LM366, 2008

Envoi4.

Exercice 1.

(1) On dit qu'un ouvert ω est étoilé par rapport à l'un de ses points $z_0 \in \Omega$, si pour tout $z \in \Omega$, $[z, z_0] \subset \Omega$. En particulier un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points. Soit f holomorphe sur Ω. Montrer que f admet une primitive sur Ω. En déduire que l'intégrale de f sur tout chemin fermé dans Ω est nulle.

(2) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ lorsque $\gamma(t) = e^{it}$ $t \in [0, \alpha]$, $\alpha \in [-\pi, \pi[$. La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ possède-t-elle une primitive dans $\mathbb{C}^*$?

Exercice 2. Soit $A \in]0, +\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_A} e^{-z^2} dz$ où γ_A est le bord orienté du triangle défini par les points 0, A, $A(1+i)$. En déduire l'existence et la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt$

Exercice 3.

(1) Calculer $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^n(e^z-1)}$ pour $n = 0, 1, 2$. Indication: Considérer le prolongement par continuité de $z \mapsto \dfrac{z}{e^z-1}$.

(2) Calculer $k_n = \displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^n(1+z)(2-z)}$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^0(D(0,1))$ et $\mathbb{C}-$dérivable en 0. Montrer que $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int_{C(0,r)} f(z) dz = 0$.

Exercice 5.

(1) Soit $a \in D(0,1)$. Montrer que $\dfrac{1}{1-|a|^2} = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z|z-a|^2}$. (Indication: Montrer que $z|z-a|^2 = (z-a)(1-z\bar{a})$ le long du cercle unité)

(2) Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1)$ de module bornée par $M > 0$. Montrer que $|f'(a)| \leq \dfrac{M}{1-|a|^2}$.

Exercice 6. (Une preuve du théorème de Liouville). Soit f entière bornée. Soient $a \neq b$ deux nombre complexe et $R > \max(|a|, |b|)$. Calculer $I(R) = \displaystyle\int_{C(0,R)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$ (décomposer en éléments simples).

(1) Majorer $I(R)$ et conclure.

Exercice 7. Montrer qu'une fonction entière f telle que $f(z+1) = f(z)$ et $f(z+i) = f(z)$ est constante.

Exercice 8. Soit f holomoprhe sur P_+ le demiplan supérieur I$mz > 0$, continue et bornée sur I$mz \geq 0$. Soit $M = \|f\|_{\infty, \partial P_+}$.

(1) Supposant que f tend vers 0 à l'infini, montrer que $\|f\|_{\infty, P_+} \leq M$.

(2) Dans le cas général considérer $g : z \mapsto \dfrac{f^n(z)}{i+z}$.

Exercice 9.

(1) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathrm{I}mz \geq 0$, holomorphe sur $\{\mathrm{I}mz > 0\} = P_+$, bornée, supposée de plus réelle sur l'axe réelle, est constante.
(2) Généraliser le résultat ci-dessus afin d'obtenir une description des $f \in \mathcal{O}(P_+) \cap C^0(\overline{P}_+)$ supposées de croissance au plus polynomiale et réelles sur l'axe réel.

Exercice 10.

(1) Démontrer que l'application f définie par $f(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z t^2} dt$ est holomorphe dans $Q_+ = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{R}ez > 0\}$ et se prolonge par continuité dans $\overline{Q_+} \setminus \{0\}$ (Pour le prolongement par continuité, on pourra d'abord se ramener à une intégrale sur $[0, A]$, $A > 1$ puis décomposer le domaine d'intégration en $[0, 1]$ et $[1, A]$, faire un changement de variable et intégrer par parties dans la deuxième intégrale, ensuite $A \to +\infty$).
(2) Déterminer f dans Q_+ (Utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme afin d'obtenir une équation différentielle simple vérifiée par f, ou bien détèrminer la restriction de la fonction à $]0, +\infty[$).
(3) En déduire la valeur des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-\pi t^2} dt$.

Correction de l'envoi 4.

Exercice 1.

