TD 2.

Exercice 1. Mq la famille $\left(\dfrac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable ssi $\alpha > 2$.

Exercice 2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

(1) Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} c_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$.

(2) En déduire que si $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ existe dans $[0,+\infty]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (c_n)^{\frac{1}{n}} = L$

Exercice 3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ dans les cas suivants: $a_{2p} = a^{2p}$ et $a_{2p+1} = b^{2p+1}$, $0 < a < b$; $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$; $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p p!}{(p+\sin p)^p}$

Exercice 4. Mq si $a_n = \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = O(n^\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n z^n$.

Exercice 5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge. On lui associe la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}$, $n \geq 1$.

(1) Mq $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $D(0,1)$ et que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(z) = \sum\limits_{p\geq 1}\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^{np}$ pour $z \in D(0,1)$. Quelle identité peut-on en déduire lorsque $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_n = \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1$? ($a_n = (-1)^n$, $a_n = n$...?)

(2) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(z)$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,1)}$ (On pourra étudier $(z \mapsto u_n(\frac{1}{z}))_{n\in\mathbb{N}}$).

Exercice 6.

(1) (Transformation d'Abel) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour $n \geq m \in \mathbb{N}$, on pose $V_m^n = \sum\limits_{m}^{n} v_i$. Mq si $n > m$ alors $\sum\limits_{m}^{n} u_i v_i = \sum\limits_{m}^{n-1} (u_i - u_{i+1}) V_m^i + u_n V_m^n$.

(2) En déduire le comportement sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ des séries $\sum \dfrac{z^n}{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) (Un théorème de Picard) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Mq la série $\sum c_n z^n$ converge sur $\mathbb{U} \setminus \{1\}$. (Indication: On pourra utiliser la transformation d'Abel pour montrer que la série vérifie le critére de Cauchy).

Exercice 7. (Un théorème d'Abel) Soit $k \geq 1$. Notons $E = \{z \in D(0,1), \dfrac{|1-z|}{1-|z|} \leq k\}$.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum_0^{+\infty} c_n z^n$ converge en $z = 1$. Alors $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in E}} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \to \sum_0^{+\infty} c_n = s$

(1) Vérifiez que l'on peut se ramener à $s = 0$.

(2) Notons f la somme de la série sur $D(0,1)$. Pour $z \in D(0,1)$, développez $\dfrac{f(z)}{1-z}$ en série entière.

(3) Conclure (Utilisez le fait $s = 0$).

(4) Appliquer le résultat précédent au calcul de $\sum_1^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

Exercice 8. Donner le développement en série entières des fonctions suivantes, et donner le rayon de convergence de la série obtenue:
$f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z-3}$ en 0; $g(z) = \dfrac{1}{3-2z}$ en 3; $h(z) = e^z$ en 1.

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{\sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$. Développer f en série entière au voisinage de 0, et donner le rayon de convergence de la série obtenue. Pour $|z| < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire un calcul de $I(z) = \int_0^{2\pi} \dfrac{\sin\alpha\sin(n\alpha)}{1-2z\cos\alpha + z^2} d\alpha$

Exercice 10. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ une série de rayon de convergence R.

(1) Pour $r \in [0, R[$, mq $M(r,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$. En déduire les inégalités de cauchy $|a_n| r^n \leq max_{|z|=r}|f(z)|$. Et montrer que s'il y a égalité pour un entier n alors $f(z) = a_n z^n$.

(2) En déduire que $r \mapsto M(r,f)$ est une fonction croissante sur $[0, R[$ et que $\lim\limits_{r\to R^-} M(r,f) = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 R^{2n} \in [0, +\infty]$.

Exercice 11. On considère la série entière (de la variable $z-1$) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$. Calculer son rayon de convergence et montrer que, f, la somme de cette série sur $D(1,1)$ vérifie l'équation $e^{f(z)} = z$.

Exercice 12.

(1) Préciser les sous-espaces discrets de $\mathbb{C}$ dans la listes suivantes: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $A = \{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $\overline{A}$, $A \cup \mathbb{N}^*$, e^{iA}, $e^{iA} \cup \{1\}$

(2) Déterminer les sous-espaces connexes d'un espace discret.

(3) Montrer qu'un sous-ensemble discret et fermé de $\mathbb{C}$ est localement fini.

Exercice 13.

(1) Détèrminer les fonctions analytiques dans $D(0,1)$ qui vérifient $f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Soit f une fonction analytique dans $D(0,1)$. On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels distincts de l'intervalle $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ telle que $f(a_n)\in\mathbb{R}$.

