p \in U, \omega(p) = \omega(p)(e_1)dx(p) + \omega(p)(e_2)dy(p)$$

En particulier, pour la différentielle d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, on obtient :

$$(42) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Par abus de notation, on confond souvent dx et dy avec les formes linéaires e_1^* et e_2^* .

4) On a $dz = dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$. De sorte que $\frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) = dx$ et $\frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) = dy$. Ainsi $(dz, d\bar{z})$ (tout comme (dx, dy)) est une base des 1-formes linéaires à valeurs complexes. Les formules de changement de base ci-dessus permettent de calculer la différentielle d'une fonction à valeurs complexes dans la base $(dz, d\bar{z})$:

$$(43) \quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

avec les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ définis précédemment.

Exemple 7.1.3. — Un champ de vecteurs sur un ouvert U est une application $f : U \rightarrow \mathbf{R}^2$ qui à un point $p \in U$ associe un vecteur $f(p)$. On représente un tel champ de vecteurs par une

flèche issue de p portée sur le segment $[p, \tau(p)]$ tel que $p\tau(p) = f(p)$. Un champ de vecteurs définit via le produit scalaire une forme différentielle :

$$\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad \omega(p)(h) = \langle h, f(p) \rangle.$$

7.1.1. L'intégrale d'une forme différentielle le long d'un chemin différentiable. — On rappelle qu'un chemin différentiable (resp. de classe \mathcal{C}^k , resp. de classe \mathcal{C}^k par morceaux, pour $k \geq 1$) dans \mathbb{R}^2 est une application

$$t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

définie sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que les applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont différentiables (resp. de classe \mathcal{C}^k , resp. \mathcal{C}^k par morceaux) sur $[a, b]$.

On note $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ le vecteur tangent à la courbe au point $\gamma(t)$ (lorsqu'il est bien défini).

Définition 7.1.4. — L'intégrale d'une forme différentielle $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sur un chemin γ de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans U est définie par

$$(44) \quad \int_{\gamma} \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega) := \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = \int_a^b [\omega_1(\gamma(t))x'(t) + \omega_2(\gamma(t))y'(t)] dt.$$

On a fait le changement de variable $x = x(t)$, $y = y(t)$ dans la forme différentielle ω , de sorte que $\gamma^*\omega = [\omega_1(\gamma)x' + \omega_2(\gamma)y']dt$ est une forme différentielle sur $[a, b]$.

On vérifie facilement que si $[a_1, b_1] \ni u \mapsto t(u) \in [a, b]$ est une bijection \mathcal{C}^1 alors

- si t est strictement croissante ($t' > 0$), $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma \circ t} \omega$.
- si t est strictement décroissante ($t' < 0$), $\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma \circ t} \omega$.

Si $t_0 = a \leq t_1, \dots, \leq t_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$; en notant $\gamma_i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ alors

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} \omega.$$

On définit donc l'intégrale d'une forme différentielle le long d'un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux :

Définition 7.1.5. — L'intégrale d'une forme différentielle $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sur un chemin γ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux à valeurs dans U est définie par :

$$(45) \quad \int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} \omega$$

avec $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ une subdivision telle que γ restreinte à $[t_i, t_{i+1}]$ soit de classe \mathcal{C}^1 .

La propriété précédente montre que cette valeur est indépendante de la subdivision.

Exemple 7.1.6. —

1) Si γ est un chemin constant alors $\gamma'(t) = 0$, $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$ et l'intégrale est nulle.

- 2) Si ω est définie via le produit scalaire avec un champ de vecteurs f , l'intégrale de ω le long de γ s'appelle la circulation du champ de vecteurs le long du chemin γ .
- 3) Si $\omega = df$ alors :

$$(46) \quad \int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \text{ est indépendant du chemin parcouru,}$$

$$\text{car } df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \gamma)(t).$$

- 4) L'intégrale de dx sur un chemin paramétrant un segment vertical est nulle.

