Licence, Analyse Complexe,

Intégration sur les chemins de $\mathbb{C}$.Formule de Cauchy

Conventions: On oriente un arc de cercle dans le sens direct, et le segment $[a, b]$ par la paramétrisation $[0, 1] \ni t \mapsto a + t(b - a)$. Si γ est un arc, on note $< \gamma >$ son support.

Exercice 1.

(1) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $x_0, y_0 > 0$. On note $A_1 = [0, x_0] \cup [x_0, x_0 + iy_0]$ et $A_2 = [0, iy_0] \cup [iy_0, x_0 + iy_0]$.
Pour $j = 1, 2$, Calculer $\displaystyle\int_{A_j} \mathrm{Re} z dz$, $\displaystyle\int_{A_j} \mathrm{Im} z dz$, $\displaystyle\int_{A_j} (\mathrm{Re} z + i\mathrm{Im} z)dz$, $\displaystyle\int_{A_j} (\mathrm{Re} z - i\mathrm{Im} z)dz$.

(2) Calculer $\displaystyle\int_\gamma e^z dz$ lorsque γ est l'arc de parabole reliant $z_1 = 0$ et $z_2 = 1 + i$ puis lorsque γ est le segment de droite reliant ces deux points.

(3) Calculer $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ lorsque f est holomorphe dans un ouvert contenant $< \gamma >$ (le support d'un chemin de classe C^1 par morceaux) et est la dérivée d'une fonction holomorphe F dans cet ouvert.

Exercice 2. (Majorations. Lemme de Jordan.)

(1) Soit f continue dans un ouvert O de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \to O$ un arc C^1 de longeur notée $Long\gamma$. Démontrer que $|\displaystyle\int_\gamma f(z)dz| \leq \sup_{<\gamma>} |f| Long\gamma$.

(2) Soit $0 < a < b$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} z_0 \geq 0$. Calculer $\displaystyle\int_{[az_0, bz_0]} e^z dz$. En déduire l'inégalité $|e^{bz_0} - e^{az_0}| \leq (b - a)|z_0|e^{b\mathrm{Re} z_0}$.

(3) (Lemmes de Jordan). Soit f une fonction continue sur une portion de secteur $S = \{z = re^{it},\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2,\ r \geq 1\}$ $(\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi)$. On suppose $\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \int_{C(0,r) \cap S} f(z)dz = 0$.
Supposons que le secteur est contenu dans l'ensemble $\mathrm{Im} z \geq 0$. Soit f une fonction continue sur S de limite nulle à l'infini. Montrer que $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \int_{C(0,r) \cap S} f(z)e^{iz} dz = 0$.

Exercice 3.

(1) On dit qu'un ouvert Ω est étoilé par rapport à l'un de ses points $z_0 \in \Omega$, si pour tout $z \in \Omega$, $[z, z_0] \subset \Omega$. En particulier un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points. Soit f holomorphe sur Ω. Montrer que f admet une primitive sur Ω. En déduire que l'intégrale de f sur tout chemin fermé dans Ω est nulle.

(2) Soit $A \in]0, +\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_A} e^{-z^2} dz$ où γ_A est le bord orienté du triangle défini par les points 0, A, $A(1 + i)$. En déduire l'existence et la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt$

Exercice 4.

(1) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ lorsque $\gamma(t) = e^{it}$ $t \in [0, \alpha]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ possède-t-elle une primitive dans $\mathbb{C}^*$?

(2) Soit γ un arc C^1_{pm} de support inclus dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soient $h : U \to V$ une fonction holomorphe (de classe C^1) sur V et $f : V \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_{h\circ\gamma} f(z)dz = \int_\gamma (f\circ h.h')(z)dz$.

(3) En déduire que si $h \in \mathcal{O}(U)$ et $|h(z)-1| < 1$ sur U alors pour toute courbe fermée C^1 telle que $<\gamma>\subset U$, on a $\displaystyle\int_\gamma \frac{h'}{h}(z)dz = 0$.

Exercice 5.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(D(0,1))$ et $\mathbb{C}-$dérivable en 0. Montrer que $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_{C(0,r)} f(z)dz = 0$.

Exercice 6. Montrer que le lemme de Goursat reste vrai dans le cas suivant: Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω et $\mathbb{C}-$dérivable sur Ω privé d'un nombre fini de points $p_1, ..., p_r$. Montrer que l'intégrale de Cauchy de f sur le bord de tout triangle contenu dans Ω est nulle. Indications: Etudier d'abord le cas où un sommet (et seulement un) du triangle est un des points p_i, puis une des arètes contient un (et seulement un) de ces points, puis l'intérieure du triangle contient un de ces points , puis le cas général.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{O}(D(a,R)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{D(a,R)})$.

(1) Montrer que pour tout $z \in D(a,R)$, $\displaystyle f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ et que l'intégrale de Cauchy de f sur $C(a,r)$ est nulle.

(2) Montrer que si $z \notin \overline{D(a,r)}$, $\displaystyle 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.

Exercice 8.

(1) (Théorème de Morera). Soit f une fonction continue sur un disque D ouvert non vide telle que l'intégrale de Cauchy de f sur tout triangle de D est nulle. Montrer que f est holomorphe.

(2) En déduire que si f est continue sur le disque unité et holomorphe hors du segment $]-1,1[$ alors f est holomorphe sur le disque.

Exercice 9. Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes distincts inclus dans $D(a,R)$. Soit $f \in \mathcal{O}(D(a,R)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{D(a,R)})$.

(1) Montrer que $\displaystyle P(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\zeta - z}d\zeta$, avec $\omega(z) = (z-z_1)\dots(z-z_n)$, est l'unique polynôme en z de degrés $n-1$ qui coincide avec $f(z)$ aux points z_i.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{D(0,1)})$.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} f(z)\log(z)dz$, avec la détermination du logarithme définit sur $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$ d'argument à valeurs dans $]0,2\pi[$).

(2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)dx = \frac{1}{e^{2i\pi k}-1}\int_{|z|=1} z^k f(z)dz$ avec k réel, $k > -1$, $k \notin \mathbb{N}$, on considère la détermination de la puissance associée au logarithme précédent.