C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 817-822, 1997
Géométrie analytique/*Analytic Geometry*

Fonctions méromorphes sur un ouvert localement pseudoconvexe étalé au-dessus d'une variété projective

Pascal DINGOYAN

116, rue de la Glacière, 75013 Paris
et Université de Paris-VI, Laboratoire de Mathématiques,
4, place Jussieu, 75005 Paris.
E-mail: dingoyan@mathp6.jussieu.fr

Résumé. Soit $\Pi : U \to V$ un espace étalé localement pseudoconvexe, au sens de Hartogs, au dessus d'une variété algébrique projective de dimension n ; on montre que l'on peut immerger U dans $\mathbf{P}^{2n+1}$. Si W est un ouvert pseudoconvexe (au sens de Hartogs), relativement compact dans U, alors toute fonction méromorphe sur U s'écrit sur W comme quotient de deux sections du fibré $\Pi^*O(l)$, holomorphes sur W.

Meromorphic functions on a locally pseudoconvex domain spread over projective manifold

Abstract. *Let $\Pi : U \to V$ be a complex space spread over an algebraic projective manifold V of dimension n, U being locally pseudoconvex in the sense of Hartogs. We show that we can immerse U in $\mathbf{P}^{2n+1}$. Morever, if W is a relatively compact open subset in U, which is pseudoconvex (in the sense of Hartogs), then every meromorphic function on U is, on W, a quotient of two holomorphic sections of the bundle $\Pi^*(O(l))$.*

Abridged English Version

Let $\Pi : U \to V$ be a complex space spread over a manifold V. We say that U is pseudoconvex *in the sense of Hartogs* on V, if each holomorphic map ϕ from the n-dimensional Hartogs body to U, such that $\Pi \circ \phi$ extends to the filled Hartogs body, extends as a holomorphic map from the filled hartogs body to U (*see* [4], [16], and [12]). From the Oka-Docquier-Grauert theorem, U is Stein if V is Stein. However, it is known that locally Stein open subsets of projective manifolds

Note présentée par Jean-Pierre Demailly.

are not necessarily Stein domains. Moreover, Grauert (*see* [6]) provides an example where the only holomorphic functions are constants. It has been shown, (*see* [3], [14], [15], and [9]), that on a "Nakano pseudoconvex" manifold U (*i.e.* there exists a plurisubharmonic exhaustion function on U), $H^p(U, \Omega^n(E)) = 0$, $p > 0$, if E is a positive line bundle. In this Note, we study immersion of Hartogs pseudoconvex domains $\Pi : U \to V$ spread over algebraic manifolds or Kähler complete manifolds of bounded geometry (with Ricci curvature bounded), possessing a positive line bundle E. For example, hulls of meromorphy are such domains (*see* [7]). The key fact is that there exists some power E^k of E, such that we are able to separate points in U and approximate, to order one, any germ of section by global holomorphic sections. For this, we use Bombieri's method with pointwise singular potentials φ_p, $p \in U$, such that $d'd''\varphi_p$ is bounded uniformly in p. In this way, every compact subset of U is immersible in some $\mathbf{P}^N$ by $N+1$ global holomorphic sections of E^k. Looking at the chordal variety of the image of K when $N > 2n+1$, we can project it in $\mathbf{P}^{N-1}$ in such a way that we obtain another immersion in $\mathbf{P}^{N-1}$ by N holomorphic sections without increasing the power E^k and with arbitrary small increase in norm. Then we can, by an exhaustion procedure, immerse U in $\mathbf{P}^{2n+1}$. So, we have many meromorphic functions on U (quotient of sections). The converse problem is harder: from Hirschowitz (*see* [7]), we know that if U is a hull of meromorphy of a domain spread over an algebraic manifold V, then U is a locally pseudoconvex domain spread over V. If V is the projective space (*see* Fujita [5]) a Grassmannian (*see* Hirshowitz [7]) or a hypersurface of degree 3 (*see* Ohsawa [11]), then U is compact or Stein or holomorphically convex (*see* also [13] for a survey). So, as we shall see, every meromorphic function on U is a quotient, on any compact set, of two holomorphic sections on U of the positive line bundle $O(l)$, for l sufficiently large. From Andreotti (*see* [1]), if U is a pseudoconcave domain spread over a projective manifold, then every meromorphic function on U is algebraic and so may be written as the quotient of two holomorphic sections on U of the bundle $O(l)$, for l sufficiently large. Here, we assume that there exists some relatively compact, open, Hartogs pseudoconvex subset W of U. By using a partition of unity, we can produce a potential ψ for any hypersurface in U. However, the behaviour of $d'd''\psi$ is difficult to estimate. At least, $d'd''\psi$ is bounded on each compact subset. Hence, by the L^2 methods applied on W with suitable singular potentials ψ, we can produce holomorphic sections s of E^l on W, for l sufficiently large, with a zero set containing the part of the hypersurface lying in W. We apply this to the hypersurface of poles of a meromorphic function f on U. Then $s^k f$ is holomorphic on W for k sufficiently large.

