Math. Z. 232, 217–240 (1999)

Mathematische Zeitschrift

Un phénomène de Hartogs dans les variétés projectives

Pascal Dingoyan

Institut de Mathématiques, UMR 9994 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Tour 46, Couloir 46–56, 5e étage, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France.
(e-mail: dingoyan@math.jussieu.fr)

Received November 30, 1997; in final form July 23, 1998

In this article, we study univalent open subsets $U \hookrightarrow V$, $\dim V \geq 2$, assuming $V \setminus \bar{U}$ to be pseudoconcave in Andreotti's sense. We prove an Hartogs's Kugelsatz theorem for such open sets : Let U an open subset in V such that $V \setminus \bar{U}$ is a pseudoconcave domain in the sense of Andreotti. Then U contains a maximal compact hypersurface H. Moreover, any meromorphic section s, of a vector bundle F over V, defined on (a neighborhood of) $\partial \overset{0}{\overline{U}}$ extends on $U \setminus H$, and, if s is holomorphic then s extends meromorphically to U, with a polar set in H.

1 Introduction

Le but de notre article est de montrer l'existence d'un phénomène d'extension de Hartogs (Hartogs's Kugelsatz) pour certains ouverts de variété projective, ceux de complémentaire pseudoconcave au sens d'Andreotti [1]. Rappelons le phénomène de Hartogs : *Soient U un domaine de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, et K un compact de U, tel que $U \setminus K$ soit connexe. Alors $\mathcal{O}(U \setminus K) = \mathcal{O}(U)$.* Une preuve (voir [18], p. 237) repose essentiellement sur la nullité du groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ et le fait que le compact K est contenu dans une boule strictement convexe $B(o,r)$, pour r assez grand, ce que l'on interprète en disant que $(\mathbb{P}^n \setminus B(o,r) \subset\subset) \, \mathbb{P}^n \setminus K$ est un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti. Suivant le travail de A. Andreotti [1], si X est un ouvert pseudoconcave d'une variété projective V, de dimension $n \geq 2$, et F un fibré holomorphe au dessus de V, les sections méromorphes de F au dessus de X sont algébriques. Afin d'établir l'existence d'un phénomène de

Hartogs, nous montrons que les sections méromorphes de F au dessus de X, connexe, sont en fait rationnelles (Théorème 3.2.1). En conséquence :

Théorème. *Si U est un domaine de V telle que $V \setminus \bar{U}$ est un domaine pseudoconcave (au sens d'Andreotti), alors U contient une hypersurface compacte maximale H (éventuellement vide), les sections holomorphes de $F \to V$, fibré holomorphe sur V, définies au voisinage connexe du bord de U se prolongent méromorphiquement à U, holomorphiquement à $U \setminus H$.*

Ce résultat généralise ainsi, dans le cas holomorphe, le phénomène d'extension de Hartogs au cas des variétés projectives, on retrouve ainsi des théorèmes d'extension de Barth, Chow et Rossi.

Nous appliquons ensuite les résultats de [10] sur les enveloppes de méromorphies d'ouverts de variétés projectives pour montrer un phénomène d'extension de Hartogs pour les sections méromorphes :

Théorème. *Si U est un domaine de V telle que $V \setminus \bar{U}$ est un domaine pseudoconcave, les sections méromorphes de $F \to V$, fibré holomorphe sur V, définies au voisinage connexe du bord de U se prolongent méromorphiquement à U privée de H.*

Question : Se prolongent-elles méromorphiquement à U ?

Dans le cas des surfaces, on montre que si une hypersurface irréductible est de complémentaire pseudoconcave au sens d'Andreotti, alors elle se contracte en un point. Dans le cas où V est intersection complète, l'hypersurface H est vide $(n \geq 3)$ ou contractable $(n = 2)$. La question précédente a donc une réponse affirmative dans les cas précédents.

Une partie de cet article a été annoncée dans une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [11] et diffusée sous forme d'un preprint ([12]) de l'Université Pierre et Marie Curie.

Je tiens à remercier vivement G. Henkin et H. Skoda, pour leurs nombreux conseils et encouragements.
Je remercie aussi G. Jamet pour de nombreuses discussions instructives en géométrie algébrique.

2 Préliminaires

Convention : Dans la suite $V \hookrightarrow \mathbb{P}^k$ sera une variété projective de dimension $n \geq 2$. On notera $\mathcal{O}(1)$ la restriction du fibré hyperplan de $\mathbb{P}^k$.

2.1 L'enveloppe de méromorphie

2.1.1 Espaces étalés

Définition 1. Soit V une variété analytique. On appelle espace étalé au dessus de V un couple (Π, U) avec U un espace topologique séparé et $\Pi : U \to V$ un homéomorphisme local. On munira U de sa structure complexe naturelle induite par Π.

Il découle du théorème de Poincaré-Volterra qu'un espace étalé est naturellement muni d'une structure de variété dénombrable à l'infini. Un morphisme d'espaces étalés $j : (\Pi, U) \to (\Pi', U')$ est une application $j : U \to U'$ vérifiant $\Pi' \circ j = \Pi$. En particulier, un morphisme d'espaces étalés est une application localement homéomorphe. Si U est connexe, on dira que U est un domaine au dessus de V.

Soient (Π, U) un domaine étalé (au dessus de V variété), et $\mathcal{A} = \{f_\mu : U \to Y_\mu, \mu \in I\}$ une famille d'applications méromorphes (resp. holomorphes) f_μ à valeurs dans des espaces analytiques Y_μ. Un prolongement analytique simultané de $\mathcal{A}$ (au dessus de V relativement à Π) est un triplet $(\tilde{U}, \tilde{j}, \tilde{\mathcal{A}})$ avec $\tilde{U} = (\tilde{\Pi}, \tilde{U})$ un domaine au dessus de V, $\tilde{j}$ un morphisme de U dans $\tilde{U}$, $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{f}_\mu : \tilde{U} \to Y_\mu, \mu \in I\}$ une famille d'applications méromorphes (resp. holomorphes) telles que $f_\mu = \tilde{f}_\mu \circ \tilde{j}$. Un prolongement simultané $(\tilde{U}, \tilde{j}, \tilde{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{A}$ sera dit maximal si, pour tout prolongement simultané $(U', j', \mathcal{A}')$ de $\mathcal{A}$, il existe un morphisme $\tilde{j}' : U' \to \tilde{U}$ tel que $(\tilde{U}, \tilde{j}, \tilde{\mathcal{A}})$ prolonge $\mathcal{A}'$ et $\tilde{j} = \tilde{j}' \circ j'$. Un prolongement maximal est, s'il existe, unique à isomorphisme d'espaces étalés près.

Théorème 2.1.2 (voir [9,**?**]) *Sous les hypothèses précédentes, il existe un prolongement analytique simultané maximal de $\mathcal{A}$.*

Remarque 1 L'unicité à isomorphisme près du prolongement maximal de $\mathcal{A}$ (au dessus de V relativement à Π) nous autorise à l'appeler $\mathcal{A}-$enveloppe de U au dessus de V, ou bien enveloppe de U par rapport à $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des fonctions méromorphes sur U, on appellera ce prolongement maximal l'enveloppe de méromorphie de U (au dessus de V).

