Licence, Analyse complexe

Exercice sur le chapitre 4.

Exercice 1.

(1) On dit qu'un ouvert ω est étoilé par rapport à l'un de ses points $z_0 \in \Omega$, si pour tout $z \in \Omega$, $[z, z_0] \subset \Omega$. En particulier un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points. Soit f holomorphe sur Ω. Montrer que f admet une primitive sur Ω. En déduire que l'intégrale de f sur tout chemin fermé dans Ω est nulle.

(2) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ lorsque $\gamma(t) = e^{it}$ $t \in [0, \alpha]$, $\alpha \in [-\pi, \pi[$. La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ possède-t-elle une primitive dans $\mathbb{C}^*$?

Exercice 2. Soit $A \in]0, +\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_A} e^{-z^2} dz$ où γ_A est le bord orienté du triangle défini par les points 0, A, $A(1+i)$. En déduire l'existence et la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt$

Exercice 3.

(1) Calculer $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^n(e^z - 1)}$ pour $n = 0, 1, 2$. Indication: Considérer le prolongement par continuité de $z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$.

(2) Calculer $k_n = \displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^n(1+z)(2-z)}$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^0(D(0,1))$ et $\mathbb{C}-$dérivable en 0. Montrer que $\displaystyle\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \int_{C(0,r)} f(z) dz = 0$.

Exercice 5.

(1) Soit $a \in D(0,1)$. Montrer que $\dfrac{1}{1 - |a|^2} = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z|z-a|^2}$. (Indication: Montrer que $z|z-a|^2 = (z-a)(1 - z\bar{a})$ le long du cercle unité)

(2) Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1)$ de module bornée par $M > 0$. Montrer que $|f'(a)| \leq \dfrac{M}{1 - |a|^2}$.

Exercice 6. (Une preuve du théorème de Liouville). Soit f entière bornée. Soient $a \neq b$ deux nombre complexe et $R > \max(|a|, |b|)$. Calculer $I(R) = \displaystyle\int_{C(0,R)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$ (décomposer en éléments simples).

(1) Majorer $I(R)$ et conclure.

Correction de l'envoi 4.

Exercice 1.

(1) Soit $F:\Omega\to\mathbb{C}$ définie par $F(z)=\displaystyle\int_{[z_0,z]}f(z)dz$. Comme Ω est étoilé par rapport à z_0, F est bien définie. Montrons que F est holomorphe, de dérivée f: Soit $z_1\in\Omega$. Comme $[z_0,z_1]$ est un compact dans Ω, il existe $\epsilon>0$ telle que $[z_0,z_1]+D(0,\epsilon)=\{z\in\mathbb{C},\, d(z,[z_0,z_1])<\epsilon\}\subset\Omega$. On vérifie que $[z_0,z_1]+D(0,\epsilon)$ est un ensemble convexe. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Goursat dans cet ensemble: si $z'\in D(z_1,\frac{\epsilon}{2})$, $F(z')-F(z_1)=\displaystyle\int_{[z',z_1]}f(z)dz$ car l'intégrale de Cauchy de f le long du triangle $T(z_0,z_1,z')$ est nulle. On en déduit que $|F(z')-F(z_1)-(z'-z_1)f(z_1)|\le|z'-z_1|\|f-f(z_1)\|_{\infty,\overline{D(z_1,|z'-z_1|)}}$. Mais comme f est continue, on a bien $\displaystyle\lim_{z'\to z_1}\|f-f(z_1)\|_{\infty,\overline{D(z_1,|z'-z_1|)}}=0$. Donc F est $\mathbb{C}-$dérivable en z_1 de $\mathbb{C}-$dérivée $f'(z_1)$. Ceci étant vrai en tout point de Ω, F est holomorphe et c'est la primitive de f qui s'annule en z_0. D'aprés un résultat du cours, on obtient que l'intégrale de Cauchy de f sur un chemin fermé est nulle.

(2) On a $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z}=\int_0^\alpha dt=\alpha$. En particulier lorsque $\alpha=2\pi$, on obtient que l'intégrale de Cauchy de $\frac{1}{z}$ le long du cercle unité est non nulle. Donc cette fonction n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2. $f:z\mapsto e^{-z^2}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, on a $\displaystyle\int_{\gamma_A}f(z)dz=0$. Or $\displaystyle\int_{[0,A]}f(z)dz=\int_0^A f(t)dt$, $\displaystyle\int_{[A,A(1+i)]}f(z)dz=\int_0^A e^{(A+ti)^2}idt$ et $\displaystyle\int_{[A(1+i),0]}f(z)dz=-\int_{[0,A(1+i)]}f(z)dz$
$=-\displaystyle\int_0^A e^{t^2(1+i)^2}(1+i)dt=-\int_0^A e^{t^2 2i}(1+i)dt$. Or $\displaystyle|\int_0^A e^{(A+ti)^2}idt|\le\int_0^A e^{-(A^2-t^2)}dt\le\int_0^A e^{-A(A-t)}dt=\frac{1}{A}(1-e^{-A^2})\underset{A\to+\infty}{\to 0}$.
On en déduit que $\displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{t^2 2i}(1+i)dt$ existe. Donc $\displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{t^2 i}(1+i)dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\cos t^2+\sin t^2dt+i\int_0^A\cos t^2-\sin t^2dt$. On en déduit que la partie réelle et la partie imaginaire des intégrales convergent. Par addition et soustraction, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos t^2dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin t^2dt$ existent, sont égales ($\frac{\sqrt{\pi}}{2}\in\mathbb{R}$) et valent $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 3.