(1) Soit $F : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(z)dz$. Comme Ω est étoilé par rapport à z_0, F est bien définie. Montrons que F est holomorphe, de dérivée f: Soit $z_1 \in \Omega$. Comme $[z_0, z_1]$ est un compact dans Ω, il existe $\epsilon > 0$ telle que $[z_0, z_1] + D(0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C},\, d(z, [z_0, z_1]) < \epsilon\} \subset \Omega$. On vérifie que $[z_0, z_1] + D(0, \epsilon)$ est un ensemble convexe. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Goursat dans cet ensemble: si $z' \in D(z_1, \frac{\epsilon}{2})$, $F(z') - F(z_1) = \int_{[z',z_1]} f(z)dz$ car l'intégrale de Cauchy de f le long du triangle $T(z_0, z_1, z')$ est nulle. On en déduit que $|F(z')-F(z_1)-(z'-z_1)f(z_1)| \le |z'-z_1| \|f-f(z_1)\|_{\infty,\overline{D(z_1,|z'-z_1|)}}$. Mais comme f est continue, on a bien $\lim_{z'\to z_1} \|f - f(z_1)\|_{\infty,\overline{D(z_1,|z'-z_1|)}} = 0$. Donc F est $\mathbb{C}-$dérivable en z_1 de $\mathbb{C}-$dérivée $f'(z_1)$. Ceci étant vrai en tout point de Ω, F est holomorphe et c'est la primitive de f qui s'annule en z_0. D'aprés un résultat du cours, on obtient que l'intégrale de Cauchy de f sur un chemin fermé est nulle.

(2) On a $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^\alpha dt = \alpha$. En particulier lorsque $\alpha = 2\pi$, on obtient que l'intégrale de Cauchy de $\frac{1}{z}$ le long du cercle unité est non nulle. Donc cette fonction n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2. $f : z \mapsto e^{-z^2}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, on a $\int_{\gamma_A} f(z)dz = 0$. Or $\int_{[0,A]} f(z)dz = \int_0^A f(t)dt$, $\int_{[A,A(1+i)]} f(z)dz = \int_0^A e^{(A+ti)^2} idt$ et $\int_{[A(1+i),0]} f(z)dz = -\int_{[0,A(1+i)]} f(z)dz$
$= -\int_0^A e^{t^2(1+i)^2}(1+i)dt = -\int_0^A e^{t^2 2i}(1+i)dt$. Or $|\int_0^A e^{(A+ti)^2} idt| \le \int_0^A e^{-(A^2-t^2)}dt \le \int_0^A e^{-A(A-t)}dt = \frac{1}{A}(1-e^{-A^2}) \underset{A\to+\infty}{\to 0}$.

On en déduit que $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{t^2 2i}(1+i)dt$ existe. Donc $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{t^2 i}(1+i)dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \cos t^2 + \sin t^2 dt + i \int_0^A \cos t^2 - \sin t^2 dt$. On en déduit que la partie réelle et la partie imaginaire des intégrales convergent. Par addition et soustraction, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt$ existent, sont égales ($\frac{\sqrt{\pi}}{2} \in \mathbb{R}$) et valent $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 3.

(1) Notons que $e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$. Donc la fonction $f : z \mapsto f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$, est bornée au voisinage de zéro, le théorème d'élimination des singularités de Riemann entraine qu'elle se prolonge holomorphiquement en 0. Ce prolongement $\tilde{f}$ est donné par le prolongement par continuité (ie $\tilde{f}(0) = 1$). D'où $\frac{1}{2i\pi} I_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^n(e^z - 1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{\tilde{f}(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{(\tilde{f})^{(n)}(0)}{n!}$. Or $\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + o(z^2)} = 1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{6} + \frac{z^2}{4} + o(z^2)$. Donc $I_0 = 2i\pi$, $I_1 = -i\pi$, $I_2 = \frac{i\pi}{6}$.

(2) La fonction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{1}{(z+1)(2-z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-1,2\}$. Elle est donc holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,\frac{1}{2})}$. De plus, elle est la somme de sa série de Taylor en 0 sur le plus grand disque ouvert centré en 0 et contenu dans son domaine d'holomorphie: $f(z) = \dfrac{1}{3}\sum_{n\geq 0} z^n((-1)^n + 2^{-(n+1)})$ sur $D(0,1)$ (on réduit cette fonction rationnelle en éléments simples puis on développe en série géométrique de z). Le théorème de Cauchy donne, si $n \geq 1$, $k_n = 2i\pi\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,\frac{1}{2})}\frac{f(z)}{z^n}dz = 2i\pi\frac{1}{3}((-1)^{n-1} + 2^{-n})$ et $k_0 = 0$.

