Licence, Analyse Complexe,

Fonctions holomorphes 1.

Exercice 1.

(1) Calculer $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^n(e^z-1)}$ pour $n = 0, 1, 2$. Indication: Considérer le prolongement par continuité de $z \mapsto \dfrac{z}{e^z-1}$.

(2) Calculer $k_n = \displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^n(1+z)(2-z)}$.

Exercice 2.

(1) Soit $a \in D(0,1)$. Montrer que $\dfrac{1}{1-|a|^2} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z|z-a|^2}$. (Indication: Montrer que $z|z-a|^2 = (z-a)(1-z\bar{a})$ le long du cercle unité)

(2) Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1)$ de module bornée par $M > 0$. Montrer que $|f'(a)| \leq \dfrac{M}{1-|a|^2}$.

Exercice 3. (Une preuve du théorème de Liouville). Soit f entière bornée. Soient $a \neq b$ deux nombres complexes et $R > \max(|a|,|b|)$. Calculer $I(R) = \displaystyle\int_{C(0,R)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$ (décomposer en éléments simples).

(1) Majorer $I(R)$ et conclure.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction entière f telle que $f(z+1) = f(z)$ et $f(z+i) = f(z)$ est constante.

Exercice 5. Soit f continue sur le disque fermé $\overline{D(a,r)}$, $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que $f \in \mathcal{O}(D(a,r))$ ssi $\forall z \in D(a,r)$, $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$. En déduire le théorème de Weierstrass.

Exercice 6. (Lemme de Schwarz)

(1) Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ nulle en 0 et bornée en module par $M \geq 0$. Montrer que $|f(z)| \leq M|z|$ sur le disque $D(0,1)$ et que l'inégalité est une égalité en un point $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ ssi $f(z) = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

(2) Donner un lemme analogue lorsque 0 est un zero de f d'ordre $k > 0$.

Exercice 7. (une application du lemme de Schwarz)

(1) Soit f holomorphe au voisinage de $\overline{D(a,r)}$, $r > 0$ et bornée par M sur le bord du disque. On suppose $f(a) \neq 0$. Montrer que le nombre de zeros (comptés avec multiplicité) de f dans le disque $|z-a| \leq \dfrac{R}{3}$ est inférieur à $\dfrac{1}{\log 2}\log(\dfrac{M}{f(a)})$.

Indications: Supposer $a = 0$, puis diviser f par des facteurs du type $(1 - \dfrac{z}{z_k})$ avec z_k les zéros de f dans $|z| \leq \dfrac{R}{3}$ (répétés suivant la multiplicité). Appliquer le principe du maximum et évaluer en 0.

Exercice 8. L'inégalité de Jensen (On affine le résultat précédent).

(1) Soit $a \in D(0,1)$. Montrer que $f_a : z \mapsto f_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est un biholomorphisme du disque unité d'inverse f_{-a}.

(2) Soit $f \in \mathcal{O}(\overline{D(0,r)})$, bornée par M sur le disque. Si $z_1, \ldots, z_k$ sont des zéros de f (répétés suivant la multiplicité) dans $D(0,r) \setminus \{0\}$, montrer que $\dfrac{r^k |f(0)|}{|z_1 \ldots z_n|} \leq M$.

(3) Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq e^{c|z|}$ pour $|z|$ assez grand, avec $0 \leq c < 1$. On suppose que $f(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est nulle. (Indications: On peut supposer $f(0) \neq 0$. Puis on écrit la formule de Jensen avec $r = n$, on prend la racine $n-$ième).

Exercice 9. Soit P un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1 tel que $|P(z)| = 1$ sur le cercle unité. Montrer que $P(z) = z^n$. (Indication: Utiliser la transformation $z \mapsto \dfrac{1}{z}$)

Exercice 10. Soit f holomorphe sur P_+ le demiplan supérieur I$mz > 0$, continue et bornée sur I$mz \geq 0$. Soit $M = \|f\|_{\infty, \partial P_+}$.

(1) Supposant que f tend vers 0 à l'infini, montrer que $\|f\|_{\infty, P_+} \leq M$.

(2) Dans le cas général considérer $g : z \mapsto \dfrac{f^n(z)}{i+z}$ (ou $g'(z) = \dfrac{f(z)}{(i+z)^\epsilon}$ avec une détèrmination de la puissance $\epsilon > 0$ choisie) .

(3) Peut-on appliquer ce qui précède à $z \mapsto e^{-z^2}$?

(4) Considérant un biholomorphisme rationnel du demi-plan sur le disque unité, retrouver le résultat précédent.

Exercice 11.

(1) Montrer qu'une fonction continue sur I$mz \geq 0$, holomorphe sur $\{\mathrm{I}mz > 0\} = P_+$, bornée, supposée de plus réelle sur l'axe réelle, est constante.

(2) Généraliser le résultat ci-dessus afin d'obtenir une description des $f \in \mathcal{O}(P_+) \cap C^0(\overline{P}_+)$ supposées de croissance au plus polynomiale et réelles sur l'axe réel.

Exercice 12. Soit $F : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \dfrac{\mathrm{Log} z}{z^2 - 1}$ si $z \neq 1$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Soient $0 < \epsilon < R$ et $K(\epsilon, R) = \{z \in \mathbb{C},\, \epsilon \leq |z| \leq R,\, 0 \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}\}$. Calculer $\displaystyle\int_{\partial K(\epsilon,R)} f(z)dz$. Faisant $\epsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 13. Extrait du partiel de 2001

Soit l'ouvert $B = \{z \in \mathbb{C}\, 0 < \mathrm{R}ez < 1\}$.

(1) Quelle est la frontière ∂B de B dans $\mathbb{C}$ (on ne demande pas de démonstration).

(2) Soit $\epsilon > 0$. On considère la fonction $G_\epsilon(z) = \exp(\epsilon z(z-1))$. Calculer pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sup\limits_{x \in [0,1]} |G_\epsilon(x + iy)|$.

(3) Soit $F : \overline{B} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur B. On suppose que $|F(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \partial B$ et qu'il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que $|F(z)| \leq A \exp(C|\mathrm{I}mz|)$ pour tout $z \in B$.
Montrer que $|F(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{B}$ (Indications On pourra considérer la fonction $F(z)G_\epsilon(z)$ et appliquer le principe du maximum).

Exercice 14.

(1) Soit $f \in \mathcal{O}((D(0,1))$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$. Montrer que $|a_n| \leq M \implies |f(z)| \leq \dfrac{M}{1 - |z|}$ et $|f'(z)| \leq \dfrac{M}{(1-|z|)^2}$.

(2) Supposant f bornée sur le disque , montrer que $|a_n| \leq \|f\|_\infty$ et $|f'(z)| \leq \dfrac{M}{1 - |z|}$