---

1. Séparation uniforme

1.1. Potentiel singulier local

Soit $B_n(r)$ la boule de centre 0 et de rayon r de $\mathbf{C}^n$; posons $B = B_n(1)$. Soit $\theta \in C_0^\infty(B)$ telle que $\theta \equiv 1$ au voisinage de 0, $1 \geq \theta \geq 0$. Considérons la fonction φ définie par $\varphi(z) = \theta(z)\, n \log(|z|^2)$, où n est la dimension de la variété. On a $d'd''\varphi \geq -c_0\, \omega_e$, où c_0 est une constante positive, et où ω_e désigne la métrique euclidienne canonique. De plus, $e^{-\varphi}$ est non localement intégrable pour la mesure de Lebesgue au voisinage de 0. Considérons maintenant une variété kählérienne (M, ω) et un point p de M. Soit $h_p : U_p \to B$ une carte holomorphe locale, centrée en p, vérifiant $c_p h_p^* \omega_e \leq \omega$, où c_p est une constante strictement positive. Notons φ_p le prolongement par zéro à M de la fonction $\varphi \circ h_p$. On a $d'd''\varphi_p = h_p^* d'd''\varphi \geq h_p^*(-c_0\omega_e) \geq -c_0 c_p^{-1}\omega$ sur un ouvert relativement compact de U_p, $d'd''\varphi_p$ étant nul hors de U_p.

1.2. Séparation uniforme

Dans la suite, on considérera une variété kählérienne $(M, \tilde{\omega})$ et $\Pi : U \to M$ un espace étalé localement pseudoconvexe au dessus de M . Soit $(\hat{E}, \hat{h})$ un fibré en droite, hermitien de courbure uniformément positive, (*i.e.* il existe $\varepsilon > 0$ tel que $iC(\hat{E}) \geq \varepsilon\,\tilde{\omega}$.)

Proposition 1. – *Sous les hypothèses ci-dessus :*

a) il existe un voisinage W de l'ouvert $\Pi(U)$ tel qu'on ait l'inégalité $i\mathrm{Ricci}(\tilde{\omega}) \geq -\kappa\tilde{\omega}$.

b) il existe une constante c positive telle qu'en tout point p de $\Pi(U)$, il existe $h_p : U_p \to B$, une carte locale centrée en p vérifiant $h_p^*\omega_e \leq c\tilde{\omega}$.

Si i) Π est finie, à projection relativement compacte dans M ou si ii) $W = M$ et $(M, \tilde{\omega})$ est complète à géométrie bornée, alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H^0_{(2)}(U, E^m)$ (sections holomorphes de carré intégrable) *sépare les points, avec m entier naturel supérieur à m_0 et $E = \Pi^*\hat{E}$.*

Démonstration. – α) Soient $x, y \in U$, $x \neq y$. Soient $\varphi_{\Pi(x)}, \varphi_{\Pi(y)}$ les potentiels locaux associés aux cartes $U_{\Pi(x)}, U_{\Pi(y)}$ de (b). Soit θ_1 une fonction C^∞ à support compact dans un voisinage A de x, de sorte que $y \notin A$, $1 \geq \theta_1 \geq 0$, $\theta \equiv 1$ au voisinage de x. Si de plus $\Pi(x) \neq \Pi(y)$, on suppose $\Pi(y) \notin \Pi(A)$. Si A est assez petit, on considère une section holomorphe locale $s_x \in H^0(A, E^k)$ telle que $s_x(x) \neq 0$, où k est un entier naturel qui sera fixé ultérieurement. Considérons la section $\theta_1 s_x \in C_0^\infty(U, E^k)$; alors $\int_U |d''\theta_1 s_x|^2_{C(E^k, \varphi_x + \varphi_y)} e^{-\varphi_x - \varphi_y} < +\infty$. Prenons $m_0 = -[-\frac{\kappa + 2c_0 c^{-1}}{\varepsilon}] + 1$, où $[.]$ désigne la partie entière d'un nombre réel ; on a alors, pour $k \geq m_0$, $iC(E^k, \varphi_x + \varphi_y) + i\mathrm{Ricci}(\omega) \geq 0$. Si l'on sait résoudre l'équation $d''u = d''\theta_1 s_x$ dans $L^2(e^{-\varphi_x - \varphi_y})$ suivant la méthode de [3], alors la section holomorphe $\tilde{s} = u - \theta_1 s_x$ sépare x et y. Remarquons que dans la construction précédente, avec des modifications évidentes, si on prend $x = y$, alors $\tilde{s}$ est une approximation de s_x à l'ordre 1.