Dèmontrer que $\forall z\in D(0,1)$, $\overline{f(\overline{z})}=f(z)$ (Montrez d'abord que $z\mapsto\overline{f(\overline{z})}$ est analytique).

(3) Soit f une fonction analytique sur $D(0,1)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels qui converge vers 0. On suppose que $f(a_{2p+1})=f(a_{2p})\in\mathbb{R}$. Mq f est constante (On raisonne sur la dérivée).

Correction du TD 2.

Exercice 1. On a $\displaystyle\sum_{i,j\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(i+j)^\alpha}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{i+j=n,\ i,j\geq 1}\frac{1}{(i+j)^\alpha}=\sum_{n\geq 2}\frac{n-1}{n^\alpha}$. Cette somme converge pour $\alpha>2$ et diverge vers $+\infty$ sinon.

Exercice 2. Notons que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres strictements positifs alors $(\liminf_n a_n)^{-1}=\limsup_n a_n^{-1}$ dans $[0,+\infty]$. Il suffit donc de montrer que pour toute suite de nombres strictement positifs $\limsup_n a_n^{\frac{1}{n}}\leq\limsup_n\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (car passant aux inverses cela entraine une inégalité pour les lim inf, d'où égalité lorsque $\lim_n\frac{c_{n+1}}{c_n}$ existe). Si $L=+\infty$, le résultat est évident. Supposons $L\in\mathbb{R}$. Soit $\epsilon>0$, pour $n\geq n_\epsilon$, $c_{n+1}\leq(L+\epsilon)c_n$. Par recurrence, $c_n\leq(L+\epsilon)^{n-n_\epsilon+1}c_{n_\epsilon}$. Prenant la racine $n-$ième, puis la limite supérieure des deux membres, on a $\limsup_n c_n^{\frac{1}{n}}\leq(L+\epsilon).1$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\epsilon>0$, le résultat est démontré.

Exercice 3.

(1) Comme $a_n^{\frac{1}{n}}=a$ si n est pair et $a_n^{\frac{1}{n}}=b$ si n est impair, b est la plus grande valeur d'adhérence de la suite, le critère de Hadamard donne alors $\rho=b^{-1}$.

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=(\frac{n}{n+1})^n\to_{n\to+\infty}e^{-1}$. L'exercice précédent montre que $\rho=e$.

(3) Comme $n!\simeq n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling), $|a_{2p}|^{\frac{1}{2p}}\simeq\dfrac{p^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}(2\pi p)^{\frac{1}{4p}}}{p^{\frac{1}{2}}(1+\frac{\sin p}{p})^{\frac{1}{2}}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{-\frac{1}{2}}$

Exercice 4. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum b_nz^n$. Supposons $R>0$. Alors $\forall 0<r<R$, la suite $(b_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une majorante géométrique sommable (caractérisation du rayon de convergence) car si $r<r'<R$ alors $|b_nr^n|\leq\sup_n|b_nr'^n|(\frac{r}{r'})^n=M(\frac{r}{r'})^n$. Donc $\sup_n|a_nr^n|\leq\sup_n Cn^\alpha M(\frac{r}{r'})^n<+\infty$ ($C>0$ est tel que $|\lambda_n|\leq Cn^\alpha$). Le lemme d'Abel montre que le rayon de convergence R' de $\sum_n a_nz^n$ est plus grand que tout $r<R$. D'où $R'\geq R$.
Bien entendu, une démonstration plus courte repose sur la formule de Hadamard: On a $\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}\leq\limsup_n(Cn^\alpha|b_n|)^{\frac{1}{n}}=R$.

Exercice 5.

(1) Soit K un compact de $D(0,1)$. Comme $\sup_K|z|=\max_K|z|=r<1$, on a $\|\frac{z^n}{1-z^n}\|_{\infty,K}=\sup_K\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right|\leq\frac{r^n}{1-r}$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ étant convergente, on a $M=\sup_{n\geq1}|a_n|<+\infty$, d'où $\sum_{n\geq1}\|u_n(z)\|_{\infty,K}\leq M\frac{r}{(1-r)^2}$. La série double $\sum_{p,n\geq1}a_nz^{np}$ est absolument sommable pour tout $z\in D(0,1)$ car $\displaystyle\sum_{n,p\geq1}|a_n||z|^{np}=\sum_n|a_n|\sum_p|z|^{np}=\sum_n|a_n|\frac{|z|^n}{1-|z|^n}\leq M\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$.