7.1.2. Le problème des primitives. —

Définition 7.1.7. — Soit $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ une 1-forme différentielle sur un ouvert U de \mathbb{C} . Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de ω si f est \mathcal{C}^1 sur U et si $df = \omega$.

Lemme 7.1.8. —

- 1) Une condition nécessaire pour qu'une forme différentielle $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$ de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U soit la différentielle df d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur U est

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{\partial \omega_1}{\partial y}.$$

- 2) Une condition nécessaire pour qu'une forme différentielle $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$ de classe \mathcal{C}^0 sur un ouvert U soit la différentielle df d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U est

$$\int_{\gamma} \omega = 0 \text{ pour tout chemin fermé } \gamma \quad (\text{i.e. } \gamma(b) = \gamma(a)).$$

Démonstration. —

- 1) En effet si $\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\omega_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ alors le théorème de Schwarz entraîne

$$\frac{\partial}{\partial y} \omega_1 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \omega_2.$$

- 2) La seconde propriété est immédiate : $\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$ si $\gamma(b) = \gamma(a)$. \square

Exercice 7.1.9. — Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\omega = adz + bd\bar{z}$ admette une primitive de classe \mathcal{C}^1 est $\frac{\partial a}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial b}{\partial z}$.

Exemple 7.1.10 (La forme d'angle). —

La 1-forme différentielle $\omega : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ est de classe \mathcal{C}^{∞} sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Un calcul immédiat montre que cette forme vérifie la première condition du lemme précédent mais pas la seconde :

$$(47) \quad \int_{C(0,1)} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d(\sin \theta)}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} - \frac{\sin \theta d(\cos \theta)}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$(48) \quad = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \cos \theta d\theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} - \frac{\sin \theta (-\sin \theta) d\theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 2\pi.$$

On note que cette forme admet localement une primitive. Par exemple, pour $x \neq 0$, on a $d(\arctan \frac{y}{x}) = \omega(x, y)$. Ce qui implique qu'elle vérifie la première condition du lemme, qui est une condition locale, portant sur les dérivées.

Notons aussi que ω est la partie imaginaire de $z \mapsto \frac{dz}{z}$:

$$\frac{dz}{z} = \frac{\bar{z}dz}{|z|^2} = \frac{(x-iy)(dx+idy)}{x^2+y^2} = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + i \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

Exercice 7.1.11. —

- 1) Montrer que la forme ω est le $d\theta$ des coordonnées polaires : Si $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ alors $\omega(r \cos \theta, r \sin \theta) = d\theta$.
- 2) Ecrire $z \mapsto \frac{dz}{z}$ en coordonnées polaires.
- 2) Montrer que la partie réelle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ de $z \mapsto \frac{dz}{z}$ admet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$ comme primitive.

7.1.3. 2-formes différentielles. —

Définition 7.1.12. — Une 2-forme sur l'espace \mathbf{R}^2 est une forme bilinéaire antisymétrique sur \mathbf{R}^2 , c'est à dire une application

$$\alpha : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ (resp. } \mathbf{C} \text{)}$$

linéaire en chaque variable telle que $\alpha(u, v) = -\alpha(v, u)$.

L'espace des 2-formes sur \mathbf{R}^2 , noté $\Lambda_{\mathbf{R}}^2$ (resp. $\Lambda_{\mathbf{C}}^2$), est de dimension 1 sur \mathbf{R} (resp. \mathbf{C}), engendré par la 2-forme antisymétrique qui à deux vecteurs associe leur déterminant : $(u, v) \mapsto \det(u, v)$.

Si α_1, α_2 sont deux 1-formes linéaires, leur produit extérieur $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ est la 2-forme antisymétrique qui a deux vecteurs u, v de \mathbf{R}^2 associe $\alpha_1 \wedge \alpha_2(u, v) = \alpha_1(u)\alpha_2(v) - \alpha_2(u)\alpha_1(v)$. Par définition $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = -\alpha_2 \wedge \alpha_1$ et $\alpha_1 \wedge \alpha_1 = 0$.