Définition 2. Un espace étalé (Π, U), au dessus d'une variété V, sera dit localement pseudoconvexe (noté l.pc) au dessus de V, s'il existe un recouvrement $\mathcal{W}$ de V par des ouverts W de Stein, tels que chaque composante connexe de $\Pi^{-1}(W)$ soit de Stein. Si U est connexe et localement pseudoconvexe au dessus de V, on dira que U est un domaine localement pseudoconvexe au dessus de V.

Théorème 2.1.3 (Corollaire du théorème de Levi [21])
Soit (Π, U) un domaine étalé au dessus d'une variété lisse V, alors son enveloppe de méromorphie au dessus de V est étalée localement pseudoconvexe au dessus de V.

Soit $\Pi : W \to V$ un espace étalé. Notons $E = \Pi^*\mathcal{O}(1)$ et $A(W) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(W, E^n)$ l'algèbre graduée des sections holomorphes, au dessus de W, des puissances de E.

Théorème 2.1.4 ([10]) *Si $\Pi : U \to V$ est un espace étalé l.pc au dessus de V et s'il s'injecte, $U \hookrightarrow U'$, en tant qu'espace étalé au dessus de V, dans un espace étalé l.pc au dessus de V, il existe un $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\epsilon \in]0,1]$, pour tout $l \geq l_0$, pour toute suite de points de U $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de limite $\lim_{i\in\mathbb{N}} p_i = p \in \partial_{U'}U$, la frontière topologique de U dans U', il existe une section $s \in H^0(U, \Pi^*\mathcal{O}(l))$ telle que*

$$\limsup |s(p_i)| = +\infty \quad \textit{et} \quad \int_U |s|^2 \min(\delta, d_\partial)^\epsilon \Pi^*\omega^n < +\infty$$

où $\delta > 0$ est indépendant de p et d_∂ désigne la distance au bord de U dans U'.
Il existe une section $s \in A(U)$, de croissance minimale, non prolongeable holomorphiquement au voisinage de tout point de $\partial_{U'}U$.

Ce théorème admet de nombreuses applications (voir [10]). Notons, en particulier, le théorème de comparaison suivant :

Soit $W \to V$, un espace étalé au dessus d'une variété projective V. Considérons $j_1 : W \to W_1$ l'enveloppe de méromorphie de W et $j_2 : W \to W_2$ le domaine d'existence holomorphe de $A(W)$. Une section de $E^l, l \in \mathbb{N}$, étant localement une fonction holomorphe, W_2 est étalé localement pseudoconvexe au dessus de V. On obtient un théorème du type Oka-Lévi :

Théorème 2.1.5 ([10])
Il existe une injection d'espace étalé $W_2 \hookrightarrow W_1$.
Via cette injection, $W_1 \setminus W_2 = H$ est une hypersurface complexe de W_1 (éventuellement vide).

En particulier, si W est un domaine d'une variété projective V, et $\tilde{W}$ un domaine de V contenant W, tel que toute $s \in H^0(W, \mathcal{O}(l)), l \in \mathbb{N}$,
se prolonge en une section holomorphe et univalente à $\tilde{W}$, alors toute fonction méromorphe sur W s'étend en une fonction méromorphe univalente à $\tilde{W}$.

2.2 L'espace pseudoconcave

Nous rappelons quelques faits fondamentaux sur les espaces pseudoconcaves au sens d'Andreotti (voir [1]) :

Définition 3. Soient Z un espace complexe et L une partie de Z; on appelle enveloppe (holomorphe) convexe $\widehat{L_Z}$ de L par rapport à Z l'ensemble

$$\widehat{L}_Z = \{x \in Z \ : |f(x)| \leq \sup_L |f|, \forall f \in \mathcal{O}(Z)\} \ .$$

Soient X un espace analytique complexe réduit irréductible, $Y \subset X$ un ouvert de X. Y est dit pseudoconcave au point $y_0 \in \partial Y$ (frontière topologique de Y dans X), s'il existe une base de voisinages ouverts $\{W\}$ en y_0, dans X, tel que y_0 soit un point intérieur des ensembles $\widehat{W \cap Y}_W$. On dira que X est pseudoconcave s'il existe un ouvert relativement compact $Y \subset\subset X$, pseudoconcave en tout point de sa frontière ∂Y.

Remarque 2 Dans la définition de la pseudoconcavité au sens d'Andreotti pour un espace analytique X, aucune hypothèse n'est faite sur la frontière de X. En particulier, un ouvert $X \hookrightarrow V$ d'une variété projective peut être pseudoconcave au sens d'Andreotti, à frontière localement pseudoconvexe : Considérons $\mu : \hat{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$ un éclatement de $\mathbb{P}^2$ en un point $o \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$, de diviseur exceptionnel $S = \mu^{-1}(o)$. Alors $\hat{\mathbb{P}}^2 \setminus S$ a un bord S localement pseudoconvexe vu comme ouvert de $\hat{\mathbb{P}}^2$, et $\mu^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus B_{\mathbb{C}^2}(o,r))$ est un ouvert à frontière pseudoconcave relativement compact dans $\hat{\mathbb{P}}^2 \setminus S$. En conclusion $\hat{\mathbb{P}}^2 \setminus S$ est pseudoconcave au sens d'Andreotti, à frontière localement pseudoconvexe *dans* $\hat{\mathbb{P}}^2$. La section 3.1 montre qu'essentiellement l'exemple ci-dessus est caractéristique.

Example 1

Lemme 2.2.1 *Soit M une variété complexe, et $(E,h) \to M$ un fibré hermitien de rang r, positif au sens de Griffiths. Soit $s \in H^0(M,E)$ une section holomorphe non nulle. Alors la fonction $-\log(h(s,s))$ est $r-$pseudoconvexe hors des zéros $C = (s = 0)$ de s. En particulier, si C est compact et $n - 1 \geq r$ alors C admet une base de voisinage à frontière pseudoconcave, en particulier C admet une base de voisinages pseudoconcaves au sens d'Andreotti.*

Preuve. Ce lemme est classique, un calcul explicite de la hessienne complexe de $-\log(h(s,s))$ est effectué dans [16]. □

Andreotti démontre alors le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.2.2 (Andreotti [1]) *Si X est un espace localement irréductible, irréductible et pseudoconcave, et si des fonctions méromorphes sur X sont analytiquement dépendantes alors elles sont algébriquement dépendantes sur X. En particulier, $\mathrm{trd}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(X) \leq \dim_{\mathbb{C}} X$.*

Considérons un espace pseudoconcave normal X plongé dans un espace projectif. D'après le théorème précédent, X est un ouvert d'un sous ensemble algébrique projectif V_1 (voir [1]). Passant à la normalisation V de V_1, qui est encore projectif, comme X est normal, il s'identifie à un ouvert de V.