Exercice 4. Par hypothèse, il existe une fonction $h \mapsto \epsilon(h)$ définie au voisinage $D(0,r_1)$ de 0 telle que $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$ et $f(h) = f(0) + hf'(0) + h\epsilon(h)$ sur $D(0,r_1)$. Donc $\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_{C(0,r)} f(z)dz = \frac{1}{r^2}\int_{C(0,r)}(f(0) + zf'(0))dz + \frac{1}{r^2}\int_{C(0,r)} z\epsilon(z)dz$. Comme $z \mapsto f(0) + zf'(0)$, le théorème de Cauchy implique que la première intégrale est nulle. La deuxième intégrale se majore par $\dfrac{1}{r^2}2\pi r \sup_{z\in C(0,r)}|z\epsilon(z)| = 2\pi \sup_{z\in C(0,r)}|\epsilon(z)|$. Comme $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$ entraine $\lim_{r\to 0}\sup_{z\in C(0,r)}|\epsilon(z)| = 0$, on obtient $\lim_{r\to 0}\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_{C(0,r)} f(z)dz = 0$.

Exercice 5.

(1) Si $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, on a $(z-a)(1-z\bar{a}) = z(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = z|z-a|^2$. La fonction $g : z \mapsto \dfrac{1}{1-z\bar{a}}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{\bar{a}^{-1}\} \supset \overline{D(0,1)}$ la formule de Cauchy donne $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,1)}\frac{dz}{z|z-a|^2} = g(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$.

(2) On a $f'(a) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{z\in C(0,r)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}$ pour $|a| < r < 1$. Donc $|f'(a)| \leq M\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{rd\theta}{|re^{i\theta}-a|^2}$. Faisant $r \to 1$, on obtient $|f'(a)| \leq M\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|e^{i\theta}-a|^2} = M\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,1)}\frac{dz}{z|z-a|^2}$ puis on applique 1.

Exercice 6. On a, si $\max(|a|,|b|) < R$,
$I(R) = \displaystyle\int_{C(0,R)}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\int_{C(0,R)} f(z)(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b})dz = 2i\pi\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.
On a aussi $I(R) \leq 2\pi R\|f\|_{\infty,C(0,R)}\dfrac{1}{(R-|a|)(R-|b|)} \to 0$ lorsque $R \to +\infty$ si f est une fonction entière bornée. On déduit le résultat.

Exercice 7. Comme $\forall z \in \mathbb{C}, \forall p,q \in \mathbb{Z}$, $f(z+p+iq) = f(z)$. Soit $z = x+iy$. Notons p,q la partie entiére de x,y. Alors $|f(z)| = |f(z-p+iq)| \leq \max_{u\in[0,1]\times[0,1]}|f(u)| = \alpha$. Soit $u_0 \in [0,1]\times[0,1]$ tel que $|f(u_0)| = \alpha$. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |f(u_0)|$. Le principe du maximum entraine que f est constante sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8.

(1) Soit $\epsilon > 0$ fixé. Comme $\lim_{P_+\ni z\to+\infty}|f(z)| = 0$, il existe $R = R_\epsilon > 0$, tel que $z \in P_+$, $|z| \geq R$ entraine $|f(z)| \leq M + \epsilon$. Donc $\forall z \in P_+$, le principe du maximum donne $|f(z)| \leq \max_{\partial(P_+\cap D(0,R+|z|))}|f| \leq M + \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on déduit que $|f(z)| \leq M$.
Remarque: on introduit ϵ pour le cas $M = 0$, dans ce cas on déduit que f est nulle.

(2) La fonction $g_n : z \mapsto \frac{f^n(z)}{i+z}$ satisfaisant les hypothèses de la question précédente ($|\frac{f^n(z)}{i+z}| \leq M^n(|z|-1)^{-1}$ pour $|z|>1$). On déduit que pour tout $z \in P_+$, $|f^n(z)| \leq (1+|z|)\frac{M^n}{1}$. Prenant la racine $n-$ième, puis $n \to +\infty$, on obtient le résultat.