Par exemple, on a

$$dx \wedge dy(u, v) = dx \wedge dy \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det(u, v).$$

Définition 7.1.13. — Une 2-forme différentielle α sur un ouvert U de \mathbf{R}^2 est une application α de U à valeurs dans l'espace vectoriel des 2-formes sur \mathbf{R}^2 . Donc $\alpha : U \rightarrow \Lambda_{\mathbf{R}}^2$ (resp. $\Lambda_{\mathbf{C}}^2$).

Exemple 7.1.14. — Si α_1 et α_2 sont des 1-formes différentielles sur U , leur produit extérieur

$$p \mapsto (\alpha_1 \wedge \alpha_2)(p) := \alpha_1(p) \wedge \alpha_2(p)$$

est une 2-forme différentielle sur U . Si $\alpha_i = \alpha_{1i} dx + \alpha_{2i} dy$, on a

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) dx \wedge dy$$

car $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

Un autre exemple :

Définition 7.1.15. —

1) Si $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$ est une 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur U , on définit sa différentielle par :

$$d\omega = d\omega_1 \wedge dx + d\omega_2 \wedge dy = \left(\frac{\partial}{\partial y} \omega_1 - \frac{\partial}{\partial x} \omega_2 \right) dx \wedge dy.$$

2) Une 1-forme différentielle ω de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{C} est fermée si $d\omega = 0$.

On vérifie que le lemme de commutation de Schwartz pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur U entraîne $d(df) = 0$. Ainsi une condition nécessaire pour qu'une 1-forme différentielle (de classe \mathcal{C}^1) admette une primitive est qu'elle soit fermée.

Lemme 7.1.16. — Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{C} . La forme différentielle $z \mapsto f(z)dz$ est fermée ssi la fonction f est holomorphe.

Démonstration. — En effet :

$$d(fdz) = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

car $d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$. Donc $d(fdz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$ est nulle ssi $\forall z \in U, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$. □

7.1.4. L'intégrale d'une 2-forme différentielle. —

Définition 7.1.17. — Soit $\omega = f dx \wedge dy : U \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^2$ une 2-forme différentielle. On dit que ω est intégrable sur U si f est intégrable sur U pour la mesure de Lebesgue $dx dy$. On définit alors

$$\int_U \omega = \int_U f dx dy.$$

En particulier si ω est \mathcal{C}^0 de support compact (i.e. f est continue de support compact) dans U alors ω est intégrable.

Si K est un compact inclus dans U , on pose $\int_K \omega = \int_U f 1_K dx dy$ avec 1_K la fonction indicatrice de K (qui vaut 1 sur K et 0 sur $\mathbb{C} \setminus K$).

7.2. Le théorème de Stokes, la formule de Green Riemann.

Dans cette section, on généralise la formule $f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(t) dt$: on montre que l'intégrale de la différentielle (la dérivée) $d\omega$ d'une 1-forme ω sur un compact est égale à l'intégrale de ω sur ∂K , le bord de K . On définit en premier lieu la notion de bord \mathcal{C}^1 par morceaux afin de pouvoir intégrer une 1-forme sur le bord. On énonce ensuite le théorème de Green-Riemann et ses corollaires.

7.2.1. Les compacts à bord orienté. — Pour orienter le bord d'un compact, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 7.2.1. — Soit $\gamma :]a, b[\ni t \rightarrow \mathbb{C}$ un arc de classe \mathcal{C}^1 et $t_0 \in]a, b[$ tel que $\gamma'(t_0) \neq 0$. Il existe un difféomorphisme $F : D(0, \epsilon) \rightarrow W'$ d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^2 sur un voisinage W' de $\gamma(t_0)$ tel que $\gamma(t_0 + y) = F(0, y)$ pour $|y| < \epsilon$. En particulier, $W' \setminus \gamma(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ admet deux composantes connexes.

