Lm366

envoi6.

Conventions et notations: On orientera toujours le bord d'un compact dans le sens direct lorsqu'on calcule une intégrale de Cauchy d'une fonction sur le bord de ce compact. On note $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$, $C(a,r) = \partial D(a,r) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| = r\}$. Un arc de cercle est paramétré par l'argument, par exemple, $C(0,r) \cap \{\mathrm{Im} z \geq 0\}$ est paramétré par $[0,\pi] \ni t \mapsto re^{it}$.Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $[z_1, z_2]$ est paramétré (par exemple) par $[0,1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$.

Exercice 1.

(1) Donner les développements en séries de Laurent de $z \mapsto \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ dans trois couronnes de centre O.

(2) Déterminer les résidus de $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$, $g(z) = z^3 \sin \dfrac{1}{z^2}$, $h(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$, en tous leurs points singuliers.

Exercice 2. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}$ et $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz$.

Exercice 3.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$,
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'envoi 6bis.

Exercice 1.

(1) $f\ :\ z\mapsto \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ est une fonction rationnelle de poles $\{1,-2\}$. Elle admet donc un développement de Laurent dans $D(0,1)$, $C(0,1,2)$ et $C(0,2,+\infty)$. Notons que f est holomorphe sur $D(0,1)$ donc le développement de Laurent sur $D(0,1)$ est en fait le développement en série de Taylor sur $D(0,1)$. Il ya unicité du développement de Laurent, or $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{2+z}$, donc: $f(z)=\sum\limits_{n\geq 0} z^n(-1+(-2)^{-(n+1)})$ sur $D(0,1)$,

$f(z)=\dfrac{1}{z(1-\frac{1}{z})}+\dfrac{1}{2+z}=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n\geq 0}-(-2)^{-(n+1)}z^n$ sur $C(0,1,2)$,

$f(z)=\sum\limits_{n\geq 0} z^{-(n+1)}(1+(-2)^n)$ sur $C(0,2,+\infty)=\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,2)}$.

(2) Résidus de $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$. Le point singulié isolé 2 est un pole d'ordre 1 donc $\underset{2}{\mathrm{R}es}(f)=\dfrac{e^2}{27}$ (en général $\underset{a}{\mathrm{R}es}(\dfrac{g(z)}{z-a})=g(a)$ si $g(a)\neq 0$). Le point singulier isolé -1 est un pole d'ordre 3: en général, si f a un pole d'ordre k en a alors $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^k}$ au voisinage de a avec g holomorphe au voisinage de a et $g(a)\neq 0$. Donc $\underset{a}{\mathrm{R}es}(f)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(a,\epsilon)}\dfrac{g(z)}{(z-a)^k}dz=\dfrac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}=\lim_{z\to a}\dfrac{1}{(k-1)!}\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-a)^kf(z)$. Or $(z+1)^3f(z)=\dfrac{e^z}{z-2}$, dérivant deux fois, on obtient $\underset{-1}{\mathrm{R}es}(f)=\dfrac{1}{2!}\dfrac{-17}{27}$.

(3) Résidus de $g(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$. $z\mapsto\sin\dfrac{1}{z^2}$ admet une singularité isolée essentielle en 0. Son développement de Laurent sur $\mathbb{C}^*$ est donné par $\sum\limits_{n\geq 0}a_nz^{-2n}$ avec $\sum\limits_{n\geq 0}a_nz^n$ le développement en série entière de la fonction sinus (unicité du développement de Laurent). Donc le développement de Laurent de g (sur $\mathbb{C}^*$) est $\sum\limits_{n\geq 0}a_nz^{-2n+3}$ et le résidu est $a_2=0$. Notons que 0 est un une singularité essentielle de g, le développement de Laurent converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(4) Résidus de $h(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$. On a un pole simple en 1, et une singularité essentielle en 0. $\underset{1}{\mathrm{R}es}(h)=-e$. Pour le calcul du résidu en 0, on a $h(z)=(\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{n!}z^{-n})(\sum\limits_{n\geq 0}z^n)$ sur $C(0,0,1)$. C'est un produit de deux séries normalement convergentes sur les compacts de cette couronne, donc $h(z)=\sum\limits_{n,m\geq 0}\dfrac{1}{n!}z^{-n+m}=\sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty}z^p\left(\sum\limits_{n\geq\max(-p,0)}\dfrac{1}{n!}\right)$. D'où $\underset{0}{\mathrm{R}es}(h)=e-1$.

(5) Remarques. Si $f=\dfrac{g}{h}$ est le quotient de deux fonctions holomorphes avec $h(a)=0$ alors f a un pole d'ordre $Ord(a,h)-Ord(a,g)$ avec Ord l'ordre d'annulation au point a. En particulier si $Ord(a,g)\geq Ord(a,h)$ alors f se prolonge holomorphiquement en a.
Notons que 0 n'est pas une singularité isolée de la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$.

