TD 1.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(1+i)z - 1 = 0$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{n-1} = \overline{z}$ d'inconnue z et de paramètre $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Déterminer l'image du demi-plan de Poincaré $P = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ par l'application

$$f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

et montrer que f est une bijection de P sur $f(P)$. Expliciter son application réciproque.

Exercice 4. Soit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$ un polynôme de degré n et $P'(z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i a_i z^{i-1}$ le polynôme dérivé. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que P est $\mathbb{C}-$dérivable en z_0 et que $\dfrac{\partial P}{\partial z}(z_0) = P'(z_0)$.

Exercice 5. Soit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

(1) Montrer que $P(z) \sim a_n z^n$ quand $|z| \to +\infty$. En déduire que $|P| : z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$.
(2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ en lequel le minimum de $|P|$ est atteint. On suppose que z_0 est racine d'ordre $k \geq 1$ de $z \mapsto P(z) - P(z_0)$ en z_0 i.e. $P^{(i)}(z_0) = 0$ si $1 \leq i < k$ et $P^{(k)}(z_0) \neq 0$. On note alors $P^{(k)}(z_0) = \rho e^{i\theta_0}$ la forme polaire de $P^{(k)}(z_0)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé.

   Calculer un développement limité à l'ordre k de $\epsilon \mapsto P(z_0 + \epsilon e^{-i\frac{\theta_0}{k} + i\frac{\theta}{k}})$ quand ϵ tend vers zéro.
(3) En déduire que si $P(z_0) \neq 0$ alors $|P(z_0)|$ n'est pas un minimum de $|P|$.
(4) En déduire le théorème de D'Alembert-Gauss.

Exercice 6.

(1) Soit $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$ linéaire de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
   Montrer que α est $\mathbb{C}$ linéaire ssi α est la multiplication par $\alpha(1)$ ssi $c = -b$, $d = a$.
(2) En déduire qu'une application $\mathbb{C}$ dérivable en un point vérifie les équations de Cauchy Riemann.
(3) Montrer que la fonction $f(x, y) = 1$ si $x.y = 0$ et nulle ailleurs vérifie les équations de Cauchy Riemann en 0, mais n'est pas continue en 0.

Exercice 7. Discuter les points de $\mathbb{C}-$diffèrentiabilité des fonctions suivantes.
$z \mapsto |z|^2$; $\quad z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$, $z \neq i$; $\quad z \mapsto |z| - z$; $\quad z = x + iy \mapsto x + iy^2$

Exercice 8. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Mq chacune des propriétés suivantes entraine que f est constante:
a) f est constante b) Re(f) est constante c) Im(f) est constante c) $\overline{f} \in \mathcal{O}(U)$ d) L'image de f est contenue dans une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9.

(1) Montrer que $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et calculer sa dérivée.

(2) Montrer que la composée de deux fonctions holomorphes, lorsqu'elle est définie, est holomorphe.

Exercice 10. On rappelle que si F est une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{C}$,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \quad \& \quad \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \ ;$$

on note dz et $d\overline{z}$ les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies pour tout $w \in \mathbb{C}$ par $dz.w = w$ et $d\overline{z}.w = \overline{w}$.

(1) Exprimer la différentielle réelle DF de F en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \overline{z}}$, dz et $d\overline{z}$. A quelle condition nécessaire et suffisante F est-elle holomorphe sur U et dans ce cas, que vaut F' ?

(2) Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}$.

(3) Prouver que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \quad \& \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

Exercice 11. (Facultatif.)

(1) Prouver que si g est une application de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{C}$ et si $f(U) \subset V$, alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f)\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f)\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f)\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f)\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \end{cases}$$

(2) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Montrer que l'application φ, de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$, est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

Exercice 12.

(1) Montrer sans utiliser les formules ci-dessus que si f et g sont holomorphes, $g \circ f$ est holomorphe et que $(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'$.

(2) Vérifier que le déterminant du jacobien d'une fonction holomorphe f est $|f'|^2$.

Correction du TD 1.