Démonstration. — Soit $n(t)$ l'unique vecteur tel que $(n(t), \gamma'_i(t))$ soit une base orthogonale directe. Alors $F : (x, y) \mapsto \vec{\gamma}(t_0 + y) + x\vec{n}(t_0 + y)$ est un difféomorphisme d'un voisinage W de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 sur un voisinage W' de $\gamma(t_0)$. En effet la différentielle de cette application en l'origine est donnée par $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto h_1 \cdot \vec{n}(t_0) + h_2 \cdot \vec{\gamma}'(t_0)$ qui est inversible car $n(t_0)$ et $\gamma'(t_0)$ sont indépendants. Le théorème d'inversion locale implique que $F : W \rightarrow W'$ est un difféomorphisme pour des voisinages convenables de 0 et $\gamma(t_0)$. Quitte à retrécir W , on peut supposer que $W = D(0, \epsilon)$. La restriction de F à $\{0\} \times]-\epsilon, \epsilon[$ vérifie $F(0, y) = \gamma(t_0 + y)$. Donc

$$(49) \quad W' \setminus \gamma(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) = F(D(0, \epsilon) \setminus \{x = 0\})$$

a deux composantes connexes. □

Remarque 7.2.2. — Notons $W'_- = F(D(0, \epsilon) \cap \{y < 0\})$ et $W'_+ = F(D(0, \epsilon) \cap \{y > 0\})$. On dit que W'_- est la composante située à gauche de γ , et W'_+ la composante située à droite de γ . Si l'on inverse le paramétrage (i.e. on considère le chemin $opp(\gamma) : [-b, -a] \rightarrow opp(\gamma)(t) = \gamma(-t)$) alors la composante à gauche de γ est la composante à droite de $o(\gamma)$.

Définition 7.2.3. — Soit K un compact du plan et $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ un ensemble fini de chemins fermés, les γ_i étant de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On dit que Γ est le bord orienté du compact K si les conditions suivantes sont satisfaites :

- Les images de γ_i sont disjointes et leur réunion est la frontière ∂K de K .
- Pour chaque application $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}$, les images de deux points distincts de $]a_i, b_i[$ sont distincts.
- Pour tout $1 \leq i \leq r$, tout $t \in [a_i, b_i]$, on demande que la dérivée à droite ou à gauche de γ_i soit non nulle.
- En tout point t_0 au voisinage duquel γ_i est de classe \mathcal{C}^1 , le compact K est situé localement à gauche de γ_i au sens précis suivant : Pour t voisin de t_0 , soit $n(t)$ l'unique vecteur tel que $(n(t), \gamma'_i(t))$ soit une base orthogonale directe. Alors $(x, y) \mapsto \gamma(t_0 + y) + xn(t_0 + y)$ est un difféomorphisme d'un voisinage W de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 sur un voisinage W' de $\gamma(t_0)$. On demande que, quitte à restreindre W , l'image de $\{y < 0\} \cap W$ soit $K \cap W'$.

On dit alors que le bord du compact K est orienté par la normale extérieure.

Intuitivement, on oriente le bord de K de sorte à ce que K soit toujours localement à gauche de son bord.

7.2.2. La formule de Stokes, Green-Riemann. —

Théorème 7.2.4. — Soit K un compact à bord orienté $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ et ω une 1-forme différentielle continue sur K de classe \mathcal{C}^1 sur l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K . Alors :

$$(50) \quad \int_{\partial K} \omega := \sum_{i=1}^r \int_{\gamma_i} \omega = \int_{\overset{\circ}{K}} d\omega$$

$$(51) \quad \int_{\partial K} f dx + g dy = \int_K \left(\frac{\partial}{\partial y} f - \frac{\partial}{\partial x} g \right) dx dy \quad \text{si } \omega = f dx + g dy.$$

Remarque 7.2.5. — Lorsque la forme différentielle est de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de K , on a

$$\int_{\partial K} \omega := \sum_{i=1}^r \int_{\gamma_i} \omega = \int_K d\omega,$$

car $d\omega$ a un sens sur ∂K .