3 Un phénomène d'extension de Hartogs

3.1 Versions géométriques du phénomène de Hartogs

Proposition 3.1.1 *Soient V une variété algébrique projective et X un ouvert localement pseudoconvexe dans V qui soit pseudoconcave au sens d'Andreotti. Alors la frontière topologique de X consiste en une réunion finie d'hypersurfaces algébriques et toute fonction méromorphe sur X est rationnelle.*

Preuve. D'après le Théorème 2.1.4, il existe une section de $\mathcal{O}(l)$ holomorphe au dessus de X, non prolongeable holomorphiquement au voisinage de tout point de la frontière de X. D'après le Théorème 2.2.2, cette section est algébrique, ce qui veut dire qu'elle se prolonge méromorphiquement (a priori multiforme) en une section algébrique au dessus de V. Ceci entraine que le lieu polaire de cette section est une hypersurface H. Donc le bord de X est une hypersurface. Les fonctions méromorphes sur X étant algébriques, elles se prolongent méromorphiquement à travers cette hypersurface. □

L'éclatement d'une variété projective le long d'un sous ensemble analytique de codimension supérieure à deux donne une classe d'exemples de domaines à la fois localement pseudoconvexes dans une variété projective et pseudoconcaves au sens de Andreotti.

Utilisant le fait que le complémentaire du support d'une famille d'hypersurfaces est localement pseudoconvexe, on retrouve un résultat de Andreotti et Tomassini [3] :

Corollaire 3.1.2 *Soit U un ouvert d'une variété projective V de complémentaire $V \setminus \overline{U}$ pseudoconcave. Alors U ne contient qu'un nombre fini d'hypersurfaces irréductibles à support compact dans U.*

Remarque 3
i. Soit H une hypersurface de $U \setminus \tilde{H}$ où $\tilde{H}$ est une hypersurface de V. Supposons que l'adhérence de H dans U soit un compact de U (H ne traverse pas le bord topologique de U). Alors H est algébrique : Il suffit de considérer à l'aide du théorème 2.1.4 une section de $H^0(V \setminus H \cup \tilde{H}, \mathcal{O}(l))$ (l assez grand) qui soit méromorphe le long de $H \cup \tilde{H}$, elle définit une fonction méromorphe sur le complémentaire de U, donc algébrique. En particulier son lieu polaire est algébrique.
ii. Le corollaire précédent donne une construction de variétés pseudoconcaves X n'admettant pas d'immersion dans un espace projectif bien que $\mathrm{trd}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(X) = \mathrm{dim}X$: Prenons un domaine pseudoconcave d'une variété projective, soit $Y \subset\subset X$ un ouvert relativement compact dans X à frontière pseudoconcave. Considérons une suite de points distincts de $X \setminus \overline{Y}$ sans point d'accumulation dans X et considérons la variété $\tilde{X}$ obtenue comme limite

des éclatements successifs de X en les points de la suite. Clairement $\tilde{X} \to X$ est une modification propre donc $\mathrm{trd}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(\tilde{X}) = \mathrm{dim}\tilde{X}$ mais $\tilde{X}$ ne peut être projectif car le complémentaire d'un voisinage de la partie pseudoconcave ($\simeq \overline{Y}$) de $\tilde{X}$ contient une infinité d'hypersurfaces.

Comme on l'a vu, si V est une variété projective, et H une hypersurface de V telle que $V \setminus H$ est pseudoconcave au sens d'Andreotti, alors H est soumise à de fortes contraintes. En particulier, d'après le Théorème 1 d'Andreotti [1], on a :

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sans torsion sur $V \setminus H$ alors, la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des sections de $\mathcal{F}$ est finie, $\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}H^0(V \setminus H, \mathcal{F}) < +\infty$.

De plus, d'après la proposition précédente, il existe un voisinage W de H tel que H n'admet pas de voisinages strictement pseudoconcaves ou Levi-plats dans W, H est l'unique hypersurface à support compact contenue dans W. La proposition suivante illustre les considérations précédentes :

Proposition 3.1.3 *Soient V une variété projective de dimension 2 et C une courbe de V telle que $V \setminus C$ est pseudoconcave au sens d'Andreotti. Alors C est exceptionnelle.*

Preuve. On peut supposer C irréductible. D'après le critère de Grauert [13, 5], il suffit de montrer que $[C]^2 < 0$ où l'on note $[C]$ la classe de Chern du fibré associé au diviseur C que l'on notera aussi $[C]$.
Dans la suite, si $L \to V$ et $L' \to V$ sont des fibrés en droites au dessus de V, on notera $L.L'$ le nombre d'intersection de L et L'. On notera K le fibré canonique de V, et $\chi(L)$ la caractéristique d'Euler–Poincaré du fibré L. C'est à dire, posant $h^i(L) = \mathrm{dim}H^i(V, L),\ i = 0, 1, 2$, on a $\chi(L) = h^0(L) - h^1(L) + h^2(L)$. La formule de Riemann–Roch s'écrit alors (voir [15] p.472) :

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_V) + \frac{L.L - L.K}{2}$$

Supposons $[C]^2 \geq 0$. Appliquant la formule de Riemann–Roch pour le fibré $[nC]$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$h^0([nC]) + h^2([nC]) \geq \chi(\mathcal{O}_V) + \dfrac{n^2[C]^2 - n[C].K}{2}.$

Mais $h^0([nC]) = 1$ car $V \setminus C$ n'admet pas de fonctions holomorphes non constantes et, par dualité de Serre,
$h^2([nC]) = h^0(K - n[C]) \leq \mathrm{dim}H^0(V \setminus C, K)$ indépendant de n (cette inégalité étant obtenue par restriction à $V \setminus C$). Donc $[C]^2 = 0$ et $[C].K \geq 0$.
Appliquant la formule de Riemann-Roch pour le fibré $-n[C]$, on obtient
$h^0(-n[C]) + h^2(-n[C]) \geq \chi(\mathcal{O}_V) + \dfrac{n[C].K}{2}$ car $[C]^2 = 0$.

Mais $h^0(-n[C]) = 0$ et par dualité de Serre
$h^2(-n[C]) = h^0(K + n[C]) \leq \mathrm{dim}H^0(V \setminus C, K)$ indépendant de n.
Donc $[C].K \leq 0$. On en déduit $[C].K = 0$.

Considérons maintenant un fibré en droites trés ample $L \to V$ au dessus de V, appliquant la formule de Riemann-Roch au fibré $L + r[C]$, $r \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\chi(L + r[C]) = \chi(\mathcal{O}_V) + \frac{(L + r[C])^2 - (L + r[C]).K}{2}$$

$$h^0(L + r[C]) + h^2(L + r[C]) \geq \chi(\mathcal{O}_V) + \frac{L^2 + 2rL.[C] - L.K}{2}$$

$$\mathrm{dim}H^0(V \setminus C, L) + \mathrm{dim}H^0(V \setminus C, K - L) \geq$$

$$\chi(\mathcal{O}_V) + \frac{L^2 + 2rL.[C] - L.K}{2}.$$

La dernière inégalité est obtenue par restriction, via la dualité de Serre. En particulier, prenant $r \to +\infty$, on obtient $L.[C] = 0$ ce qui est faux.
En conclusion, il est nécessaire que $[C]^2 < 0$, donc C se contracte en un point. □

3.2 Le phénomène de Hartogs

Rappelons le théorème de Hartogs (Hartogs's Kugelsatz) dans $\mathbb{C}^n$ (voir [18] p.237) :

Soit $n \geq 2$, et soit K un ensemble compact d'un domaine U de $\mathbb{C}^n$ tel que $U \setminus K$ soit connexe. Alors toute fonction holomorphe sur $U \setminus K$ se prolonge holomorphiquement à U.