β) Il reste à voir que U privé d'un ensemble analytique admet une métrique complète. Dans le cas (i), voir la proposition 7, et dans le cas (ii), la proposition 2 ci-dessous.

Proposition 2. – *Soit (M, ω) une variété kählérienne complète à courbure de Ricci bornée. Supposons de plus que (M, ω) soit à géométrie bornée. Supposons qu'il existe un fibré hermitien (E,h) uniformément positif. Il existe alors un entier m_0 tel que pour tout entier $m \geq m_0$, pour toute section $s \in H^0_{(2)}(M, E^m)$, $M \setminus (s = 0)$ est de Stein et $H^0_{(2)}(M, E^m)$ sépare les points et donne des coordonnées locales en tout point.*

Démonstration. – C'est une application des techniques L^2, analogue à ce qui est fait dans [10].

2. Théorème d'immersion

On suivra dans ce paragraphe la méthode d'immersion de Bishop suivant l'exposé donné dans [8] (p. 130 à 131). On considère une variété kählérienne (U, ω), un fibré E au dessus de U, un compact K de U, tel que E soit ample au voisinage de K, (*i.e.* il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $H^0(K, E^m)$ sépare les points de K et engendre $O_p/m_p^2 \otimes_{\mathbb{C}} E_p, \forall p \in K$). Dans la suite on notera, pour U' un ouvert de U, $\mathcal{H}(U', m, \mathbf{P}^N)$ l'espace des applications holomorphes du type

$$z \mapsto [s](z) = (s_0(z) : \ldots : s_N(z)) \in \mathbf{P}^N \quad \text{où} \quad s = (s_1, \ldots, s_N) \in (H^0(U', E^m))^{N+1}$$

(*i.e.* pour tout point $z \in U$, une coordonnée du multivecteur s est non nulle). Si $H^0_{(2)}(U', E^m)$ (sections de carré intégrable) est très ample, on notera $[s] \in \mathcal{H}_{(2)}(U', m, \mathbf{P}^N)$ lorsque $[s] = (s_0 : \ldots : s_N)$ et $s_i \in L^2(U', E^m, h^m)$, $i = 0, \ldots, N$. Si K est un compact de U', on notera $\mathcal{H}^{U'}(K, m, \mathbf{P}^N), \mathcal{H}^{U'}_{(2)}(K, m, \mathbf{P}^N)$ toute application holomorphe d'un voisinage de K, dans U', à valeurs dans $\mathbb{P}^N$, donnée par un multivecteur $s \in (H^0(U', E^m))^{N+1}$, $s \in (H^0_{(2)}(U', E^m))^{N+1}$ respectivement.

LEMME 1. – *Il existe une immersion $\varphi : K \to \mathbb{P}^N$ pour un entier naturel N.*

Démonstration. – Cela résulte de l'hypothèse d'amplitude et du lemme de Borel-Lebesgue.

LEMME 2. – *Soient X un espace complexe de dimension m et Y un espace complexe de dimension $n > m$. Soit $\varphi : X \to Y$ une application holomorphe. Alors $\varphi(X)$ est de première catégorie dans Y.*

Démonstration. – C'est le lemme 1.2 de [2]. Dans le cas lisse, c'est un lemme de Whitney.