La première formule s'appelle la formule de Stokes et utilise le langage des formes différentielles. La seconde formule est la formule de Green-Riemann. Sa généralisation en dimension trois s'appelle la formule d'Ostrogradski. La formule de Stokes utilise un formalisme valable pour toutes les dimensions et toutes les variétés différentiables.

La formule de Stokes en dimension 1 est $f(b) - f(a) = \int_{]a,b[} \frac{\partial f}{\partial t}(t) dt$.

Exemple 7.2.6. — Montrons à titre d'exemple la formule de Stokes pour un pavé $[a, b] \times [c, d]$ à partir de la formule usuelle de Leibniz pour les fonctions en intégrant d'abord en x puis en y :

Par linéarité on suppose que $\omega = f dx$. Alors $d\omega = df \wedge dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx$ et

$$(52) \quad \int_{[a,b] \times [c,d]} -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{x \in [a,b]} \left(\int_{y \in [c,d]} -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right) dx$$

$$(53) \quad = \int_{x \in [a,b]} (f(x, c) - f(x, d)) dx = \int_{\partial([a,b] \times [c,d])} f(x, y) dx$$

car le bord orienté de $[a, b] \times [c, d]$ est donné par les segments joignant les points $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ dans cet ordre. L'intégrale de dx sur les segments verticaux est nulle. On montre de même la formule de Green-Riemann pour la 1-forme différentielle $g dy$.

Ecrivons la formule de Green-Riemann en notation complexe :

Corollaire 7.2.7. — Soit K un compact à bord de \mathbb{C} . Notons ∂K le bord de K orienté par la normale extérieure. Soit $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur K , de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{K}$. Alors

$$(54) \quad \int_{\partial K} f(z) dz = \int_{\overset{\circ}{K}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z} \wedge dz = \int_{\overset{\circ}{K}} 2i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dx dy.$$

Démonstration. — Considérons la 1-forme différentielle $\omega : z \mapsto f(z)dz$ sur K . Alors $\omega(z) = f(z)(dx + idy) = f(z)dx + if(z)dy$. D'après la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\partial K} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dx + if(z)dy = \int_{\overset{\circ}{K}} \left(i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) (z) dx dy = 2i \int_{\overset{\circ}{K}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dx dy.$$

□

Remarque 7.2.8. —

1) Si l'on utilise la notation différentielle, on a

$$d(fdz) = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

car $d\bar{z} \wedge dz = 0$. On remarque que $d\bar{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2idx \wedge dy$. Le théorème de Stokes donne la formule.

7.3. Le théorème de Cauchy pour un compact à bord.

L'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ pour une fonction holomorphe et la formule de Stokes entraînent :

Corollaire 7.3.1 (Théorème de Cauchy pour un compact à bord)

Si K est un compact à bord et f est une fonction continue sur K , holomorphe et de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{K}$, alors :

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0.$$

La formule est en particulier vraie si f est holomorphe (de classe \mathcal{C}^1) au voisinage de K .

Théorème 7.3.2. — Soit K est un compact à bord et f est une fonction continue sur K , holomorphe, de classe \mathcal{C}^1 , sur $\overset{\circ}{K}$, alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \overset{\circ}{K}, \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus K. \end{cases}$$

La formule est en particulier vraie si f est holomorphe (de classe \mathcal{C}^1) au voisinage de K .

Démonstration. —

1) Notons que si $z \in \mathbb{C} \setminus K$ alors $\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ car la fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est continue sur K et holomorphe de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{K}$.