Exercice 1. Le discriminant réduit Δ de l'équation propproposée est $(1+i)^2+1$ c'est à dire $1+2i$. Si $\delta = a+ib$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $\delta^2 = \Delta$ si et seulement si $a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{5}$, $a^2-b^2 = \operatorname{Re}\Delta = 1$, $ab = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Delta = 1 > 0$ et a a le même signe que b. Puisque Δ a exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, on en déduit que celles-ci sont $\pm\delta$ où

$$\delta = \sqrt{\frac{|\Delta| + \operatorname{Re}\Delta}{2}} + i\sqrt{\frac{|\Delta| - \operatorname{Re}\Delta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Les solutions de l'équation proposée sont $1+i\pm\delta$.

Exercice 2. Si $n=0$, l'équation proposée est équivalente à $1 = |z|^2$ dont les solutions sont les éléments de $\mathbb{T}$. Si $n=1$, l'équation devient $1=\overline{z}$ dont l'unique solution est 1. Si $n=2$, elle s'écrit $z=\overline{z}$ et ses solutions sont donc les réels. Supposons $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$. 0 est alors solution de l'équation et lorsque $z\in\mathbb{C}^*$, $z^{n-1}=\overline{z}$ si et seulement si $|z|=1$ et $z^n = 1$. Ses solutions sont donc 0 et les racines $n^{ième}$ de l'unité.

Exercice 3. Si $z \in P$, $\operatorname{Im} z > 0$, f est définie en z et

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{|z|^2+1-2\operatorname{Re}\left(z\overline{i}\right)}{|z|^2+1+2\operatorname{Re}\left(z\overline{i}\right)} = \frac{|z|^2+1-2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1+2\operatorname{Im} z} < 1$$

ce qui prouve que $f(z)\in\mathbb{D}$.

Soit $\zeta\in\mathbb{D}$. Si $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, on a

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i} \Longleftrightarrow z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

Posons $g(\zeta) = i\,(1+\zeta)\,/\,(1-\zeta)$. Alors

$$\operatorname{Im} g(\zeta) = \operatorname{Re}\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \operatorname{Re}\frac{1-|\zeta|^2+2i\operatorname{Im}\zeta}{|1-\zeta|^2} = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\zeta|^2} > 0$$

$g(\zeta)$ est donc dans P et par construction $f(g(\zeta)) = \zeta$.

Conclusion : f est une bijection de P sur $\mathbb{D}$ et f^{-1} est l'application de $\mathbb{D}$ dans P, $\zeta\mapsto i\,(1+\zeta)\,/\,(1-\zeta)$.

Exercice 4. On a $P(z) = \sum_{i=0}^{n}\frac{P^{(i)}(z_0)}{i!}(z-z_0)^i$. Or $z\mapsto R(z) = \sum_{i=2}^{n}\frac{P^{(i)}(z_0)}{i!}(z-z_0)^{i-2}$ est continue sur $\mathbb{C}$ donc bornée par une constante M sur un voisinage V de z_0. Donc $P(z) = P(z_0)+(z-z_0)P'(z_0)+(z-z_0)^2R(z)$ et le dernier terme est négligeable devant $|z-z_0|$:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|(z-z_0)^2R(z)|}{|z-z_0|} \le \lim_{z\to z_0} M|z-z_0| = 0\,.$$

Donc P est $\mathbb{C}-$dérivable en z_0 et $\frac{\partial P}{\partial z}(z_0) = P'(z_0)$.

Exercice 5.

(1) On a
$$|P(z)-a_nz^n| = |\sum_{i=0}^{n-1} a_iz^i| = o(a_nz^n)$$
quand $|z|\to+\infty$ car $\lim_{|z|\to+\infty}\dfrac{|\sum_{i=0}^{n-1}a_iz^i|}{|a_nz^n|}=0$. Donc $z\mapsto P(z)$ est équivalent à $z\mapsto a_nz^n$ quand $|z|\to+\infty$. Ceci implique que
$$\lim_{|z|\to+\infty}|P(z)| = \lim_{|z|\to+\infty}|a_nz^n| = +\infty\,.$$
Soit $m=\inf_{z\in\mathbb{C}}|P(z)|$. Comme $\lim_{|z|\to+\infty}|P(z)|=+\infty$, Il existe $R>0$ tel que $|z|\geq R \Rightarrow |P(z)|>m$. Donc $m=\inf_{z\in\overline{D(0,R)}}|P(z)|$. La fonction $z\mapsto|P(z)|$ est continue sur le compact $\overline{D(0,R)}$, elle atteint sa borne inférieure: $\exists z_0\in\overline{D(0,R)}$ tel que $m=|P(z_0)|$.