Donc $\sum_n a_n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_p \sum_n a_n z^{np}$. En particulier pour $a_n = \frac{1}{n!}$,
on obtient $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{p\geq 1} (e^{z^p} - 1)$.

(2) Soit K un compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$. Pour $z \in K$, $u_n(\frac{1}{z}) = -u_n(z) - a_n$, *i.e.* $u_n(z) = -u_n(\frac{1}{z}) - a_n$. L'application $\varphi : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ étant continue, $\varphi(K)$ est un compact dans $D(0,1)$, donc $\sum_{n\geq 1} u_n(\frac{1}{z})$ converge normalement sur K (voir 1)). $\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ étant la somme d'une série normalement convergente sur K et d'une série uniformément convergente sur K ($z \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n$), elle converge uniformément sur K.

Exercice 6.

(1) $\sum_m^n u_i v_i = u_m v_m + u_{m+1}(V_m^{m+1} - V_m^m) + \ldots + u_n((V_m^n - V_m^{n-1}) = V_m^m(u_m - u_{m+1}) + \ldots + V_m^{n-1}(u_{n-1} - u_n) + u_n V_m^n$. D'où la formule. On utilise la transformation d'Abel pour montrer la convergence de la série, sachant que les sommes V_m^n sont majorées (en m, n) et par exemple que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit vers 0:

(2) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ a un rayon de convergence égale à 1. Soit $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Pour $\alpha \leq 0$, le terme général de la série ne converge pas vers 0, donc la série ne converge pas. Pour $\alpha > 1$, la série est absolument convergente. Pour $0 < \alpha < 1$, la série diverge en 1 (critère de Riemann). En général, si $z \in \overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$, on a $\sum_m^n \frac{z^n}{n^\alpha} = V_m^m(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha}) + \ldots + V_m^{n-1}(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{(n)^\alpha}) + n^{-\alpha} V_m^n$ avec $V_m^j = \sum_{k=m}^{j} z^j = z^m \frac{z^{j-m+1}}{z-1}$. D'où $|\sum_m^n \frac{z^n}{n^\alpha}| \leq \sum_{k=m}^{n-1} (k^{-\alpha} - (k+1)^{-\alpha})|V_m^k| + n^{-\alpha}|V_m^n| \leq \frac{2}{|1-z|} m^{-\alpha} \to 0$ quand $m \leq n \to +\infty$. La série converge donc pour $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. On a même montrer, grâce à la majoration du reste, qu'il y a convergence uniforme sur tout compact de $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$ (car la fonction $z \mapsto \frac{1}{|1-z|}$ est bornée sur un tel compact).

(3) On utilise comme précédement la transformation d'Abel, on obtient $|\sum_m^n c_i z^i| \leq \frac{2}{|1-z|} c_m$. D'où la convergencce.

Exercice 7.

(1) Quitte à remplacer c_0 par $c_0 - \sum_{n\geq 0} c_n$, on peut supposer que la somme vaut 0, on vérifiera que l'on ne change pas la nature du problème.

(2) Supposant donc la somme de la série nulle, on a $\forall z \in D(0,1)$, $\frac{f(z)}{1-z} = (\sum_{n\geq 0} z^n)(\sum_{n\geq 0} c_n z^n) = \sum_{p,q\geq 0} c_p z^{p+q} = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} c_k) z^n$ (on vérifie que la série double est sommable dans $D(0,1)$ (c.f. le cours)). D'oú, posant $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, on a $f(z) = (1-z) \sum_{n\geq 0} s_n z^n$.

(3) Soit $\epsilon > 0$, comme $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |s_n| < \epsilon$. D'où $|f(z)| \leq |1-z||\sum_{0}^{n_0-1} s_n z^n| + \epsilon|1-z|\sum_{n\geq n_0}|z|^n \leq |1-z||\sum_{0}^{n_0-1} s_n z^n| + \epsilon|1-z|\frac{|z|^{n_0}}{1-|z|}$. D'où $\limsup_{z\in E, z\to 1}|f(z)| \leq 0+\epsilon k$. Ceci étant vérifié pour tout $\epsilon > 0$, on a bien $\lim_{z\in E,z\to 1} f(z) = 0$.

(4) La série converge (critère pour les séries alternées), donc le point précédent donne $\lim_{z\in[0,1[,z\to 1}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Mais pour $z \in]-1,1[$, $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n = \log(1+z)$ (car sur $D(0,1)$, on a $\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$, la convergence étant uniforme sur les compacts de $D(0,1)$, on peut intégrér terme à terme sur $[0,z]$). D'où $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.

Exercice 8.