2) Soit a un point intérieur à K . Soit $r > 0$ tel que $\bar{D}(a, r)$ soit inclus dans l'intérieur de K . Le compact $K \setminus D(a, r)$ est un compact à bord, dont le bord orienté est la réunion de ∂K et du cercle γ de centre a de rayon r parcouru dans le sens négatif; $\gamma_r : [0, 2\pi] \ni t \mapsto a + re^{-it}$. La

fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$ est holomorphe de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{K} \setminus \{a\}$. Le théorème de Cauchy pour le compact à bord $K \setminus D(a, r)$ montre que :

$$0 = \int_{\partial(K \setminus D(a, r))} f(z) dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Ceci pour tout $r > 0$ tel que $\bar{D}(a, r) \subset \overset{\circ}{K}$. Donc

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a).$$

□

Montrons la dernière égalité :

Lemme 7.3.3. — Soit f une fonction continue au voisinage d'un point a de \mathbb{C} . Alors :

$$(55) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta = f(a).$$

Notation 7.3.4. — On rappelle (c.f. Chap. 3) que $\partial D(a, r)$ désigne tout chemin équivalent au chemin $[0, 2\pi] \ni t \mapsto a + re^{it}$.

Démonstration. — f étant continue en a , $\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{z \in D(a, r)} |f(z) - f(a)| = 0$ donc :

$$(56) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta}) - f(a)| d\theta = 0$$

et

$$(57) \quad \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta &= \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(a + re^{i\theta}) - f(a)) d\theta &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 0 + f(a). \end{aligned}$$

□

7.3.1. Reformulation des principaux théorèmes. — Nous survolons les principales modifications d'énoncés et de démonstrations des résultats des chapitres précédents lorsque l'on utilise la formule de Green-Riemann et les compacts à bord orienté.

Partant de la formule de Cauchy, on voit que les fonctions holomorphes sont analytiques (c.f. sections 3.4).

Le chapitre 4 est inchangé. Le chapitre 5 sur l'homotopie est a priori hors programme.

Modifications dans le chapitre 6 : La formule de Cauchy sur un anneau (c.f. théorème 6.1.6) est une conséquence directe de la formule de Cauchy pour le compact à bord $A(a, s, S)$ dont le bord orienté par la normale extérieure est $\partial D(a, S) - \partial D(a, s)$.

Nous énonçons le théorème des résidus pour un compact à bord :

Théorème 7.3.5 (Formule des résidus). — Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , A une partie finie de Ω et $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$. Si K est un compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux inclus dans Ω tel que $A \cap \partial K = \emptyset$, on a :

$$(58) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} f(z) dz = \sum_{a \in A \cap K} \text{Rés}(f, a).$$

Démonstration. — Comme $\partial K \cap A = \emptyset$, $A \cap K = A \cap \overset{\circ}{K}$ est finie. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\forall a \in A \cap K$, $D(a, \epsilon) \subset \overset{\circ}{K}$ et $A \cap D(a, \epsilon) = \{a\}$. La formule de Cauchy appliquée au compact à bord $K_\epsilon = K \setminus \bigcup_{a \in A \cap K} D(a, \epsilon)$ et à la fonction f , holomorphe au voisinage $\Omega \setminus A$ de ce compact, donne :

$$(59) \quad 0 = \int_{\partial K_\epsilon} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{a \in A \cap K} \int_{\partial D(a, \epsilon)} f(z) dz$$

$$(60) \quad = \int_{\partial K_\epsilon} f(z) dz - \sum_{a \in A \cap K} 2i\pi \text{Rés}(f, a)$$

□

On peut aussi, comme dans la preuve initiale du théorème des résidus, soustraire les parties principales f_a ($a \in A \cap K$). La fonction $f - \sum_{a \in A \cap K} f_a$ se prolonge comme fonction holomorphe au voisinage de K . L'intégrale de Cauchy de cette fonction le long du bord orienté de K est nulle. On utilise alors :