Le but de cette section est de généraliser ce théorème pour certains ouverts d'une variété projective. Notre démonstration suit un schéma classique : on montre d'abord l'élimination de certaines singularités compactes K pour les fonctions définies sur $V \setminus K$ puis l'élimination de ces singularités pour les fonctions définies seulement au voisinage de ∂K, ceci via un argument cohomologique élémentaire.

Théorème 3.2.1 *Soit V un ensemble analytique normal compact projectif. Soit $X \subset V$ un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti. Alors toute fonction méromorphe sur X est rationnelle.*

Preuve. Ce théorème est un corollaire d'un résultat plus général, dont la preuve, du fait de sa longueur, sera donnée dans la section 4.

Corollaire 3.2.2 *Soient V_1 et V_2 deux variétés algébriques projectives. Soient $X_1 \subset V_1$ et $X_2 \subset V_2$ des domaines pseudoconcaves. Soit $\Gamma : X_1 \to X_2$ une application méromorphe (au sens de Remmert, voir* [2] p.75*) alors Γ est rationnelle au sens suivant : le graphe de Γ est inclu dans un unique sous-ensemble analytique G de $V_1 \times V_2$ qui définit une application rationnelle $\tilde{\Gamma} : V_1 \to V_2$. De plus, si Γ est biméromorphe alors $\tilde{\Gamma}$ est birationnelle.*

Preuve. 1) Nous reprenons un argument de [1]. Notons $\Pi_i : V_1 \times V_2 \to V_i$ la projection naturelle. Soit $G \subset X_1 \times X_2$ le graphe de Γ. Nous noterons encore Π_1 la restriction de Π_1 à G. Soit $\tilde{G}$ le plus petit sous-ensemble analytique de $V_1 \times V_2$ qui contient G. Alors $\tilde{G}$ est irréductible. De plus $\mathcal{M}(\tilde{G}) \to \mathcal{M}(G)$, induit par restriction à G, est injective. Notant que $\Pi_1 : G \to X_1$ est une modification propre, on a $\mathcal{M}(G) \simeq \mathcal{M}(X_1) \simeq \mathcal{M}(V_1)$. On a donc : $\dim\tilde{G} = \mathrm{trd}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(\tilde{G}) \leq \mathrm{trd}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(G) = \dim G \leq \dim\tilde{G}$. G se réalise comme un ouvert de $\tilde{G}$. Considérons maintenant $\Pi : \tilde{G} \to V_1$ la restriction de Π_1 à $\tilde{G}$. Π est propre et surjective. On a

$$1 = [\mathcal{M}(G) : \Pi^*\mathcal{M}(V_1)] = [\mathcal{M}(G) : \mathcal{M}(\tilde{G})][\mathcal{M}(\tilde{G}) : \Pi^*\mathcal{M}(V_1)].$$

Donc, $[\mathcal{M}(\tilde{G}) : \Pi^*\mathcal{M}(V_1)] = 1$, ce qui entraine que $\Pi : \tilde{G} \to V_1$ est birationnelle. On définit le prolongement de Γ par $\tilde{\Gamma} = \Pi_2\Pi^{-1}$.

2) La seconde assertion découle alors : avec les notations précédentes, comme $\dim V_1 = \dim V_2$, $\Pi_2 : \tilde{G} \to V_2$ est propre et son image contient l'ensemble $\Gamma(X_1)$ non mince, $\tilde{\Gamma}$ est surjective. Notant que $\mathcal{M}(X_2) \simeq \mathcal{M}(V_2)$, on a

$$1 = [\mathcal{M}(G) : \Pi_2^*\mathcal{M}(V_2)] = [\mathcal{M}(G) : \mathcal{M}(\tilde{G})][\mathcal{M}(\tilde{G}) : \Pi^*\mathcal{M}(V_2)].$$

Donc $\Pi_2 : \tilde{G} \to V_2$ est biméromorphe. □

Remarque 4
i. Ce corollaire est valide dans le cas des espaces analytiques normaux.

Corollaire 3.2.3 *Soient $F \to V$ un fibré holomorphe au dessus d'une variété projective V, $X \subset V$ un domaine pseudoconcave et $s \in \mathcal{M}(X, F)$ une section méromorphe de F au dessus de X.*
Alors s se prolonge méromorphiquement à V.

Preuve. On considère une compactification de F donnée par :

$$\begin{aligned} F &\hookrightarrow \mathbb{P}(F \oplus \mathcal{O}_V) \\ \xi &\to (\xi : 1) \end{aligned}$$

On sait que $\mathbb{P}(F \oplus \mathcal{O}_V)$ admet un plongement dans un espace projectif. Dire que $s \in \mathcal{M}(X, F)$ est équivalent à dire que s définit une application méromorphe de X dans $\mathbb{P}(F \oplus \mathcal{O}_V)$. On applique le Corollaire précédent pour conclure. □

Remarque 5 Les singularités éventuelles, apparaissant lors du prolongement, sont le long de H, l'hypersurface compacte maximal à support dans $V \setminus \overline{X}$.

Théorème 3.2.4 *Soit V une variété algébrique projective de dimension $n \geq 2$. Soit U un domaine dans V tel que $X = V \setminus \overline{U}$ soit un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti. Notons H la réunion finie des hypersurfaces à support compact dans U. Supposons que le bord de U est connexe. Soit $F \to V$ un fibré vectoriel holomorphe au dessus de V. Alors toute section méromorphe s de F définie au voisinage du bord topologique de U dans V s'étend méromorphiquement dans $U \setminus H$. Si de plus s est holomorphe, alors elle s'étend méromorphiquement à U, de pôles éventuels contenus dans H.*

Preuve. Comme F admet une compactification plongeable dans un espace projectif, il suffit de montrer le théorème pour les fonctions méromorphes définies au voisinage du bord de U. Soit W un voisinage connexe du bord topologique de U dans V tel que $U \setminus W$ est non vide. Soit $\Pi : \hat{W} \to V$ son enveloppe de méromorphie au dessus de V. Alors W s'injecte dans son enveloppe. Notons E le fibré hyperplan, on notera de la même façon le fibré image réciproque de E par Π au dessus de $\hat{W}$.

Montrons d'abord que toute section holomorphe $s \in H^0(W, E^l)$ s'étend méromorphiquement à U. On suit en cela la démonstration classique du théorème de Hartogs.

Rappelons quelques faits cohomologiques ([18],proposition 50.10 p. 219) : Soit T un espace topologique paracompact, $\mathcal{R}$ un faisceau d'anneaux sur T et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{R}-$modules. Soit $H^1(T, \mathcal{F})$ le premier groupe de cohomologie de Čech, $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de T et $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ le premier groupe de cohomologie de Čech associé à $\mathcal{U}$.
Alors l'application naturelle $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(T, \mathcal{F})$ est injective.