Exercice 2.

(1) $z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ est une fonction rationnelle de poles les racines $4-$ième de -1. Si $R \geq 2$, alors $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z|=R} f(z)dz$ car les cercles considérés sont homotopes dans $|z| > \dfrac{3}{2}$ et f est holomorphe dans cet ouvert. Une majoration évidente donne $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z|=R} f(z)dz \overset{R\to+\infty}{\to 0}$. Donc l'intégrale est nulle et la somme des résidus de f est nulle. Plus généralement, si f est une fonction rationnelle de degré inférieur à -2, si $R > 0$ est choisi de sorte que tout les poles de f sont dans $D(0,R)$ alors $\displaystyle\left|\int_{|z|=R} f(z)dz\right| = \lim_{R\to+\infty}\left|\int_{|z|=R} f(z)dz\right| \leq \lim_{R\to+\infty} 2\pi R.CR^{degf} = 0$ avec C une constante positive assez grande.

(2) $f : z \mapsto \dfrac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}$ est une fonction rationnelle de degré -1 dont tout les poles sont contenus dans le disque $D(0,3)$. Appliquant la formule de Cauchy homotopique, pour $R \geq 3$, on a $\displaystyle I = \int_{C(0,3)} f(z)dz = \int_{C(0,R)} f(z)dz$. Faisant le changement de variable $z = \dfrac{1}{u}$ dans l'intégrale, $\displaystyle I = \int_{|u|=\epsilon=\frac{1}{R}} \frac{u^{-17}}{(u^{-2}+2)^3(u^{-3}+3)^4}\frac{-du}{u^2} = 2i\pi \underset{0}{\mathrm{R}es}(\tilde{f}) = 2i\pi(-1)$ avec $\tilde{f} : u \mapsto \dfrac{-1}{(1+2u^2)^3(1+3u)^4u}$. En particulier, la somme des résidus de f dans le disque $D(0,R)$ est -1.

(3) Remarques: Une méthode pour calculer des intégrales faisant intervenir les résidus d'une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus A$, A discret fermé: *Lorsque l'infini n'est pas un point d'accumulation de* A, *i.e.* lorsque A est borné (donc fini car discret fermé dans $\mathbb{C}$), on peut faire le changement de variable $z = \dfrac{1}{u}$, puis calculer $\displaystyle\int_{|u|=\epsilon} f(\frac{1}{u})\frac{du}{-u^2}$ avec $\epsilon > 0$ assez petit. On calcul un résidu en l'infini.

Exercice 3.

(1) $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{C(0,1)} \frac{dz}{iz}\frac{1}{2+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} = \int_{C(0,1)} \frac{2dz}{4iz+z^2-1}$ (on utilise $\bar{z} = z^{-1}$ sur $C(0,1)$). Or les racines de $z^2+4iz-1$ sont $i(-2\pm\sqrt{3})$. Donc $-2+\sqrt{3}$ est l'unique pole simple de la fonction $z \mapsto \dfrac{2}{4iz+z^2-1}$ dans le disque $D(0,1)$, le théorème des résidus donne $I = 2i\pi\dfrac{1}{2i\sqrt{3}}$. Une méthode générale pour calculer $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ avec $R = \dfrac{P}{Q}$, une fonction rationnelle en deux variables telle que $Q(u,v) \neq 0$ sur $u^2+v^2 = 1$ consiste à écrire $\displaystyle I = \int_{C(0,1)} R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))\frac{dz}{iz}$.

(2) Le calcul d'intégrale absolument convergente du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P}{Q}(x)dx$ avec $degP \leq degQ-2$ et Q non nul sur $\mathbb{R}$: On peut intégrer sur $C_R = [-R,R] \cup (C(0,R) \cap \{\mathrm{I}mz \geq 0\})$, ayant choisit $R \geq R_0$ assez grand pour que tout les poles de $\dfrac{P}{Q}$ soit dans $D(0,R_0)$. Le théorème des résidus donne $\displaystyle\int_{[-R,R]\cup(C(0,R)\cap\{\mathrm{I}mz\geq 0\})} \frac{P}{Q}(z)dz = 2i\pi\sum_{\alpha\in P_+} \underset{\alpha}{\mathrm{R}es}(\frac{P}{Q})$, on somme sur les poles contenus dans $P_+ = \{\mathrm{I}mz > 0\}$. Comme $degP \leq degQ+2$, $\displaystyle\left|\int_{C(0,R)\cap P_+} \frac{P}{Q}(z)dz\right| \leq$

$\frac{\pi R}{R^2} \to 0$ quand $R \to +\infty$. D'où, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P}{Q}(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{P}{Q}(z)dz = 2i\pi \sum_{\alpha\in P_+} \underset{\alpha}{\mathrm{R}es}(\frac{P}{Q})$.