(1) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-3)}$ est une fonction rationnelle avec pôles en -1 et 3. Elle est donc analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{-1,3\}$. Comme $f(z) = \frac{1}{4}(\frac{1}{z+1}+\frac{3}{z-3}) = \frac{1}{4}(\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n - \sum_{n\geq 0}(\frac{z}{3})^n)$. La première série à un rayon de convergence égale à 1, la seconde à 3. Donc $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \frac{1}{4}((-1)^n - \frac{1}{3}^n)$, le développement en série étant valable sur $D(0,1)$.

(2) $g(z) = \frac{1}{3-2z}$ est une fonction rationnelle ayant un pôle en $\frac{3}{2}$ donc g est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{\frac{3}{2}\}$. On a $g(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)} = \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^{n+1}}(z-3)^n$, le développement étant valable sur $D(3,\frac{3}{2})$.

(3) $z \mapsto e^z$ est somme d'une série entière sur $\mathbb{C}$, elle est donc analytique sur $\mathbb{C}$. Notons que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la série double $\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{z_1^i}{i!}\frac{z_2^j}{j!}$ est absolument sommable (car $\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{|z_1|^i}{i!}\frac{|z_2|^j}{j!} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{|z_1|^i}{i!}\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{|z_2|^j}{j!} = e^{|z_1|}e^{|z_2|}$). Donc, $e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{z_1^i}{i!}\frac{z_2^j}{j!} = \sum_{n\geq 0}\sum_{i+j=n}\frac{z_1^i z_2^j}{i!j!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}$. Donc $e^z = e^1 e^{z-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{e^1}{n!}(z-1)^n$, le développement étant valable pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 9.

(1) On a $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = (z-e^{i\alpha})(z-e^{-i\alpha})$. Donc f est une fonction rationnelle avec pôles en $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$. $f(z) = f(z,\alpha) = \frac{\sin\alpha}{z^2-2z\cos\alpha+1} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{z-e^{i\alpha}} - \frac{1}{z-e^{-i\alpha}}) = \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}(e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha})z^n = \sum_{n\geq 0}\sin(n+1)\alpha z^n$. Les développements ayant un rayon de convergence 1.

(2) $I(z) = \int_0^{2\pi}\sin n\alpha f(z,\alpha)d\alpha = \int_0^{2\pi}\sin n\alpha(\sum_{n\geq 0}\sin(n+1)\alpha z^n)d\alpha$. Or pour $z \in D(0,1)$, la série de fonctions $\alpha \mapsto \sum_{k\geq 0}\sin n\alpha\sin(k+1)\alpha z^k$ est normalement convergente sur $[0,2\pi]$.

On peut donc intégrer terme à terme cette série. $I(z) = \sum_{k\geq 0} z^k \int_0^{2\pi} \sin n\alpha \sin(k+1)\alpha d\alpha =$ $\sum_{k\geq 0} z^k \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(n-k-1)\alpha - \cos(n+k+1)\alpha) d\alpha = \pi z^{n-1}$ pour $n \geq 1$ et l'intégrale est nulle pour $n = 0$.

Exercice 10.

(1) Soit $r < R$. La série double $\sum_{p,q\in\mathbb{N}} |a_p a_q| r^{p+q} = (\sum_{p\in\mathbb{N}} |a_p| r^p)^2$ étant convergente (car $r < R$), la série double de fonctions $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto \sum_{p,q\in\mathbb{N}} a_p \overline{a_q} e^{i(p-q)\theta} r^{p+q}$ est normalement convergente. On pourra intervertir sommation et intégration. On a donc, comme $z \mapsto \overline{z}$ est continue, $+\infty > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_{k\geq 0} a_k r e^{ik\theta})\overline{(\sum_{k\geq 0} a_k r e^{ik\theta})} =$ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_{k\geq 0} a_k r e^{ik\theta})(\sum_{k\geq 0} \overline{a_k r e^{ik\theta}}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{p,q\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} a_p \overline{a_q} r^{p+q} e^{i(p-q)\theta} d\theta = \sum_{p,q\in\mathbb{N}} \delta_p^q a_p \overline{a_q} r^{p+q} =$ $\sum_{p\geq 0} |a_p|^2 r^{2p}$.

(2) $r \mapsto M(r, f)$ étant une série de fonctions croissantes est une fonction croissante.

(3) On a $\sum_0^n |a_k|^2 r^{2k} \leq M(r, f) \leq \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 R^{2n}$. Passant à la limite $r \to R$, puis à la limite $n \to +\infty$, on obtient le résultat.