Fixons maintenant un entier l_0 de sorte que pour tout entier $l \geq l_0$, on ait $H^1(V, E^l) = 0$. Choisissons une section $t \in H^0(V, E^{l_0}) \setminus \{0\}$. Soit $s \in H^0(W, E^l)$, et $ts \in H^0(W, E^{l_0+l})$. Soit $U_1 = U \cup W$ et $U_2 = (V \setminus \overline{U}) \cup W$ et écrivons $W = U_1 \cap U_2$. Les considérations cohomologiques ci-dessus, ainsi que l'annulation de $H^1(V, E^{l_0+l})$, entrainent qu'il existe $s_1 \in H^0(U_1, E^{l_0+l})$ et $s_2 \in H^0(U_2, E^{l_0+l})$ de sorte que $ts = s_1 - s_2$ sur W. Comme U_2 est pseudoconcave au sens d'Andreotti, d'après le Théorème 3.2.1, s_2 admet un prolongement méromorphe à toute la variété V, en particulier, ts admet un prolongement méromorphe à U. Donc s admet un prolongement méromorphe à U.

Maintenant, U ne contient qu'un nombre fini d'hypersurfaces irréductibles compactes à support dans $U \setminus W$, notons les $H_1, ..., H_t$. Les sections se prolongent holomorphiquement à $U \setminus \{H_1 \cup ... \cup H_t\}$. En particulier, le domaine d'existence holomorphe des sections de $H^0(W, \mathcal{O}(l))$, $l \in \mathbb{N}$, contient un ouvert biholomorphe à $W \cup U \setminus \{H_1 \cup ... \cup H_t\}$. Le Théorème 2.1.5 montre que l'enveloppe de méromorphie de W contient un ouvert biholomorphe à $W \cup U \setminus \{H_1 \cup ... \cup H_t\}$. Les biholomorphismes envisagés commutant avec l'injection canonique de W dans ses différentes enveloppes, les fonctions méromorphes de W se prolongent en fonctions méromorphes sur $W \cup U \setminus \{H_1 \cup ... \cup H_t\}$. □

Dans le cas des surfaces on obtient :

Corollaire 3.2.5 *Soient V une surface projective et U un domaine de V tels que $V \setminus \overline{U}$ soit un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti et ∂U soit connexe. Alors toute section méromorphe, de $F \to V$, fibré holomorphe au dessus de V, définie au voisinage du bord de U se prolonge méromorphiquement à U.*

Donnons une autre version du Théorème précédent :

Théorème 3.2.6 *Soit V une variété projective de dimension supérieure à deux et X un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti dans V. Alors toute section méromorphe, de $F \to V$, fibré holomorphe au dessus de V, définie au voisinage de $\partial(V \setminus \overline{X})$ se prolonge méromorphiquement à $(V \setminus \overline{X}) \setminus H$ où H désigne l'hypersurface compacte maximale de $V \setminus \overline{X}$.*

Preuve. Notons $V \setminus \overline{X} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ la décomposition en composantes connexes de $V \setminus \overline{X}$. Considérons la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(V, \mathcal{O}) \to H^0(\overline{X}, \mathcal{O}) \\ &\to H^1_{\text{comp}}(V \setminus \overline{X}, \mathcal{O}) \to H^1(V, \mathcal{O}) \to H^1(\overline{X}, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

où $H^1_{\text{comp}}(V \setminus \overline{X}, \mathcal{O})$ désigne la cohomologie à support compact. D'après la Proposition 3 de [3], la dernière flèche est injective car $\overline{X}$ est connexe et X contient un ouvert relativement compact à frontière pseudoconcave. Comme $\overline{X}$ est connexe, $\mathbb{C} = H^0(V, \mathcal{O}) = H^0(\overline{X}, \mathcal{O})$, on déduit que $H^1_{\text{comp}}(V \setminus \overline{X}, \mathcal{O}) = 0$. En particulier chaque composante connexe U_α est à frontière topologique ∂U_α connexe.

Soit W un voisinage de $\partial(V \setminus \overline{X})$. Alors W est un voisinage de ∂U_α, celle-ci étant connexe, on peut choisir, pour chaque $\alpha \in \Lambda$ un voisinage W_α de ∂U_α qui soit connexe, relativement compact dans W et tel que $U_\alpha \setminus W_\alpha \neq \emptyset$. Notons que $V \setminus U_\alpha$ est connexe, pour tout $\alpha \in \Lambda$ (on peut le voir en considérant la suite exacte $0 \to H^0(V, \mathcal{O}) \to H^0(V \setminus U_\alpha, \mathcal{O}) \to H^1_{\text{comp}}(U_\alpha, \mathcal{O}) = 0$).

L'ouvert $(V \setminus U_\alpha) \cup W_\alpha$ est connexe, pseudoconcave. L'ouvert $U_\alpha \cup W_\alpha$ est connexe. On a $W_\alpha = ((V \setminus U_\alpha) \cup W_\alpha) \cap (U_\alpha \cup W_\alpha)$. Reprenant l'argument de la preuve du Théorème 3.2.4, on conclut que chaque fonction méromorphe sur W_α se prolonge méromorphiquement à $(U_\alpha \cup W_\alpha) \setminus H_\alpha$ où H_α désigne l'hypersurface compacte maximale à support dans $U_\alpha \setminus W_\alpha$. On déduit, comme $U_\alpha \cap U_{\alpha'} = \emptyset$ pour $\alpha \neq \alpha'$, que toute fonction méromorphe définie sur W se prolonge à $(V \setminus \overline{X}) \setminus H'$ où H' désigne l'hypersurface maximale compacte de $(V \setminus \overline{X}) \cup W$.

Remarque 6
i. La preuve du théorème ci-dessus nous montre que les sections holomorphes se prolongent holomorphiquement jusqu'à $U \setminus H$, méromorphiquement à U.
En particulier les fonctions méromorphes qui s'écrivent comme quotient de sections holomorphes se prolongent méromorphiquement à U.
ii. Soient V une variété projective de dimension supérieure à deux et U un ouvert de V tel que $V \setminus \overline{U}$ soit un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti et $\overset{\circ}{\overline{U}} = U$. De la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(V, \mathcal{O}) \to H^0(V \setminus U, \mathcal{O}) \\ &\to H^1_{\mathrm{comp}}(U, \mathcal{O}) \to H^1(V, \mathcal{O}) \to H^1(V \setminus U, \mathcal{O}) \ , \end{aligned}$$

comme $V \setminus U = \overline{V \setminus \overline{U}}$ est connexe, on déduit que la dernière flèche est injective car $V \setminus \overline{U}$ est un domaine pseudoconcave.
De même $\mathbb{C} = H^0(V, \mathcal{O}) = H^0(V \setminus \overline{U}, \mathcal{O})$. On déduit que chaque composante connexe de U est à bord connexe. On obtient alors un phénomène d'extension de Hartogs comme précédemment.
iii. Nos résultats s'étendent au cas des variétés de Moishezon. Indiquons un résultat pour des fonctions méromorphes :

Théorème 3.2.7 *Soit V une variété de Moishezon de dimension $n \geq 2$. Soit U un domaine dans V tel que $X = V \setminus \overline{U}$ soit un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti. Alors U contient une hypersurface compacte maximale H. Supposons que le bord de U est connexe. Alors toute fonction méromorphe définie au voisinage du bord topologique de U dans V s'étend méromorphiquement dans $U \setminus H$.*

Example 2
i. Si V est une *variété infinitésimalement homogène* (c'est à dire que son fibré tangent est engendré), alors il n'existe pas d'hypersurface dans V de complémentaire pseudoconcave. En effet, d'après Hirschowitz [17], sur de telles variétés, tout domaine localement pseudoconvexe univalent admet une fonction plurisousharmonique exhaustive.
ii. D'après Kodaira [19], il résulte des théorèmes de Lefschetz qu'*il n'existe pas, sur une intersection complète de dimension $n \geq 3$, de diviseur effectif de complémentaire pseudoconcave* (voir le Théorème 2.2.6 de [19]).