(2) On a $P(z)=\sum_{i=0}^{n}\dfrac{P^{(i)}(z_0)}{i!}(z-z_0)^i$. Comme P est non constant, il existe un $k\geq1$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé, ce qui entraine que
$$P(z)=P(z_0)+\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+o(|z-z_0|^k)$$
et
$$P(z_0+\epsilon e^{-i\frac{\theta_0}{k}+i\frac{\theta}{k}}) = P(z_0)+\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}\epsilon^ke^{-i\theta_0+i\theta}+o(|\epsilon|^k)=P(z_0)+\rho\epsilon^ke^{i\theta}+o(|\epsilon|^k)\,.$$

(3) Si $P(z_0)\neq0$ alors $P(z_0)=\rho'e^{i\theta_0'}$ et le développement limité précédent avec $\theta=\pi+\theta'$ donne
$$\begin{aligned}|P(z_0+\epsilon e^{-i\frac{\theta_0}{k}+i\frac{\theta}{k}})| &= |\rho'e^{i\theta_0'}-\rho\epsilon^ke^{i\theta_0'}+o(|\epsilon|^k)|\\ &= \rho'-\rho\epsilon^k+o(|\epsilon|^k)\\ &< \rho' \text{ si } \epsilon\to0^+\end{aligned}$$

(4) Montrons le théorème de D'Alembert-Gauss: Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n\geq 1$. D'aprés 1), $z\to|P(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$ et d'aprés 3), ce minimum est nécessairement nul.

Exercice 6. 1) et 2) sont faits en cours.

3) La restriction de la fonction f à la droite $y=0$ est constante donc dérivable et $\dfrac{\partial}{\partial x}f(0,0)=0$. De même, $\dfrac{\partial}{\partial y}f(0,0)=0$. Les équations de Cauchy-Rieman sont vérifiées mais f n'est pas continue en l'origine. Comme toujours, l'existence de dérivées partielles en un point n'entrainent pas la continuité ou la dérivabilité.

Exercice 7. On notera $z=x+iy$ un point de $\mathbb{C}$.

(1) La fonction $z\mapsto|z|^2=x^2+y^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$. Elle est donc $\mathbb{C}-$dérivable ssi elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann. On a $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2x$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)=2y$.
$$\frac{\partial}{\partial x}f=-i\frac{\partial}{\partial y}f \iff x=y=0\,.$$
Cette fonction est donc $\mathbb{C}-$dérivable seulement en l'origine et $f'(0)=0$ car $f(z)=0+0+|z|^2$ est le DL de f en 0. De manière équivalente: $\dfrac{\partial}{\partial\bar z}z\bar z=0.\bar z+z.1=z$ est nulle ssi $z=0$.

(2) La fonction $f:\mathbb{C}\backslash\{i\}\ni z\mapsto\dfrac{z+i}{z-i}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ comme quotient de fonctions holomorphes et $f'(z)=\dfrac{-2i}{(z-i)^2}$.

(3) $f: z \mapsto |z| - z$ est définie sur $\mathbb{C}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Elle n'est pas différentiable en l'origine car $z \mapsto z$ est de classe C^∞ mais $z \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ n'est pas différentiable en l'origine. Les points de $\mathbb{C}-$dérivabilité de f sont ceux de $z \mapsto |z|$ (car $z \mapsto z$ est holomorphe). $\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{2x}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Mais $\frac{\partial}{\partial x} f = -i\frac{\partial}{\partial y} f$ n'est jamais vérifiées sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(4) $f: z = x+iy \mapsto x+iy^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = -i\frac{\partial}{\partial y} f \iff 1 = 2y\,.$$

Dans ce cas $f'(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 1$.