Exercice 9.

(1) Considérons la fonction $g : \mathbb{C} \ni z \mapsto g(z)$ définie par $g(z) = f(z)$ si I$mz \geq 0$ et $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ si I$mz \leq 0$. Cette fonction est bien définie car si $z \in \mathbb{R}$, $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ par hypothèse sur f. On vérifie qu'elle est continue. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ car $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{f}(\bar{z}) = 0$ si f est holomorphe (c.f. l'envoi précédent). Une conséquence du théorème de Cauchy-Goursat est que g est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ (Th. de cours: Si f est continue sur $D(0,1)$ et holomorphe sur $D(0,1) \setminus \mathbb{R}$ alors f est holomorphe sur tout le disque). Par définition de g, on a $\forall z \in \mathbb{C}$, $|g(z)| \leq \|f\|_{\infty, \mathcal{P}_+} < +\infty$. Donc g est une fonction entière bornée, elle est constante (Th. de Liouville).

(2) On suppose maintenat que $\lim_{P_+ \ni z \to \infty} \frac{|f(z)|}{|z|^k} = \alpha < +\infty$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Il existe donc une constante positive C telle que $|f(z)| \leq C(1+|z|^k)$ (il existe r tel que $|z| > r$ entraine $|f(z)|(\alpha+1)|z|^k$; sur $\{\text{I}mz \geq 0\} \cap D(\bar{0}, r)$ compact, $|f(z)|$ continue est bornée par M; $C = \alpha + 1 + M$ convient). Définissons comme précédement la fonction entière g à l'aide de la réflexion le long de l'axe réel. Elle satisfait maintenant $|g(z)| \leq C(1+|z|^k)$. Appliquant les inegalités de Cauchy, on a $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} \leq C(1+r^k)r^{-n}$. Faisant $r \to +\infty$, on obtient que g est un polynôme de degrés au plus k.

Exercice 10.

(1) Montrons que f est holomorphe sur Q_+: Soit $\alpha > 0$, notons $\Pi_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, \text{R}ez > \alpha\}$. Si $z \in \Pi_\alpha$, alors $|e^{-\pi z t^2}| = e^{-\pi \text{Re} z t^2} < e^{-\alpha \pi t^2}$. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha \pi t^2}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ lorsque $\alpha > 0$. La fonction $\Pi_\alpha \times \mathbb{R} \ni (z,t) \mapsto e^{-\pi z t^2}$ est holomorphe en z sur Π_α (à t fixé), est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ (à z fixé) et est dominée pour tout $z \in \Pi_\alpha$ par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-\alpha \pi t^2}$. Le théorème d'holomorphie sous le signe somme implique que la fonction $z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z t^2} dt$ est holomorphe sur Π_α. Cette propriété étant vraie pour tout $\alpha > 0$, on déduit que la fonction est holomorphe sur Q_+.
Montrons la deuxième assertion. Remarquons d'abord que pour R$ez = 0$ la fonction $t \mapsto e^{-\pi z t^2}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ car son module vaut 1. Cependant, si l'on sépare en partie réelle et imaginaire, on obtient, pour $z = iy \neq 0$, $t \mapsto \cos(-\pi y t^2)$ et $t \mapsto \sin(-\pi y t^2)$. Ce type d'intégrale semi-convergente est classique, et s'étudie par changement de variable et intégration par partie: on fait une transformation d'Abel. Soit $z \in \overline{Q_+} \setminus \{0\}$ et $A, B > 1$, $\int_{-B}^{A} e^{-\pi z t^2} dt = \int_0^A + \int_0^B e^{-\pi z t^2} dt$. Il suffit d'étudier $\int_0^A e^{-\pi z t^2} dt = \int_0^1 + \int_1^A e^{-\pi z t^2} dt = I_1 + I_2$, puis on fera $A \to +\infty, B \to +\infty$. L'étude de I_1 ne pose pas de problème, c'est l'intégrale sur un compact d'une fonction continue de deux variables, holomorphes en z, le théorème d'holomorphie sous le signe somme s'applique sur chaque disque $D(0,R)$, ceci pour tout $R > 0$. La première intégrale est donc une fonction entière de son paramètre. Pour I_2, on pose $t = \sqrt{u}$ de sorte que $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ et $I_2 = \int_1^{A^2} e^{-\pi z u} \frac{du}{2\sqrt{u}}$. On a une intégrale semi-convergente du type fonction bornée que multiplie une fonction positive décroissant vers zeros, on effectue par exemple une transformation d'Abel en intégrant par partie ($z \in \overline{Q_+}$, $z \neq 0$): $I_2 = [\frac{e^{-\pi z u}}{-2\pi z \sqrt{u}}]_1^{A^2} - \int_1^{A^2} \frac{e^{-\pi z u}}{4\pi z} u^{-\frac{3}{2}} du$. On

