Lm366,

envoi5.

Exercice 1.

(1) Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$. Montrer que si deux lacets continus γ_1, γ_2 sont homotopes dans Ω alors $Ind(\gamma_1, 0) = Ind(\gamma_2, 0)$.

(2) On note D le disque unité. Soit $f : \overline{D} \to \overline{D}$ une fonction continue. On veut montrer que f a un point fixe.
Sinon on suppose que pour tout $z \in \overline{D}$, $f(z) \neq z$. On note $\gamma_1 : [0, 2\pi] \ni t \to \gamma_1(t) = f(0)$, $\gamma_2 : [0, 2\pi] \ni t \to \gamma_2(t) = f(e^{it}) - e^{it}$ et $\gamma_3 : [0, 2\pi] \ni t \to \gamma_3(t) = -e^{it}$. Montrer que ces chemins sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

(3) En déduire une contradiction.

Exercice 2. Montrer qu'une réunion croissante de domaines simplement connexes est simplement connexe.

Exercice 3. On veut montrer le théorème de D'Alembert Gauss. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degrés plus grand que 1. En considérant les deux familles de lacets $\gamma_r : [0, 2\pi] \to P(re^{it})$, $r \geq 0$ et $\lambda_r : [0, 2\pi] \to (re^{it})^n$, montrer que nécessairement P a une racine.

Exercice 4.

(1) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas. Montrer que f admet un logarithme $g \in \mathcal{O}(U)$ (c'est à dire que $f = e^g$) ssi $\dfrac{f'}{f}$ admet une primitive dans U ssi $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)dz = 0$ pour tout chemin fermé γ, différentiable par morceaux, contenu dans U.

(2) Dans la suite on note $U = \{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z| < r_2\}$ avec $0 < r_1 < r_2 \leq +\infty$. Montrer que tout chemin fermée $\gamma : [0, 1] \to U$, différentiable par morceaux, de U est homotope à un chemin fermé $\beta : [0, 1] \to C(0, r')$, différentaible par morceaux, avec $r_1 < r' < r_2$ fixé (Montrer que γ est homotope dans U à $r'\dfrac{\gamma}{|\gamma|}$)).

(3) On rappelle le fait suivant: Si un chemin fermé β, différentiable par morceaux, est d'image contenue dans le cercle $C(0, r')$, il est homotope à $\gamma_n : [0, 1] \ni t \mapsto r'e^{2i\pi nt}$ avec $n = I(\beta, 0)$ l'indice de β par rapport à 0 (c'est à dire, avec la question précédente, un chemin fermé de la couronne, qui "tourne " n fois autour de zéros est homotope dans la couronne á γ_n). En déduire qu'une fonction holomorphe f sur la couronne, non nulle sur la couronne , admet un logarithme ssi $\displaystyle\int_{C(0,r')} \frac{f'}{f}(\zeta)d\zeta = 0$.

(4) En déduire que toute fonction holomorphe f sur $C(0, r_1, r_2)$ et non nulle sur $C(0, r_1, r_2)$ s'écrit $f(z) = z^m e^{\varphi(z)}$ avec φ holomorphe sur $C(0, r_1, r_2)$, avec $m = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,r')} \frac{f'}{f}(\zeta)d\zeta$.

Exercice 5. On considère la fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. On note $K(R, \epsilon) = \{z = re^{it}, \epsilon \leq r \leq R, 0 \leq t \leq \pi\}$. On oriente le bord de $K(R, \epsilon)$ dans le sens directe, et on note C_ϵ et C_R les demi cercles de rayon ϵ et R situés dans $Imz \geq 0$. De sorte que $\partial K(R, \epsilon)$, le bord de $K(R, \epsilon)$, est formé du segment $[-R, -\epsilon]$, de C_ϵ parcouru dans le sens indirecte, de $[\epsilon, R]$ et de C_R parcouru dans le sens directe.

(1) Calculer $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)dz$.

(2) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$. Pour cela, on utilisera que $R\sin t \geq R\dfrac{2}{\pi}t$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

(3) Que vaut $\displaystyle\int_{\partial K(R,\epsilon)} f(z)dz$?

(4) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 1.

(1) Sous les hypothèses $z \mapsto \dfrac{1}{z-\alpha}$ est holomorphe sur Ω et le théorème de Cauchy homotopique donne le résultat.

(2) Soit $\Gamma : [0,1] \times [0, 2\pi] \ni (u,t) \to \Gamma(u,t) = f(ue^{it}) - ue^{it}$. Alors Γ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ (hypothèse sur f) et $\Gamma(0,.) = \gamma_1(.)$, $\Gamma(1,.) = \gamma_2(.)$.
On pose maintenant $\Gamma' : [0,1] \times [0, 2\pi] \ni (u,t) \to \Gamma'(u,t) = uf(e^{it}) - e^{it}$. Alors $|\Gamma'(0,t)| = 1, |\Gamma'(1,t)| \neq 0$ par hypothèses sur f et si $0 < u < 1$ $|uf(e^{it})| \leq u < 1 = |e^{it}|$. Donc Γ' est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et réalise une homotopie entre γ_2 et γ_3.

(3) D'aprés 1, on aurait $0 = Ind(\gamma_1, 0) = Ind(\gamma_2, 0) = Ind(\gamma_3, 0) = 1$. Ce qui est contradictoire.