Le lemme 2 de [3] donne une condition simple pour que le complémentaire d'un domaine pseudoconcave ne contienne pas d'hypersurfaces.
Du théorème précédent, on retrouve des résultats de Chow [8], Barth [4], Rossi [24] :

Corollaire 3.2.8 *Soit V une variété projective et C un sous-ensemble analytique de V de dimension positive qui soit géométriquement intersection complète. Alors toute fonction méromorphes définie sur un voisinage connexe W de C est rationnelle. Si de plus le bord de W est connexe alors toute fonction méromorphes définie au voisinage connexe du bord de W se prolonge méromorphiquement à $V \setminus W$.*

Preuve. L'hypothèse sur C signifie qu'il existe $k = \mathrm{codim}_V C$ sections $s_1, ..., s_k$ du fibré $\mathcal{O}(l)$ telle qu'ensemblistement on ait $C = \{s_1 = 0, ..., s_k = 0\} \cap V$. On considére $(s_1, ..., s_k)_{|V}$ comme section du fibré $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{O}(l)_{|V}$, de rang k, qui est positif au sens de Griffiths. En particulier, comme $k = \mathrm{codim}_V C \leq n-1$, la fonction, définie sur $V \setminus C$, $\psi = -\log(|s_1|^2 + ... + |s_r|^2)$ est $k-$convexe exhaustive sur $V \setminus C$ d'après le Lemme 2.2.1, les ensembles $\{p \in V \setminus C : \psi(p) > c\}$ donnent une base de voisinages pseudoconcaves de C. Notons que $V \setminus C$ ne contient pas d'hypersurface compacte d'après le Lemme de 2 de [3]. On conclut à l'aide du théorème précédent. □

4 Preuve du théorème 3.2.1

Dans cette section nous donnons une démonstration complète du théorème suivant :

Théorème. *Soit $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ un ensemble analytique normal projectif. Soit $U \subset V$ un ouvert tel que $\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}$. Alors toute fonction méromorphe sur U qui est algébrique sur $\mathcal{M}(V)$ est rationnelle.*

Remarque 7
i. Si U est pseudoconcave au sens d'Andreotti, d'après Andreotti [1], $\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}$ et toute fonction méromorphe sur U est algébrique, on en déduit le Théorème 3.2.1.
ii. Si U est un ouvert $1-$concave à bord lisse dans une variété projective lisse V, le théorème peut se démontrer comme suit. Toute fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(U)$ se représente comme quotient de deux sections $s, t \in H^0(U, \mathcal{O}(l))$ pour l assez grand. Henkin et Marinescu (voir [22]) ont démontré que si Y est une variété $1-$convexe à bord lisse plongée dans un espace projectif et l est assez grand, toute section $n \in H^0(\partial Y, \mathcal{O}(l))$ se prolonge en une section méromorphe $\tilde{n} \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{O}(l))$. La démonstration de ce résultat utilise l'idée de Kohn-Rossi[20] et l'estimation $\mathrm{dim} H^1_{\mathrm{comp}}(Y, \mathcal{O}(l) = o(\mathrm{dim} H^0(Y, \mathcal{O}(l)))$
obtenue par Bouche [6]. On applique alors le résultat à $Y = V \setminus X$ pour conclure.

iii. Nous avions annoncé ce théorème dans [11]. Puisque la démonstration de [11] est incomplète, nous donnons ici une démonstration complète.

Indiquons les idées de la démonstration.

Si $f \in \mathcal{M}(U)$ est algébrique, on lui associe naturellement un revêtement ramifié de V ayant une section au dessus de U. U étant "grand" dans V, on veut en déduire que ce revêtement est à un feuillet.

Comme toute fonction méromorphe définie au voisinage de U dans $\mathbb{P}^n$ est rationnelle (cf Lemme 4.4.1), on cherche à étendre cette fonction au voisinage de U dans $\mathbb{P}^n$. Pour cela, on étend le revêtement ramifié de V, associé à f, en un revêtement ramifié $g_0 : Z \to \mathbb{P}^n$, ayant une section σ_0 le long de U. On note (voir 4.1) que si le diviseur des points critiques de g_0 est transverse à U, alors g_0 est non ramifié au voisinage de l'image de la section σ_0. Il suffit donc d'étendre le revêtement de V vers $\mathbb{P}^n$ de sorte à ce que le diviseur des points critiques de g_0 soit transverse à V, c'est ce que nous faisons dans la Partie 4.2.

4.1 Lemmes clés

Si h est une fonction holomorphe sur une variété M et si $p \in M$, on notera $\mathrm{ord}_p h$ l'ordre d'annulation de la fonction en p.

Lemme 4.1.1 *Soit*

$$\begin{aligned} &\Pi : \mathbb{C}^n_{0,z} \to \mathbb{C}^n_{0,y} \\ &z = (z_1, ..., z_n) \mapsto \Pi(z) = (z_1, ..., z_n^e) = y = (y_1, ..., y_n) \end{aligned}$$

avec $e \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Soient* $V_{0,y}$ *un germe de sous variété lisse en* $0 \in \mathbb{C}^n_{0,y}$ *et* $i : V_{0,y} \hookrightarrow \mathbb{C}^n_{0,y}$ *l'injection canonique. Supposons* $y_n \circ i$ *non identiquement nulle. Soit* $\sigma : V_{0,y} \to \mathbb{C}^n_{0,z}$ *une section du revêtement ramifié* Π.

Alors $e \le \mathrm{ord}_0(y_n \circ i)$. *En particulier, si* $(y_n = 0)$ *est transverse à* $V_{0,y}$ *en* 0 *alors le revêtement est non ramifié biholomorphe.*

Preuve. Pour $p \in V_{0,y}$, notant $\sigma(p) = (\sigma_1(p), ..., \sigma_n(p))$, on a $(\sigma_1(p), ..., \sigma_n^e(p)) = (y_1(p), ..., y_n(p))$ donc $\sigma_n^e(p) = y_n(p)$.