Ici la fonction est paire, on a $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$. Notant α_i les racines $6-$ièmes de -1, comme ce sont des poles simples de $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$, on a $\underset{\alpha_i}{\mathrm{R}es}(f) = \frac{1}{6\alpha_i^5} = \frac{-\alpha_i}{6}$ (car $\underset{a}{\mathrm{R}es}(\frac{f}{g}(z)) = \underset{a}{\mathrm{R}es}(\frac{f(z)}{(z-a)(g'(a)+\dots)}) = \frac{f(a)}{g'(a)}$ si $g(a) = 0, g'(a) \neq 0, f(a) \neq 0$). Appliquant la méthode indiquée, on obtient $2I = 2i\pi\frac{-1}{6}(e^{i\frac{\pi}{6}} + i + e^{i\frac{5\pi}{6}}) = \frac{2\pi}{3}$.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$. On considère $f : z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ que l'on va intégrer sur le bord de $P_+ \cap D(0,R)$ avec $P_+ = \{\mathrm{I}mz > 0\}$. Les résidus de f dans le demi-plan supérieur sont $\underset{i}{\mathrm{R}es}(f) = \frac{e^{-1}}{2i}$. D'où $\pi e^{-1} = \int_{\partial(D(0,R)\cap P_+)} f(z)dz = \int_{-R}^0 + \int_0^R + \int_{C(0,R)\cap P_+} f(z)dz$. Or le changement de variable *réelle* $t = -u$ dans la première intégrale donne $\int_{-R}^0 f(z)dz = \int_0^R \frac{e^{-it}}{1+t^2}dt$. La troisieme intégrale se majore par $\left|\int_{C(0,R)} f(z)dz\right| \leq \pi R\frac{1}{R^2-1}$ car $|e^{it}| = e^{-\mathrm{I}mt} \leq 1$ si $\mathrm{I}mt \geq 0$. Faisant $R \to +\infty$, on obtient le résultat.
Remarques: On ne considère pas a priori l'intégrale de $z \mapsto \frac{\cos z}{1+z^2}$ car $|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y$, on obtiendrait un terme qui diverge vers $+\infty$ dans l'intégrale sur $C(0,R)\cap P_+$.

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. On a une intégrale semi-convergente. On fait le même type de calcul, sauf qu'il faut affiner les majorations le long des cercles de rayons tendant vers l'infini: Soit $f : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. On intègre sur le bord du compact $K(R,\epsilon) = \overline{P_+} \cap (\overline{D(0,R)} \setminus D(0,\epsilon))$: $0 = \int_{\partial K(R,\epsilon)} f(z)dz = \int_\epsilon^R + \int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{C(0,R)\cap P_+} - \int_{C(0,\epsilon)\cap P_+} f(z)dz$.
Le bord du compact étant comme toujours orienté dans le sens direct, la portion de cercle $C(0,\epsilon) \cap p_+$ est parcouru dans le sens indirect. Cela explique le signe moins dans le dernier terme car par convention le paramétrage d'un cercle se fait dans le sens direct i.e. $[0,\pi] \ni \theta \mapsto \epsilon e^{i\theta}$.

$$\left|\int_{C(0,R)\cap P_+} \frac{e^{it}}{t}dt\right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{R}Rdt \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t} \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}t}dt = \frac{\pi}{R}[1-e^{-R\frac{2}{\pi}}] \underset{R\to+\infty}{\to} 0$$

(on utilise la concavité du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$).

$I_1 = \int_{C(0,\epsilon)\cap P_+} \frac{e^{it}}{t}dt = \int_{C(0,\epsilon)\cap P_+} (\frac{1}{t} + g(t))dt$ avec g holomorphe au voisinage de 0 (car on a un pole d'ordre 1, de résidu 1). Donc $I_1 = \int_0^\pi \frac{1}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta}d\theta + \int_{C(0,\epsilon)\cap P_+} g(t)dt = i\pi + \int_{C(0,\epsilon)\cap P_+} g(t)dt \underset{\epsilon\to 0}{\to} i\pi$. Maintenant $\int_\epsilon^R + \int_{-R}^{-\epsilon} f(z)dz = 2i\int_\epsilon^R \frac{\sin t}{t}dt$. Les considérations précédentes entrainent que $I = \lim_{\epsilon\to 0, R\to+\infty} \int_\epsilon^R \frac{\sin t}{t}dt$ existe et $0 = 2iI + 0 - i\pi$.