PROPOSITION 3. – *Si $N = 2n + 1$, alors, lorsque les hypothèses d'amplitudes sont satisfaites, $\mathcal{H}^{U'}(K, m, \mathbb{P}^N) \neq \emptyset$, $\mathcal{H}^{U'}_{(2)}(K, m, \mathbb{P}^N) \neq \emptyset$.*

Démonstration. – On construit la variété des cordes à l'image de K dans $\mathbb{P}^N$. Soit $[s] \in \mathcal{H}^{U'}(K, m, \mathbb{P}^N)$ (resp. $\mathcal{H}^{U'}_{(2)}(K, m, \mathbb{P}^N)$) définie sur un voisinage $\tilde{W}$ de K dans U' et soit $W = [s](\tilde{W})$. Considérons dans $((W \times W) \setminus \Delta) \times \mathbb{P}^N$ la relation d'incidence $I = \{(p, q, r) \in ((W \times W) \setminus \Delta) \times \mathbb{P}^N : p \wedge q \wedge r = 0\}$ et l'ensemble analytique $\bar{I}$ de $W \times W \times \mathbb{P}^N$. On a $\dim_{\mathbb{C}} \bar{I} = 2n + 1$. D'après le lemme précédent, si $N > 2n + 1$, l'image de $\bar{I}$ dans $\mathbb{P}^N$ est de première catégorie dans $\mathbb{P}^N$. En particulier, si $N > 2n + 1$, l'ensemble A des points $p \in \mathbb{P}^N$ n'appartenant ni à une corde ni à une ligne tangente de W est de seconde catégorie dans $\mathbb{P}^N$. Si $p \in A$, prenant un hyperplan H ne contenant pas p, la projection π_p de sommet p sur H envoie W sur une sous-variété localement fermée de H. En particulier, si $W \not\subset H = (z_N = 0)$, en prenant le sommet p de π_p hors de cet hyperplan, alors $p = (\alpha_0 : \ldots : \alpha_N)$, avec $\alpha_N \neq 0$, et π_p est donnée par $(z_0 : \ldots : z_N) \mapsto (z_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_N} z_N : \ldots : z_{N-1} - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} z_N)$. On voit donc, puisque l'on peut prendre α_N arbitrairement grand, que l'application

$$(s) \to \tilde{\pi}_p \circ [s] = \left(s_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_N} s_N : \ldots : s_{N-1} - \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} s_N \right)$$

est donnée par une perturbation du multivecteur $s' = (s_0, \ldots, s_{N-1})$ arbitrairement proche de l'identité. On ne considèrera que ce type de projection.

PROPOSITION 4. – *Soient U une variété et $E \to U$ un fibré en droites au dessus de U tels qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ pour lequel $H^0(U, E^m)$ (resp. $H^0_{(2)}(U, E^m)$) est très ample. Alors :*

a) *l'ensemble des multi-sections $(s) \in (H^0(U, E^m))^{N+1}$ (resp. $\in (H^0_{(2)}(U, E^m))^{N+1}$) qui ne définissent pas une immersion $[s]$ de U dans $\mathbb{P}^N$ est de première catégorie pour la topologie de la convergence uniforme (resp. pour la topologie L^2) si $N + 1 \geq 2n + 1$.*

b) *l'ensemble des multi-sections $(s) \in (H^0(U, E^m))^{N+1}$ (resp. $\in (H^0_{(2)}(U, E^m))^{N+1}$) qui ne définissent pas une application régulière $[s]$ de U dans $\mathbb{P}^N$ est de première catégorie pour la topologie de la convergence uniforme (resp. pour la topologie L^2) si $N + 1 \geq 2n$.*

Démonstration. – La démonstration est analogue à celle du théorème 5.3.6 de [8], en remarquant que, pour (b), la variété des tangentes à un ensemble analytique de dimension n est de dimension $2n$.

On obtient comme corollaire :

THÉORÈME 1. – *Soit $\Pi : U \to M$ un espace étalé localement pseudoconvexe au dessus d'une variété kählérienne (M, ω) de dimension n. Supposons de plus qu'il existe un fibré hermitien (E, h) défini au voisinage W de $\overline{\Pi(U)}$, uniformément positif. Si Π est finie et $W \subset\subset M$, ou bien si $W = M$ et (M, ω) est à géométrie bornée, alors il existe une immersion dans un espace projectif de dimension $2n + 1$.*

COROLLAIRE 1 (Kodaira). – *Une variété compacte possédant un fibré hermitien à courbure définie positive est projective.*

REMARQUE 1. – Si $\Pi : U \to V$ est étalé au dessus d'une variété projective V, plutôt que d'immerger U dans un projectif, on l'immerge dans l'espace total du fibré $O(m_0)^{2n+2}$, de sorte que Π coïncide avec la projection de ce fibré sur V.

