Fonctions analytiques.

Exercice 1. Mq la famille $\left(\dfrac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable ssi $\alpha > 2$.

Exercice 2.

(1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1, n\neq m} \frac{1}{m^2-n^2}$ est convergente de somme $\dfrac{-3}{4m^2}$. Indication: Calculer la somme partielle d'ordre n, en décomposant la fraction rationnelle $\dfrac{1}{m^2-n^2}$ en éléments simples.

(2) On pose $u_{nm}\dfrac{1}{m^2-n^2}$ si $n \neq m$, $u_{nn} = 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} u_{nm} = -\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} u_{nm} \neq 0$. La famille $(u_{nm})_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est elle sommable?

Exercice 3. Montrer que si une série de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est semi-convergente alors pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(n)} = \alpha$.

Exercice 4. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

(1) Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} c_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ dans $[0,+\infty]$.

(2) En déduire que si $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ existe dans $[0,+\infty]$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(c_n)^{\frac{1}{n}} = L$

Exercice 5. Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ dans les cas suivants: $a_{2p} = a^{2p}$ et $a_{2p+1} = b^{2p+1}$, $0 < a < b$; $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$; $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p p!}{(p+\sin p)^p}$

Exercice 6. Mq si $a_n = \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = O(n^\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n z^n$.

Exercice 7.

(1) On se donne une série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $K, k \geq 0$ tels que $a)$ $|a_n {z_0}^n| < Kn^k$ ou $b)$ $|a_0 + \ldots + a_n {z_0}^n| < Kn^k$. Montrer que le rayon de convergence de cette série est plus grand que $|z_0|$.

Exercice 8. Montrer que si le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est $R > 0$ alors le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{n!} z^n$ est infini et que sa somme $f(z)$ vérifie $\forall 0 < \theta < 1$, $\exists M(\theta)$ telle que $|f(z)| \leq M(\theta) e^{\frac{|z|}{\theta R}}$.

Exercice 9. On suppose que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ a un rayon de convergence plus grand que 1. On lui associe la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}$, $n \geq 1$.

(1) Mq $\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $D(0,1)$ et que $\sum_{n\geq 1} u_n(z) = \sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1} a_n z^{np}$ pour $z \in D(0,1)$. Quelle identité peut-on en déduire lorsque $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_n = \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1$? ($a_n = (-1)^n$, $a_n = n$...?)

(2) On suppose de plus que la série entière est convergente en 1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$ (On pourra étudier $(z \mapsto u_n(\frac{1}{z}))_{n\in\mathbb{N}}$). A-t-on convergence normale sur ces compacts?

Exercice 10. Si $|z| < 1$ et $\tau(n)$ est le nombre de diviseur de n montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n\geq 1} \tau(n) z^n$ avec convergence uniforme sur les compacts de $D(0,1)$.

Exercice 11.

(1) (Transformation d'Abel) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour $n \geq m \in \mathbb{N}$, on pose $V_m^n = \sum_m^n v_i$. Mq si $n > m$ alors $\sum_m^n u_i v_i = \sum_m^{n-1} (u_i - u_{i+1}) V_m^i + u_n V_m^n$.

(2) En déduire le comportement sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ des séries $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) (Un théorème de Picard) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Mq la série $\sum c_n z^n$ converge sur $\mathbb{U} \setminus \{1\}$. (Indication: On pourra utiliser la transformation d'Abel pour montrer que la série vérifie le critére de Cauchy).

Exercice 12. (Un théorème d'Abel) Soit $k \geq 1$. Notons $E = \{z \in D(0,1), \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq k\}$. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum_0^{+\infty} c_n z^n$ converge en $z = 1$. Alors $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in E}} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \to \sum_0^{+\infty} c_n = s$

(1) Vérifiez que l'on peut se ramener à $s = 0$.

(2) Notons f la somme de la série sur $D(0,1)$. Pour $z \in D(0,1)$, développez $\frac{f(z)}{1-z}$ en série entière.

(3) Conclure (Utilisez le fait $s = 0$).

(4) Appliquer le résultat précédent au calcul de $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Exercice 13. Donner le développement en série entières des fonctions suivantes, et donner le rayon de convergence de la série obtenue:
$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$ en 0; $g(z) = \frac{1}{3-2z}$ en 3; $h(z) = e^z$ en 1.

Exercice 14. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ une série de rayon de convergence R.

(1) Pour $r \in [0, R[$, mq $M(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$. En déduire les inégalités de cauchy $|a_n| r^n \leq max_{|z|=r} |f(z)|$. Et montrer que s'il y a égalité pour un entier n alors $f(z) = a_n z^n$.

(2) En déduire que $r \mapsto M(r,f)$ est une fonction croissante sur $[0,R[$ et que $\lim_{r\to R^-} M(r,f) = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 R^{2n} \in [0,+\infty]$.

(3) En déduire que si f est bornée sur le disque unité (et $R=1$) alors $a_n = 0(1)$.

Exercice 15. On considère la série entière (de la variable $z-1$) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$.

Calculer son rayon de convergence et montrer que, f, la somme de cette série sur $D(1,1)$ vérifie l'équation $e^{f(z)} = z$.

Exercice 16.

(1) Préciser les sous-espaces discrets de $\mathbb{C}$ dans la listes suivantes: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $\overline{A}$, $A \cup \mathbb{N}^*$, e^{iA}, $e^{iA} \cup \{1\}$

(2) Déterminer les sous-espaces connexes d'un espace discret.

(3) Montrer qu'un sous-ensemble discret et fermé de $\mathbb{C}$ est localement fini.

Exercice 17.

(1) Détèrminer les fonctions analytiques dans $D(0,1)$ qui vérifient $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Soit f une fonction analytique dans $D(0,1)$. On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels distincts de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ telle que $f(a_n) \in \mathbb{R}$.

Démontrer que $\forall z \in D(0,1)$, $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$ (Montrez d'abord que $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est analytique).

(3) Soit f une fonction analytique sur $D(0,1)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels qui converge vers 0. On suppose que $f(a_{2p+1}) = f(a_{2p}) \in \mathbb{R}$. Mq f est constante (On raisonne sur la dérivée).

Exercice 18. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \mapsto \mathbb{C}$ une fonction analytique et $z_0 \in U$.

(1) Montrer que $f(z_0) = \dots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$ et $f^{(k)}(z_0) \neq 0 \iff \exists g \in A(U)$, telle que $g(z) = (z-z_0)^k g(z)$ et $g(z_0) \neq 0$.

Exercice 19. Montrer que la réunion de deux fèrmés discrets est un férmé discret. En déduire que si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ alors $A(U)$ est intègre.