peut maintenant utiliser les théorème généraux: Faisant $A \to +\infty$, le premier terme tends vers $\frac{e^{-\pi z}}{2\pi z}$, le second est absolument convergent (critère de Riemann). De plus, si $z \in \overline{Q_+}$, $|z| \geq \epsilon > 0$, $|\frac{e^{-\pi zu}}{4\pi z}u^{-\frac{3}{2}}| \leq \frac{1}{4\pi\epsilon}u^{-\frac{3}{2}}$. Le théorème de convergence dominée s'applique, la fonction $z \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\pi zu}}{4\pi z}u^{-\frac{3}{2}}du$ est continue sur $\overline{Q_+} \cap \{|z| \geq \epsilon\}$ ($\epsilon > 0$). Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, elle est continue sur $\overline{Q_+} \setminus \{0\}$. Donc la fonction f coincide sur Q_+ avec la somme de deux fonctions continues sur $\overline{Q_+} \setminus \{0\}$, elle admet un prolongement continu à cet ensemble. (Notons que par définition de l'adhérence d'un ensemble dans un espace métrique, ce prolongement est unique).

(2) Pour calculer f, on peut procéder de deux manières:
i) On calcule la restriction de f à l'axe réel $]0, +\infty[$. Si $z \in]0, +\infty[$, on peut effectuer le changement de variable *réelle* $u = \sqrt{\pi z t}$ d'où $f(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi z}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Le principe du prolongement analytique entraine que $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ (détermination principale de la racine carrée) sur Q_+ car $]0, +\infty[$ est non discret dans $\mathbb{C}$.
ii) Appliquant le théorème d'holomorphie sous le signe somme, on sait que $f'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\pi t^2 e^{-\pi z t^2}dt$ sur Q_+. On intègre par partie en t (en prenant bien soin de justifier cette intégration): $\int_{-\infty}^{+\infty} -\pi t^2 e^{-\pi z t^2}dt = [\frac{e^{-\pi z t^2}}{2z}t]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi z t^2}}{2z}dt = \frac{f(z)}{2z}$. La fonction f satisfait l'équation différentielle $-2zf'(z) = f(z)$. Pour trouver les solutions de cette équation, on résoud l'équation sur l'axe $]0, +\infty[$ par les méthodes usuelles, ce qui donne $f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$. Comme $f(\frac{1}{\pi}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur l'axe réel. Par prolongement analytique, $f(z) = (z)^{-\frac{1}{2}}$ avec la détermination principale de la racine carrée.
Remarque: On peut donc déduire que la fonction f admet un prolongement continu à $\overline{Q_+} \setminus \{0\}$ puisque la fonction $z \mapsto \frac{1}{\sqrt{z}}$ admet un tel prolongement. L'interet de cet exercice est que ce prolongement est égal à un passage à la limite dans une intégrale semi-convergente (c.f. première question). On en déduit un calcul des intégrales de fresnels : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi\alpha t^2}dt = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(1-i)$, puis on décompose en partie réelle et imaginaire.

(3) On applique le théorème d'holomorphie, on peut dériver sous le signe somme: $f^{(n)}(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\pi t^2)^n e^{-\pi z t^2}dt = (-1)^n \frac{1. \dots 2n-1}{2^n}$. D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-\pi t^2}dt = \frac{1. \dots (2n-1)}{(\sqrt{\pi}2)^n}$.