3. Fonctions méromorphes sur des domaines étalés pseudoconvexes.

On a vu, à la section précédente, que les fonctions méromorphes, quotients de sections d'une puissance du fibré positif E, donnent une immersion de U dans un espace projectif. Ce paragraphe montre, en quelque sorte, la réciproque (*voir* la version anglaise).

PROPOSITION 5. – *Soient X une variété analytique et Z un ensemble analytique dans X. Il existe une fonction $\psi < -1$, de classe C^∞ sur $X \setminus Z$, convergeant vers $-\infty$ au voisinage de Z et localement sommable sur X, et une $(1,1)$-forme réelle γ continue sur X ayant les propriétés suivantes :*
(i) $id'd''\psi \geq \gamma$;
(i) *si α est un réel > 0, $e^{-\alpha\psi}$ est non intégrable au voisinage de tout point $z \in Z$ en lequel la codimension du germe Z_z est au plus égale à α.*

Démonstration. – C'est la proposition 1.4 de [3].

PROPOSITION 6. – *Soit $(X, \tilde\omega)$ une variété analytique complexe munie d'une forme kählérienne ω. Soit $\Pi : U \to X$ un ouvert localement de Stein au dessus de X, de projection relativement compacte dans X, tel que Π est finie. Alors, U admet une métrique kählérienne complète.*

Démonstration. – Si X est compacte et U est un revêtement, alors $\Pi^*\tilde\omega$ est complète. Sinon U admet des points frontières. Considérons comme Takeuchi (*voir* [16]) la fonction distance au bord de U, notée d_∂, calculée par rapport à la métrique $\omega = \Pi^*\tilde\omega$. D'après un résultat de Takeuchi (*voir* [16]), il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $\varphi = -\log(\max(\varepsilon, d_\partial))$ soit globalement quasi-plurisousharmonique, c'est-à-dire qu'il existe une constante c telle que $id'd''\varphi \geq c\omega$ au sens des courants. Appliquant le corollaire 9.6 de [3] à la fonction φ et à la fonction $\lambda = 1$, on obtient une fonction ψ de classe C^∞ sur U, vérifiant $\varphi < \psi < \varphi + 1$ et $id'd''\psi \geq (c-1)\omega$. On choisit ε assez petit pour que $\varphi > 2$. Posons $a = 1 + |c-1|$. Alors la $(1,1)$-forme $\omega_0 = a\omega + 2id'd''(\psi - \log\psi)$ définit une métrique kählérienne sur U. Cette métrique est complète : la fonction $\log\psi$ est exhaustive, Π étant finie, et à différentielle bornée.

THÉORÈME 2. – *Soient $\Pi : U \to X$ un espace étalé au dessus d'une variété complexe munie d'une métrique kählérienne $\tilde\omega$ et $\tilde E$ un fibré hermitien strictement positif au dessus de X. Soit $E = \Pi^*\tilde E$ munie de la structure hermitienne réciproque. Soient Z un ensemble analytique dans U et $U_0 \subset U$ un ouvert relativement compact de U, localement de Stein au dessus de X. Alors, pour k assez grand, il existe sur U_0 une section $s \in H^0(U_0, E^{\otimes k})$ s'annulant sur Z.*

Démonstration. – Notant $C(\tilde E)$ la courbure du fibré $\tilde E$, comme $\Pi(U_0)$ est relativement compact dans X, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $C(\tilde E) > \alpha\tilde\omega$ sur $\Pi(U_0)$. On peut supposer $\alpha = 1$. U_0 étant relativement compact dans U, un nombre fini de composantes irréductibles de Z rencontre U_0. On peut supposer Z irréductible sur U de codimension l. Considérons la fonction ψ, définie sur U, associée à Z (*voir* la proposition 5). U_0 étant relativement compact dans U, il existe un entier n_0 tel que $l\gamma > -n_0\omega$, avec $\omega = \Pi^*\tilde\omega$. Soit $p_0 \in U_0 \setminus Z$ et φ_{p_0} le potentiel associé. Il existe un entier n tel que $inC(E) + id'd''\varphi_{p_0} + i\mathrm{Ricci}(\omega) - n_0\omega \geq 0$. Choisissons une section C^∞, s_0 de $E^{\otimes n}$ à support compact dans un petit voisinage de p_0 ne rencontrant pas Z, holomorphe au voisinage de p_0 et non nulle en p_0. $\Pi(U_0)$ étant relativement compact dans X, U_0 admet, d'après la proposition précédente, une métrique kählérienne complète. Notons $\delta = \varphi_{p_0} + l\psi$. D'après [3], on peut résoudre le problème du d'' avec estimations L^2 sur U_0, par rapport à la métrique ω :

$$d''s_1 = d''s_0 \quad \text{et} \quad \int_{U_0} |s_1|^2 e^{-\delta} dV \leq \int_{U_0} |d''s_0|^2_{C(A,\delta)} e^{-\delta} dV.$$