D'où $e \le \mathrm{ord}_0 \sigma_n^e = \mathrm{ord}_0 y_n \circ i$. □

Afin d'utiliser ce lemme notons :

Théorème 4.1.2 ([23] th.1.1.8) *Soient* X *un espace analytique normal,* M *une variété lisse et* $\Pi : X \to M$ *un revêtement analytique ramifié d'ensemble critique* B *(projection du lieu de ramification). Soit* P *un point régulier de* B. *Alors tout point* $Q \in \Pi^{-1}(P)$ *est régulier à la fois pour* X *et* $\Pi^{-1}(B)$. *De plus, si* W *est un voisinage connexe assez petit de* P *muni d'un* *système de coordonnées* $y = (y_1, ..., y_n)$*, centré en* P*, tels que* $B \cap W = \{y \in W/\ y_n = 0\}$*, il existe un système de coordonnées* $z = (z_1, ..., z_n)$ *dans la composante connexe* U *de* $\Pi^{-1}(W)$ *qui contient* Q*, centré en* Q*, et un entier* $e > 0$ *tels que* $\Pi_{|U} : U \ni z \mapsto y = (z_1, ..., z_n^e) \in W$*.*

4.2 Extensions avec discriminant prescrit

1) Faisons quelques rappels sur le résultant (voir par exemple [7]) :

Soient $u_0, ..., u_n$ et $v_0, ..., v_n$ $m + n + 2$ indéterminées sur $\mathbb{Z}$ et notons $R(u_i, v_j)$ le resultant, c'est à dire le déterminant de la matrice de Sylvester associée aux indéterminées $u_i,\ v_j$. Alors $R(u_i, v_j) \in \mathbb{Z}[u_i, v_j]$ et on a les faits suivants :

a) $R(u_i, v_j)$ est homogène de degré $m + n$. C'est à dire que si Y est une autre indéterminée sur $\mathbb{Z}$, on a $R(Yu_i, Yv_j) = Y^{m+n}R(u_i, v_j)$.

b) $R(u_i, v_j)$ est isobare de poids mn. C'est à dire que pour tout monôme non nul $M = c.u_0^{\alpha_0}u_1^{\alpha_1}...v_0^{\beta_0}...v_m^{\beta_m},\ c \in \mathbb{Z}$, apparaissant dans la décomposition de $R(u_i, v_j)$ dans la base canonique de $\mathbb{Z}[u_i, v_j]$, le poids $w(M) = \sum_{i=0}^{n} i\alpha_i + \sum_{j=0}^{m} j\beta_j$ est indépendant du monôme et vaut mn. Donc, si Y est une indéterminée sur $\mathbb{Z}$, alors $R(Y^iu_i,\ Y^jv_j) = Y^{mn}R(u_i, v_j)$.

c) Soient S_1 et S_2 deux anneaux commutatifs, et $\theta : S_1 \to S_2$ un morphisme d'anneaux. Spécialisant les indéterminées, pour tout $u_i,\ v_j \in S_1$, $R(\theta(u_i),\ \theta(v_j)) = \theta(R(u_i,\ v_j))$.

2) Comme U est normal, toute fonction méromorphe sur U qui est algébrique sur $\mathcal{M}(V)$ s'écrit comme quotient de deux sections holomorphes sur U du fibré $\mathcal{O}_U(l)$ pour $l \in \mathbb{N}$ assez grand. Il suffit donc de montrer que toute section $s \in H^0(U, \mathcal{O}_U(l))$ entière sur l'anneau $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^0(V, \mathcal{O}_V(n))$ s'étend méromorphiquement à V :

Soit $s \in H^0(U, \mathcal{O}_V(l)) \setminus \{0\}$ telle qu'il existe $k + 1$ sections $a_i \in H^0(V, \mathcal{O}_V(p + il))$, $i = 0, ..., k$, pour un certain $p \in \mathbb{N}$, vérifiant

$$a_0s^k + ... + a_is^{k-i} + ... + a_k \equiv 0$$

sur U et $a_0 \not\equiv 0$. C'est à dire que s est entière sur l'anneau gradué des sections holomorphes des puissances de $\mathcal{O}(1)_V$. On suppose de plus que k est minimal pour cette propriété. Supposons $k \geq 1$.

Dans cette partie, nous construisons des extensions $\tilde{a}_i$ sur $\mathbb{P}^n$ des coefficients a_i, de sorte que le revêtement ramifié de $\mathbb{P}^n$, défini par le polynôme $\tilde{a}_0X^k + ... + \tilde{a}_iX^{k-i} + ... + \tilde{a}_k$, ait un lieu critique génériquement transverse à V.

Dans la suite, si $P(X) = \sum_{i=0}^{k} r_i X^{k-i}$ est un polynôme à coefficients dans un anneau R, on notera Δr_i le discriminant de P, *i.e.* le résultant de P et $\frac{\partial P}{\partial X}$.

Avec les notations ci-dessus, $\Delta a_i \in H^0(V, \mathcal{O}_V(lk(k-1)+p(2k-1)))$. De plus, comme k est supposé minimal, Δa_i est non identiquement nul.

Soit $(\Delta a_i = 0) = \sum_{j=1}^{d} r_j D_j$ la décomposition en branches irréductibles, avec multiplicité, du diviseur de la section Δa_i. Choisissons, pour chaque $j = 1, ..., d$, un point $P_j \in \mathrm{Reg} D_j \setminus \bigcup_{\alpha \neq j} D_\alpha \cup \mathrm{Sing} V$.

Choisissons un point p_0 dans $U \setminus (\Delta a_i = 0) \cup \mathrm{Sing} V$.

Dans la suite, $t \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m))$ (m sera fixé ultérieurement) désignera une section holomorphe telle que :

i) $(t = 0)$ est lisse sans composante multiple

ii)$(t = 0)$ est transverse à V, $(t = 0) \cap V$ est lisse, irréductible, sans composante multiple

iii) (t=0) contient P_0, ne contient aucun des autres points $P_j,\ j \geq 1$, en particulier $(t = 0)$ ne contient aucune des branches irréductibles de $(\Delta a_i = 0)$.

Notant encore t la section $t_{|V}$, on a alors

$$t^{k+1} \sum_{i=0}^{k} a_i s^{k-i} \equiv 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{k} t^{i+1} a_i (ts)^{k-i} \equiv 0$$

avec $t^{i+1} a_i \in H^0(V, \mathcal{O}_V(p + m + i(l + m))$ et, des propriétés du résultant, on a

$$\Delta t^{i+1} a_i = t^{2k-1+k(k-1)} \Delta a_i \ .$$

Notant $r_0 = 2k - 1 + k(k - 1)$ et $D_0 = (t = 0) \cap V$ alors

$$(\Delta t^{i+1} a_i = 0) = r_0 (t = 0) + \sum_{j=1}^{d} r_j D_j$$

avec r_0 et les $r_j,\ j \geq 1$, indépendant de t.

Soit $\mathcal{I}_V$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ des germes de fonctions holomorphes nulles sur V et, pour tout $P \in \mathbb{P}^n$, m_P l'idéal des germes de fonctions holomorphes nulles en P.

Définissons un faisceau analytique cohérent $\mathcal{A}$ par la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{I}_V \to \bigoplus_{j=0}^{d} \frac{\mathcal{I}_V}{\mathcal{I}_V \cap \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1}} \to 0$$

Soit $u_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(u)) = H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}(u)) = 0$ pour tout $u \geq u_0$, de sorte que

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}(u)) \to \bigoplus_{j=0}^{d} \frac{\mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}(u)}{\mathcal{I}_V \cap \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1} \otimes \mathcal{O}(u)}$$

et

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(U)) \to H^0(V, \mathcal{O}_V(u))$$

sont surjectives.

Soit m tel que $m + p \geq u_0$ et $\widehat{t^{i+1}a_i} \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(p + m + i(l + m)))$ des extensions arbitraires des $t^{i+1}a_i$.