Exercice 8. Comme $f = P + iQ$ est holomorphe,

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) & = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) & = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Donc P constante entraine que la Jacobienne de f est nulle i.e. que f' est nulle. L'ouvert étant connexe cela entraine que f est constante (cf cours). On peut aussi dire que si $f+\bar{f}$ est constante (donc holomorphe) alors $\bar{f}$ est holomorphe. Donc $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{f} = \overline{\frac{\partial}{\partial z} f}$ et donc f' est nulle (ce qui en passant montre c)). b) se démontre de même ou on applique a) à if. c) vient d'être montré. d) Si $ax+by+c=0$ (a ou $b \neq 0$) contient $f(U)$ alors $aP+bQ+c=0$. Dérivant en x ou en y, on trouve $0 = a\frac{\partial}{\partial x}P + b\frac{\partial}{\partial x}Q = a\frac{\partial}{\partial x}P - b\frac{\partial}{\partial y}P$ et $0 = a\frac{\partial}{\partial y}P + b\frac{\partial}{\partial y}Q = a\frac{\partial}{\partial y}P + b\frac{\partial}{\partial x}P$. Ce qui entraine $\frac{\partial}{\partial x}P = \frac{\partial}{\partial y}P = 0$. Et on utilise a). Ou on écrit $a(f+\bar{f}) - ib(f-\bar{f}) + c = 0$, on dérive en z, on a $(a+ib)f' = 0$. Ce qui entraine f' nulle.

Exercice 9.

(1) Soit $z \in U$. Par définition $DF(z)$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui dans la base (dx, dy) de $\mathcal{L}_\mathbb{R}(\mathbb{C})$ est donnée par l'expression

$$DF(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(z)\,dy.$$

Rappelons au passage que dx est la forme $\mathbb{R}$-linéaire $w \mapsto \operatorname{Re} w$ et que dy est la forme $\mathbb{R}$-linéaire $w \mapsto \operatorname{Im} w$. Lorsque $u, v \in \mathbb{R}$ et $w = u+iv$, on a donc

$$\begin{aligned} DF(z).w &= \frac{\partial F}{\partial x}(z)\,\frac{w+\overline{w}}{2} + \frac{\partial F}{\partial y}(z)\,\frac{w-\overline{w}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(z) - i\frac{\partial F}{\partial y}(z)\right) w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(z) + i\frac{\partial F}{\partial y}(z)\right)\overline{w} \\ &= \frac{\partial F}{\partial z}(z)\,w + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z)\,\overline{w}. \end{aligned}$$

D'où

$$DF = \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

On sait d'après le cours que F est holomorphe sur U si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0$ et que dans ce cas $\frac{\partial F}{\partial z} = F'$ soit $DF = F'dz$.

Remarque. Si f est holomorphe, on a $i\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial x}$ et donc $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y}$.

(2) Evident

Exercice 10.

(1) Soit g une application de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant $f(U)$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g\circ f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial x}(f)\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}(f)\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2i}\frac{\partial g}{\partial y}(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial g}{\partial z}(f)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f)\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial g\circ f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x}(f)\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}(f)\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(f)\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right)+\frac{1}{2i}\frac{\partial g}{\partial y}(f)\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial g}{\partial z}(f)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f)\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\end{aligned}$$

ce qui implique immédiatement les deux formules annoncées.

(2) φ est évidemment de classe C^1 sur U et on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{f(\overline{z})} = \overline{\left(\frac{\partial f(\overline{z})}{\partial z}\right)} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(\overline{z})\frac{\partial z}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\overline{z})\frac{\partial \overline{z}}{\partial z}}.$$

Comme f est holomorphe, $\frac{\partial f}{\partial z}(\overline{z}) = 0$. De plus, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = \overline{\partial z/\partial \overline{z}} = \overline{0} = 0$. Donc φ est holomorphe.

Exercice 11. Revenons à la définition:

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f\circ g(z+h)-f\circ g(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(z+h))-f(g(z))}{g(z+h)-g(z)}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\\ &= \lim_{y=g(z+h)-g(z)\to 0}\frac{f(y+g(z))-f(g(z))}{y}\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h} = f'(g(z)).g'(z)\end{aligned}$$

car g est continue et les deux limites existent.

(1) Si $f = P+iQ$ est holomorphe,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x} &= \dfrac{\partial Q}{\partial y}\\ \dfrac{\partial P}{\partial y} &= -\dfrac{\partial Q}{\partial x}.\end{cases}$$

Donc

$$Det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y}.\end{pmatrix} = [\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)]^2+[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)]^2 .$$