(i) s_1 est nulle en p_0 quand $e^{-\tilde{\varphi}_{p_0}}$ est non intégrable au voisinage de p_0 et quand s_1 y est holomorphe,

(ii) s_1 doit s'annuler le long de Z quand elle est holomorphe au voisinage de Z dans U_0 et de carré intégrable relativement à $e^{-l\psi}$, qui n'est pas localement intégrable près de Z.

On obtient donc une section holomorphe $s = s_0 - s_1$ non identiquement nulle, s'annulant le long de Z.

COROLLAIRE 2. – *Supposons de plus que U est une réunion croissante d'ouverts relativement compacts et localement de Stein au dessus de X. Alors, tout sous ensemble analytique Z de X s'écrit sur chaque compact K de U comme l'intersection d'exactement $n+1$ sections du fibré E^{-k}, définies au voisinage du compact K. L'entier k dépendant du compact K.*

COROLLAIRE 3 (Chow). – *Toute fonction méromorphe sur une sous-variété projective est rationnelle.*

REMARQUE 2. – Le corollaire 1 s'applique en particulier aux ouverts faiblements pseudoconvexes au sens de Nakano.

Remerciements. Je tiens à remercier Gennadi Henkin et Henri Skoda pour leurs nombreux conseils ainsi que Jean-Pierre Demailly pour son aide à la mise en forme de la note.

Note remise le 12 novembre 1996, acceptée le 9 décembre 1996.

Références bibliographiques

[1] **Andreotti A., 1963**. Théorème de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves, *Bull. Soc. Math. France*, 91, p. 1-38.

[2] **Andreotti A. et Stoll W.** Analytic and Algebraic Dependence of Meromorphic Functions, *Lecture Notes in Mathematics no. 234*.

[3] **Demailly, J. P., 1982**. Estimations L^2 pour l'opérateur ∂ d'un fibré vectoriel holomorphe semipositif au dessus d'une variété kählérienne complète. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e *série*. 15, p. 457-511.

[4] **Docquier, K. et Grauert, H., 1960**. Levisches problem und Rungerscher Satz für Teilgebiete Steincher Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 140, p. 94-123.

[5] **Fujita, R., 1963**. Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe. *J. Math. Soc. Japan* 15, p. 443-473.

[6] **Grauert H., 1963**. Bemerkenswere pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten.*Math. Zeit.* 81, p. 377-392.

[7] **Hirschowitz A., 1974**. Pseudoconvexité au dessus d'espaces plus ou moins homogènes, *Invent. Math.* 26, p. 303-322.

[8] **Hörmander, L., 1990**. An introduction to complex analysis of several variables, *North-Holland-Elsevier Science Publishers, Third Edition*.

[9] **Nakano S., 1970-1971**. On the inverse of monoidal transformation, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 6, p. 483-502.

[10] **Napier, T., 1990**. Convexity properties of coverings of smooth projective varieties. *Math. Ann.* 286, p. 433-479.

[11] **Ohsawa T., 1981**. Weakly 1-Complete Manifold and Levi Problem, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 17, p. 153-164.

[12] **Oka K., 1953**. Sur les fonctions de plusieurs variables IX. Domaine fini sans point critique intérieur, *Jap. Jour. Math.* 23, p. 97-155.

[13] **Siu Y. T., 1978**. Pseudoconvexity and the problem of Levi, *Bull. Amer. Math. Soc.* 84 no. 4, p. 481-512.

[14] **Skoda H., 1978-1979**. Séminaire Pierre Lelong-Henri Skoda, *Lecture Notes in Mathematics no. 822*.

[15] **Takeogoshi K. and Ohsawa, T., 1981**. A vanishing theorems for $H^p(X, \Omega^q(B))$ on weakly 1-complete manifolds, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 17, p. 723-733.

[16] **Takeuchi A., 1967**. Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes, *J. Math. Kyoto Univ.* 6, p. 323-357.