(1) Notons que $e^z-1=0\Leftrightarrow z=2ik\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, et $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{z}{e^z-1}=1$. Donc la fonction $f:z\mapsto f(z)=\frac{z}{e^z-1}$ holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$, est bornée au voisinage de zéro, le théorème d'élimination des singularités de Riemann entraine qu'elle se prolonge holomorphiquement en 0. Ce prolongement $\tilde f$ est donné par le prolongement par continuité (ie $\tilde f(0)=1$). D'où $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}I_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^n(e^z-1)}=\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{\tilde f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{(\tilde f)^{(n)}(0)}{n!}$. Or $\displaystyle\frac{z}{e^z-1}=\frac{1}{1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+o(z^2)}=1-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{6}+\frac{z^2}{4}+o(z^2)$. Donc $I_0=2i\pi$, $I_1=-i\pi$, $I_2=\frac{i\pi}{6}$.

(2) La fonction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{1}{(z+1)(2-z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-1,2\}$. Elle est donc holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,\frac{1}{2})}$. De plus, elle est la somme de sa série de Taylor en 0 sur le plus grand disque ouvert centré en 0 et contenu dans son domaine d'holomorphie: $f(z) = \dfrac{1}{3}\sum_{n\geq 0} z^n((-1)^n + 2^{-(n+1)})$ sur $D(0,1)$ (on réduit cette fonction rationnelle en éléments simples puis on développe en série géométrique de z). Le théorème de Cauchy donne, si $n \geq 1$, $k_n = 2i\pi\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,\frac{1}{2})}\frac{f(z)}{z^n}dz = 2i\pi\frac{1}{3}((-1)^{n-1} + 2^{-n})$ et $k_0 = 0$.

Exercice 4. Par hypothèse, il existe une fonction $h \mapsto \epsilon(h)$ définie au voisinage $D(0,r_1)$ de 0 telle que $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$ et $f(h) = f(0) + hf'(0) + h\epsilon(h)$ sur $D(0,r_1)$. Donc $\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_{C(0,r)} f(z)dz = \frac{1}{r^2}\int_{C(0,r)}(f(0) + zf'(0))dz + \frac{1}{r^2}\int_{C(0,r)} z\epsilon(z)dz$. Comme $z \mapsto f(0) + zf'(0)$, le théorème de Cauchy implique que la première intégrale est nulle. La deuxième intégrale se majore par $\dfrac{1}{r^2}2\pi r \sup_{z\in C(0,r)}|z\epsilon(z)| = 2\pi \sup_{z\in C(0,r)}|\epsilon(z)|$. Comme $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$ entraine $\lim_{r\to 0}\sup_{z\in C(0,r)}|\epsilon(z)| = 0$, on obtient $\lim_{r\to 0}\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_{C(0,r)} f(z)dz = 0$.

Exercice 5.

(1) Si $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, on a $(z-a)(1-z\bar{a}) = z(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = z|z-a|^2$. La fonction $g : z \mapsto \dfrac{1}{1-z\bar{a}}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{\bar{a}^{-1}\} \supset \overline{D(0,1)}$ la formule de Cauchy donne $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,1)}\frac{dz}{z|z-a|^2} = g(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$.

(2) On a $f'(a) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{z\in C(0,r)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}$ pour $|a| < r < 1$. Donc $|f'(a)| \leq M\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{rd\theta}{|re^{i\theta}-a|^2}$. Faisant $r \to 1$, on obtient $|f'(a)| \leq M\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|e^{i\theta}-a|^2} = M\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,1)}\frac{dz}{z|z-a|^2}$ puis on applique 1.

Exercice 6. On a, si $\max(|a|,|b|) < R$,
$I(R) = \displaystyle\int_{C(0,R)}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\int_{C(0,R)} f(z)(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b})dz = 2i\pi\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.
On a aussi $I(R) \leq 2\pi R\|f\|_{\infty,C(0,R)}\dfrac{1}{(R-|a|)(R-|b|)} \to 0$ lorsque $R \to +\infty$ si f est une fonction entière bornée. On déduit le résultat.