Exercice 11. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Donc le rayon de convergence est 1 (c.f. exercice 2). Notons f la somme de cette série sur le disque $D(1, 1)$. f est analytique et f restreinte à $]0, 2[$ coincide avec la fonction $x \mapsto \ln x$ (cf Deug). La fonction analytique sur $D(1, 1)$, $z \mapsto e^{f(z)} - z$ étant nulle sur $]0, 2[$, non discret, est identiquement nulle.

Exercice 12.

(1) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont discrets pour la topologie induite, car $D(n, 1) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont non discrets, car (par exemple) tout point de $\mathbb{Q}$ est point d'accumulation de $\mathbb{Q}$, de même tout point de $\mathbb{R}$ est point d'accumulation de $\mathbb{R}$. A est discret: $A \cap D(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)}) =$ $\frac{1}{n}$). $\overline{A}$ n'est pas discret car 0 est point d'accumulation. On vérifie que $A \cup \mathbb{N}^*$ est discret. e^{iA} est discret car $t \mapsto e^{it}$ est iun homéomorphisme de $]-\pi, \pi[$ sur son image. Par contre $e^{iA} \cup \{1\}$ n'est pas discret car 1 est point d'accumulation.

(2) Dans un espace discret, un singleton étant ouvert et fermé, la composante connexe d'un point p est le singleton $\{p\}$. On dit qu'un espace topologique est totalement discontinu si la composante connexe d'un point p est le singleton $\{p\}$. Un espace discret est donc totalement discontinu. Notons que $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu sans être discret.

(3) $\mathbb{C}$ étant localement compact, un sous-ensemble discret et fermé de $\mathbb{C}$ est donc discret et localement compact. Or un ensemble discret et compact est fini (car les points de cet ensemble forment un recouvrement ouvert).

Exercice 13.

(1) la fonction $g : D(0, 1) \ni z \mapsto f(z) - z^2$ est analytique sur $D(0, 1)$ car f l'est. L'ensemble de ses zéros $Z(g)$ est fermé dans $D(0, 1)$ (car fonction continue) et contient par hypothèse $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$. Il contient donc l'adhérence de cet ensemble. D'où $0 \in Z(g)$ n'est pas un point isolé de $Z(g)$, ce qui entraine g est nulle sur $D(0, 1)$ et $f = z^2$ sur $D(0, 1)$. (Si

l'ensemble des zéros d'une fonction analytique à un point d'accumulation *dans* l'ensemble de définition de la fonction alors elle est identiquement nulle sur la composante connexe de l'ensemble de définition qui contient ce point d'accumulation).

(2) Montrons d'abord que si f est analytique sur $D(0,1)$ alors $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est analytique sur $D(0,1)$. Soit $z_0 \in D(0,1)$, alors $\overline{z_0} \in D(0,1)$ et $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - \overline{z_0})^n$ sur un voisinage $D(\overline{z_0}, \rho)$ de $\overline{z_0}$ dans $D(0,1)$. L'application $z \mapsto \overline{z}$ étant continue, on a $\forall z \in D(z_0, \rho)$, $\bar{z} \in D(\bar{z}_0, \rho)$, $\overline{f(\overline{z})} = \overline{\sum_{n \geq 0} a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n} = \sum_{n \geq 0} \overline{a_n} (z - z_0)^n$. Ce qui prouve l'assertion. On considère alors la fonction analytique $g : D(0,1) \ni z \mapsto\rightarrow f(z) - \overline{f(\overline{z})}$. Notons que $g(a_n) = 0$. Par hypothèse, l'ensemble $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est infini, contenu dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ compact. Donc cet ensemble admet un point d'accumulation dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Donc l'ensemble des zéros de g admet un point d'accumulation. Donc g est nulle.

(3) Les hypothèses faites entrainent que $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$. En particulier, la restriction de f à l'axe réel est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme $f(a_{2p+1}) = f(a_{2p}) \in \mathbb{R}$ et $a_{2p+1} < a_{2p}$, le théorème de Rolle entraine que f' s'annule en un point $\alpha_p \in]a_{2p+1}, a_{2p}[$. Mais $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ entraine que 0 est un point d'accumulation de $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}}$, donc 0 est un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de f', fonction analytique sur $D(0,1)$. f' est donc identiquement nulle, ce qui entraine que f est constante (car pour tout $z, z' \in D(0,1)$, $|f(z) - f(z')| \leq \sup_{y \in [z,z']} \|df(y)\| |z - z'|$, et pour une fonction analytique (donc holomorphe) $df(y)$ s'identifie à $f'(y)$).