Lemme 7.3.6. — Soit $z \mapsto f_a(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{(z-a)^n}$ la somme d'une série de Laurent qui converge sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Pour tout compact K à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $a \notin \partial K$,

$$\int_{\partial K} f_a dz = \begin{cases} 2i\pi \text{Rés}(f_a) & \text{si } a \in \overset{\circ}{K}, \\ 0 & \text{si } a \in \mathbb{C} \setminus K. \end{cases}$$

Démonstration. — En effet la série converge normalement sur ∂K donc

$$(61) \quad \int_{\partial K} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{a_i}{(z-a)^i} \right) dz = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\partial K} \frac{a_n}{(z-a)^n} dz.$$

Si $n \neq 1$, $z \mapsto \frac{a_n}{(z-a)^n}$ admet une primitive donc l'intégrale sur ∂K , réunion de chemins fermés, est nulle. Si $n = 1$, la formule de Cauchy 7.3.2 appliquée à la fonction $z \mapsto 1$ donne $\int_{\partial K} \frac{a_1}{(z-a)^1} = 2i\pi$ si $a \in \overset{\circ}{K}$, l'intégrale est nulle si $a \in \mathbb{C} \setminus K$. □

Les calculs classiques d'intégrales (section 6.5) se traitent en appliquant le théorème des résidus pour les compacts à bord définis par les chemins d'intégration.

Les théorèmes de l'indice pour les fonctions holomorphes s'énoncent de manière identique. Donnons une version pour les fonctions méromorphes :

Théorème 7.3.7. — Soit f une fonction méromorphe dans un ouvert non vide Ω , n'ayant qu'un nombre fini de zéros a_1, \dots, a_n (comptés avec multiplicités) et un nombre fini de pôles b_1, \dots, b_m (comptés avec multiplicités) dans Ω . Soit K un compact inclus dans Ω , de bord \mathcal{C}^1 par morceaux disjoints des pôles et des zéros de f .

Soit g une fonction holomorphe dans Ω . Alors :

$$(62) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a_i \in K} g(a_i) - \sum_{b_j \in K} g(b_j).$$

En particulier pour la fonction $g = 1$,

$$(63) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z(f) \cap K - P(f) \cap K.$$

où $Z(f) \cap K$ (resp. $P(f) \cap K$) est le nombre de zéros, resp. de pôles de f dans K (comptés avec leur multiplicité).

7.4. Une généralisation de la formule de Cauchy.

Cette section est un complément a priori hors programme. Elle montre la portée générale de la formule de Green-Riemann.

Théorème 7.4.1. — Soit K un compact à bord et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur K , de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{K}$. Soit $a \in \overset{\circ}{K}$. Alors

$$(64) \quad 2i\pi f(a) = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{\overset{\circ}{K}} \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z}.$$

Si f est holomorphe, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ et l'on retrouve la formule de Cauchy.

Démonstration. — Avec les notations de la preuve de la formule de Cauchy, on utilise maintenant la forme complexe du théorème de Green-Riemann :

$$(65) \quad \int_{\partial(K \setminus D(a,r))} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\overset{\circ}{K} \setminus \bar{D}(a,r)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f(z)}{z-a} \right) d\bar{z} \wedge dz$$

$$(66) \quad \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\overset{\circ}{K} \setminus \bar{D}(a,r)} \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z} \wedge dz$$

car $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est holomorphe sur $U \setminus \{a\}$.

Passons à la limite quand r tend vers 0 : la fonction f étant continue en a , le lemme précédent entraîne $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2i\pi f(a)$. On note que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est intégrable sur tout compact de \mathbb{C} (passer en coordonnées polaires centrées en a) donc la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$ est intégrable sur K (ou $\overset{\circ}{K}$) car f est \mathcal{C}^1 . D'où :

$$(67) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{K \setminus D(a,r)} \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z} \wedge dz = \int_K \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) 2i dx dy = \int_K \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z} \wedge dz.$$

