

Exponentielle et logarithmes.

**Exercice 1.**

- (1) Démontrer que l'application  $t \mapsto e^{it}$  est un homéomorphisme de  $] -\pi, \pi[$  sur  $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ . En déduire que l'exponentielle est un difféomorphisme de  $B = \{z \in \mathbb{C}, -\pi < \text{Im}z < \pi\}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .
- (2) Déterminer l'image par l'exponentielle des droites  $\text{Re}z = cte$  et  $\text{Im}z = cte$ , ainsi que l'image du segment  $\text{Re}z = cte$  et  $\text{Im}z \in [0, 2\pi[$ .

Quelques rappels: Soit  $O$  un espace topologique connexe, et  $f : O \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  une application continue. On appelle détermination continue de l'argument (noté dca) de  $f$  une application continue  $\theta : O \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f = |f|e^{i\theta}$  sur  $O$ . De même, on appelle détermination continue du logarithme (dcl) de  $f$  toute application  $l : O \rightarrow \mathbb{C}$  continue telle que  $f = e^l$  sur  $O$ .

i  $l$  est une dcl ssi  $l = \log |f| + i\theta$  avec  $\theta : O \rightarrow \mathbb{R}$  une détermination continue de l'argument de  $f$ .

ii Deux dca de  $f$  différent par un multiple entier de  $2i\pi$ .

**Exercice 2.**

- (1) Pour  $\alpha_0 \in ]-\pi, \pi[$ , on note  $D_{\alpha_0} = \mathbb{R}^+ e^{i\alpha_0}$ . Montrer que l'application  $\mathbb{R} \times ]\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi[ \ni (x, y) \mapsto e^{x+iy} \in \mathbb{C} \setminus D_{\alpha_0}$  est un difféomorphisme. En déduire l'existence d'un logarithme continue sur  $\mathbb{C} \setminus D_{\alpha_0}$  d'argument à valeurs dans  $] \alpha_0, \alpha_0 + 2\pi[$  (lorsque  $\alpha_0 = -\pi$ , on parle de la détermination principale de l'argument que l'on note  $\text{Arg}$ ). Lorsque  $\alpha_0 = -\pi$ , donner une formule explicite pour l'argument principale
- (2) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Montrer que toute dcl sur  $U$  est holomorphe, de dérivée  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . En déduire qu'elle est analytique sur  $U$ . Soit  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Développer en série entière de la variable  $z - a$  la détermination principale du logarithme. Quel est le disque de convergence  $D_a$  de cette série. Lorsque  $D_a \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$  n'est pas connexe, calculer la somme de cette série sur chaque composante connexe de  $D_a \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$  en fonction de la détermination principale du logarithme. Soit  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Calculer  $\text{Log}(i - 1)$  et  $\text{Log}(i - 1)^2$  Montrer que  $\text{Log}(z) = \text{Log}(1 + \frac{z - z_0}{z_0}) + \text{Log}(z_0)$  pour tout  $z \in D(z_0, \delta)$  avec  $\delta = d(z_0, \mathbb{R}^-)$ .
- (3) Comment doit on restreindre les applications suivantes pour qu'elle possède une détermination principale de l'argument?  $z \mapsto z + 1$ ,  $z \mapsto z + i$ ,  $z \mapsto z - i$ ,  $z \mapsto z^2 + 1$ .
- (4) Donner le domaine de définition de la fonction  $z \mapsto \text{Log}(z^2 + 1) - \text{Log}(z - i) - \text{Log}(z + i)$  et calculer cette fonction sur chaque composante connexe de son domaine de définition.
- (5) Supposons que l'application identique de  $\mathbb{U}$  dans  $\mathbb{U}$  admette une dca  $\theta$ . Montrer que  $\theta$  est injective, en déduire que c'est un homéomorphisme de  $\mathbb{U}$  sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ . En déduire qu'une telle application n'existe pas.

**Exercice 3.** Soit  $O$  un espace topologique connexe et  $f : O \rightarrow \mathbb{C}^*$  continue. On appelle détermination continue de la racine  $n$ -ième (dcrn) de  $f$  toute application continue  $r : O \rightarrow \mathbb{C}^*$  telle que  $f = r^n$ .

- (1) Démontrer que si  $O$  est connexe et si  $f$  possède une dcrn  $r$  alors  $f$  possède exactement  $n$  dcrn déduites de  $r$  par multiplication par les racines  $n$ -ème de l'unité.
- (2) Montrer que si  $f$  admet une dcl  $l$  alors  $e^{\frac{1}{n}l}$  est une dcrn de  $f$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). En particulier si la détermination principale  $\text{Log}f$  existe ( $f(O) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ), on dira que  $e^{\frac{1}{n}\text{Log}f}$  est la détermination principale de la racine  $n$ -ième de  $f$ . Sur  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ , montrer qu'il existe une unique dcrn d'argument dans  $] -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}[$ . Sur quel ouvert de  $\mathbb{C}$  la détermination principale de la racine carrée de  $z \mapsto z^2 + 1$  est-elle définie?
- (3) Plus généralement, pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , si  $f$  possède une dcl  $l$ , on associe une puissance  $\alpha$ -ème de  $f$  par  $g = e^{\alpha l}$ . On parle comme précédemment de détermination principale de la puissance

$\alpha$ -ième de  $f$  lorsque  $l = \text{Log} f$  (existe). Calculer la détermination principale de  $z \mapsto z^i$  au voisinage du point  $i$ . Calculer toutes les déterminations de  $i^i$ .

**Exercice 4.**

- (1) Trouver une détermination de  $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$  holomorphe sur  $\text{Im}z > 0$ , continue sur  $\text{Im}z \geq 0$ , valant 1 en 0.
- (2) Traiter le même problème dans le demi-plan  $\text{Im}z < 0$ .
- (3) En déduire qu'il n'existe pas de détermination de  $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$  continue sur  $\mathbb{C}$  et holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{+1, -1\}$ .

**Exercice 5.**

- (1) Calculer  $sh(iz), ch(iz), \sin(iz), \cos(iz)$ .
- (2) Calculer  $|\cos z|^2$ .
- (3) Résoudre  $\sin z = w$ .

**Exercice 6.**

- (1) Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . Sur quel ouvert  $z \mapsto \text{Log} \frac{z-a}{z-b}$  est-elle définie? Si  $\text{Im}b > \text{Im}a$ , comparer cette fonction avec  $z \mapsto \text{Log}(z-a) - \text{Log}(z-b)$  sur l'intersection des domaines de définitions.
- (2) Soient  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{C}, \Im c > 0$ . Calculer  $\text{Log} \frac{z-a}{z-b} + \text{Log} \frac{z-b}{z-c} + \text{Log} \frac{z-c}{z-a}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \text{triangle}(a, b, c)$ .