Exercice 2. Soit $U = \displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ avec $U_i \subset U_{i+1}$ et U_i un domaine simplement connexe. Soit γ un lacet continue à valeurs dans U. Comme $< \gamma >$ est un compact de U et que $U = \displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ est un recouvrement ouvert croissant de U, il existe $i \in \mathbb{N}$ telle que $< \gamma > \subset U_i$ or U_i est simplement connexe donc γ est homotope au chemin constant dans U_i donc dans U

Exercice 3. Supposons que P n'a pas de racine et de coefficient dominant égal à un. Alors la famille de lacets est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et tout ces lacets sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$. De plus $\gamma_0 = P(0)$ est le chemin constant donc $Ind(\gamma_r, 0) = Ind(\gamma_0, 0) = 0 (1)$. Or pour R_0 assez grand, si $|z| \geq R_0$, $|P(z) - z^n| = |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots a_0| < |z^n|$ (car le quotient des deux expressions tend vers 0 quand z tend vers l'infini). Donc pour $r \geq R_0$ $|\gamma_r(t) - \lambda_r(t)| < |\lambda_r(t)| = |\lambda_r(t) - 0|$. D'après le cours , γ_r et λ_r sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ donc $Ind(\gamma_r, 0) = Ind(\lambda_r, 0) = n$ Ce qui est une contradiction avec (1).

Exercice 4.

(1) Soit g une fonction holomorphe sur U et $c \in \mathbb{C}^*$. Supposons U connexe. $f = Ce^g$ ssi la fonction fe^{-g} est constante ssi sa dérivée est nulle ssi $(f' - g'f)e^{-g} = 0$ ssi $\dfrac{f'}{f} = g'$ ssi $\dfrac{f'}{f}$ admet une primitive ssi $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)dz = 0$ pour tout chemin fermé γ, différentiable par morceaux, contenu dans U. (cf cours). Si U n'est pas connexe, on raisonne sur chaque composante connexe de U.

(2) Considérons l'homotopie $[0,1]^2 \ni (s,t) \mapsto \Gamma(s,t) = (1-t)\gamma(s) + tr'\dfrac{\gamma}{|\gamma|}(s)$. Γ est continue, $\Gamma(.,0) = \gamma$, $s \mapsto \beta(s) = \Gamma(s,1) \in C(0,r')$, est différentiable par morceaux et $\Gamma(s,t) = ((1-t)|\gamma(s)| + tr')\dfrac{\gamma}{|\gamma|}(s) \in U$ (faire un dessin).

(3) Soit γ un chemin fermé, différentiable par morceaux, de la couronne. D'aprés 2, γ est homotope à β chemin fermés de support contenu dans $C(0,r')$ qui est homotope à γ_n, n étant l'indice de β (donc de γ) par rapport à zéro. Donc γ est homotope à γ_n dans la couronne. $\dfrac{f'}{f}$ étant holomorphe sur U, on a $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)dz = \int_{\gamma_n} \frac{f'}{f}(z)dz = n\int_{\gamma_1} \frac{f'}{f}(z)dz$.
D'aprés la question 1, f admet un logarithme ssi $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)dz = 0$ pour tout chemin fermé de la couronne ssi $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{f'}{f}(z)dz = 0$.

(4) $m = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,r')} \frac{f'}{f}(\zeta)d\zeta = Ind(f \circ \gamma_1, 0)$ est l'indice du chemin $f \circ \gamma$ par rapport à zéros (car f est holomorphe). Donc $m \in \mathbb{Z}$. La fonction $z \mapsto z^{-m}$ est holomorphe sur $U \subset \mathbb{C}^*$ donc $h : z \mapsto z^{-m}f(z)$ aussi. Cette fonction admet un logarithme dans U ssi

$\int_{\gamma_1} \frac{h'}{h}(z)dz = 0 = \int_{\gamma_1} (\frac{f'}{f}(z) - \frac{m}{z})dz = 0$. La fonction h admet un logarithme φ sur U, d'aprés 3, et $f(z) = z^m e^{\varphi(z)}$.

Exercice 5.

(1) Ecrivons $f(z) = \frac{1}{z} + h(z)$ avec h holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc bornée par une constante M sur $D(0,1)$. Alors $\int_{C_\epsilon} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{1}{\epsilon e^{it}} i\epsilon e^{it}dt + \int_{C_\epsilon} h(z)dz$. La première intégrale vaut $i\pi$ et $\lim_{\epsilon\to 0} |\int_{C_\epsilon} h(z)dz| \leq \lim_{\epsilon\to 0} Longueure(C_\epsilon)M = 0$. Donc $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)dz = i\pi$.

(2)

$$|\int_{C_R} f(z)dz| = |\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} Rie^{it}dt|$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{R} Rdt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}t}dt = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})$$

qui est de limite nulle quand R tend vers $+\infty$.

(3) Soit $D = \{-i\rho,\, \rho \geq 0\}$ la demi droite fermée d'origine 0 et d'angle polaire $\frac{-\pi}{2}$. Alors $\mathbb{C} \setminus D$ est simplement connexe car étoilé par rapport à i (cf cours). Or f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus D$, le lacet fermé, C^1 par morceaux, défini par $\partial K(\epsilon, R)$ étant de support contenu dans $\mathbb{C} \setminus D$, on a $\int_{\partial K(R,\epsilon)} f(z)dz = 0$ par le théorème de Cauchy.

(4) $0 = \int_{\partial K(\epsilon,R)} f(z)dz = \int_{-R}^{-\epsilon} f(t)dt - \int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_\epsilon^R f(t)dt + \int_{C_R} f(z)dz$. Ici C_ϵ est parcouru dans le sens directe d'où le signe moins. Donc $2i\int_\epsilon^R \frac{\sin t}{t}dt = \int_{C_\epsilon} f(z)dz - \int_{C_R} f(z)dz$. Quand $\epsilon \to 0$, puis $R \to +\infty$, le second membre admet une limite qui vaut $i\pi + 0$. On déduit que l'intégrale généralisée au sens de Riemann $2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ existe et vaut $i\pi$. D'où le résultat.