Licence
Analyse Complexe

Fonctions holomorphes.

Exercice 1.

(1) Soit $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$ linéaire de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
Montrer que α est $\mathbb{C}$ linéaire ssi α est la multiplication par $\alpha(1)$ ssi $c = -b$, $d = a$.
(2) En déduire qu'une application $\mathbb{C}$ dérivable en un point vérifie les équations de Cauchy Riemann.
(3) Montrer que la fonction $f(x, y) = 1$ si $x.y = 0$ et nulle ailleurs vérifie les équations de Cauchy Riemann en 0, mais n'est pas continue en 0.

Exercice 2.

(1) Soit f une fonction différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Calculer $\overline{\frac{\partial}{\partial z}} f(z_0)$ et $\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} f(z_0)$.
(2) Montrer que les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sont des dérivations sur l'espace des fonctions complexes différentiables en z_0. Calculer $\frac{\partial}{\partial z} z^k$,...
(3) Montrer l'identité $\frac{\partial}{\partial z} f \circ g = (\frac{\partial}{\partial w} f) \circ g \frac{\partial}{\partial z} g + (\frac{\partial}{\partial \bar{w}} f) \circ g \frac{\partial}{\partial z} \bar{g}$ lorsque les termes sont bien définies. Montrer l'identité analogue pour $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.
(4) En déduire que si $f : D(0, 1) \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur ce disque.
(5) Montrer que la composée de deux applications holomorphes est holomorphe.

Exercice 3. Montrer qu 'un polynôme $P(z, \bar{z}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} p_{i,j} z^i \bar{z}^j$ est holomorphe ssi $p_{i,j} = 0$ pour $j > 0$.

Exercice 4. Discuter les points de $\mathbb{C}-$diffèrentiabilité des fonctions suivantes.
$z \mapsto |z|^2$; $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$, $z \neq i$; $z \mapsto |z| - z$; $z = x + iy \mapsto x + iy^2$

Exercice 5. Ecrire l'inégalité des accroissements finis pour une fonction holomorphe sur un ouvert U en terme de sa $\mathbb{C}$ dérivée. En déduire que si U est connexe et $\frac{\partial}{\partial x} f$ est nulle alors f est constante.

Exercice 6. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Mq chacune des propriétés suivantes entraine que f est constante:
a) f est constante b) $\mathrm{R}e$(f) est constante c) $\mathrm{I}m$(f) est constante c) $\overline{f} \in \mathcal{O}(U)$ d) L'image de f est contenue dans une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. On note $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{I}mz > 0\}$. Montrer que $T : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme de H sur D le disque unité de $\mathbb{C}$. Calculer son inverse.