Soit $W_j,\ j = 0, ..., d$, un voisinage de P_j dans $\mathbb{P}^n$ tels que $W_j \cap W_{j'} = \emptyset$ pour $j \neq j'$ et tels que chaque W_j soit muni d'un système de coordonnées centré en P_j que nous noterons $z = (z_1, ..., z_n)$ indépendamment de j. On supposera de plus que $V \cap W_j = (z_1 = ... = z_q = 0)$ dans chaque système de coordonnées, où q est la codimension de V dans $\mathbb{P}^n$. On notera alors $z' = (z_{q+1}, ..., z_n)$, que l'on prendra comme système de coordonnées sur $W_j \cap V$.

Pour tout $j = 0, ..., d$, soit $e \in H^0(W_j, \mathcal{O}(1))$ une section holomorphe non nulle sur W_j (existe si W_j est assez petit). On notera encore e la restriction de e à $W_j \cap V$. Dans la suite, si $\alpha \in H^0(W_j, \mathcal{O}(r))$, on notera $\underline{\alpha} \in \mathcal{O}(W_j)$ l'unique fonction holomorphe telle que $\alpha = \underline{\alpha} e^{\otimes r}$. De même pour une section sur $W_j \cap V$. En particulier :

$$\begin{aligned} \Delta t^{i+1}a_i &= \Delta e^{\otimes p+m+i(l+m)} \underline{t^{i+1}a_i} \\ &= e^{\otimes(2k-1)(p+m)} \underline{\Delta e^{\otimes i(l+m)} t^{i+1}a_i} \\ &= e^{\otimes \nu} \underline{\Delta t^{i+1}a_i} \end{aligned}$$

avec $\nu = (p + m)(2k - 1) + (l + m)k(k - 1)$.

Soit $\Pi_j : W_j \to W_j \cap V$ définie par $\Pi_j(z) = z'$. Comme D_j est lisse au voisinage de P_j dans V, il existe une forme linéaire L_j des coordonnées z' telle que $(L_j(z') = 0) = T_{P_j}(D_j)$, où $T_{P_j}(D_j)$ désigne l'hyperplan tangent de D_j en P_j. On choisira alors cette forme linéaire de sorte que $\underline{\Delta t^{i+1}a_i} = L_j^{r_j} \mod \mathrm{m}_{P_j,V}^{r_j+1}$ (où $\mathrm{m}_{P_j,V}$ désigne l'idéal des germes des fonctions holomorphes, sur V, nulles en P_j). C'est à dire que le premier terme non nul dans le développement en polynômes homogènes de $\underline{\Delta t^{i+1}a_i}$ des

variables $z_{q+1}, ..., z_n$ est $L_j^{r_j}$. Considérons sur W_j les extensions $L_j \circ \Pi_j$, $(t^{i+1}a_i) \circ \Pi_j$ et $(\Delta t^{i+1}a_i) \circ \Pi_j = \Delta(t^{i+1}a_i) \circ \Pi_j$.
Notons que $\widehat{t^{i+1}a_i} - (t^{i+1}a_i) \circ \Pi_j \in (\mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}(\beta(i)))\,(W_j)$, avec $\beta(i) = p + m + i(l+m)$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\Delta(t^{i+1}a_i) \circ \Pi_j &= e^{\otimes\nu}\Delta(\underline{t^{i+1}a_i}) \circ \Pi_j \mod \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1} \otimes \mathcal{O}(\nu) \\ &= e^{\otimes\nu} L_j^{r_j} \circ \Pi_j \mod \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1} \otimes \mathcal{O}(\nu)\ .\end{aligned}$$

Considérons, pour tout $i \in \{0, ..., k\}$ fixé, le système de $d+1$ équations en l'inconnue $f_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}(\beta(i)))$:

$$\widehat{t^{i+1}a_i} - (t^{i+1}a_i) \circ \Pi_j = f_i \mod \mathcal{I}_V \cap \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1} \otimes \mathcal{O}(\beta(i))$$

$(j = 0, ..., d)$.

Comme $\beta(i) = p + m + i(l+m) \geq p + m \geq u_0$, pour chaque i fixé, l'application :

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}(\beta(i))) \to \bigoplus_{j=0}^{d} \frac{\mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}(\beta(i))}{\mathcal{I}_V \cap \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1} \otimes \mathcal{O}(\beta(i))}$$

est surjective. Ce qui veut dire que le système de $p+1$ équations est soluble pour tout i. Notant, pour $i = 0, ..., k$, $f_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}(\beta(i)))$ une solution de ce système, on a :

1) $\widehat{t^{i+1}a_i}_{|V} - f_{i|V} = t^{i+1}a_i$ car f_i est nulle sur V.

2) Pour tout $j \in \{0, ..., d\}$, on a les égalités entre germes de sections de $\mathbb{P}^n$ en P_j :

$$\begin{aligned}\Delta(\widehat{t^{i+1}a_i} - f_i) &= e^{\otimes\nu}\Delta(\underline{\widehat{t^{i+1}a_i}} - \underline{f_i}) \\ &= e^{\otimes\nu}\Delta(\underline{t^{i+1}a_i} \circ \Pi_j + \underline{\alpha_j^i})\end{aligned}$$

avec $\underline{\alpha_j^i} \in \mathcal{I}_V \cap \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1} \subset \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1}$.
Notant $\theta_j : \mathcal{O}_{P_j,\mathbb{P}^n} \to \dfrac{\mathcal{O}_{P_j,\mathbb{P}^n}}{\mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1}}$ l'homomorphisme naturel d'anneau, on a $\Delta\theta_j = \theta_j\Delta$. D'où :

$$\begin{aligned}\Delta(\widehat{t^{i+1}a_i} - f_i) &= e^{\otimes\nu}\Delta(\underline{t^{i+1}a_i} \circ \Pi_j \mod \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1}) \\ &= e^{\otimes\nu}\Delta(\underline{t^{i+1}a_i} \circ \Pi_j) \mod \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1} \otimes \mathcal{O}(\nu) \\ &= e^{\otimes\nu} L_j^{r_j+1} \circ \Pi_j \mod \mathrm{m}_{P_j}^{r_j+1} \otimes \mathcal{O}(\nu)\end{aligned}$$

C'est à dire que le premier terme non nul, dans le développement en polynômes homogènes des variables $z_1, ..., z_n$, de $\underline{\Delta(\widehat{t^{i+1}a_i} - f_i)}$ est $L_j^{r_j} \circ \Pi_j$.

En particulier le support de $(\Delta(\widehat{t^{i+1}a_i} - f_i) = 0)$ est géométriquement lisse et géométriquement transverse à V en P_j, ceci pour tout $j = 0, ..., d$. Notant S_1 le lieu des points de V en lequel le support de $(\Delta(\widehat{t^{i+1}a_i} - f_i) = 0)$ (hypersurface de $\mathbb{P}^n$) est non lisse ou bien non transverse à V, alors S_1 est un sous-ensemble analytique de V, tel que pour chaque branche irréductible D_j , $j = 0, ..., d$, $D_j \cap S_1$ est un sous-ensemble analytique propre de D_j, car $P_j \notin S_1$.

On notera $\tilde{a}_i = \widehat{t^{i+1}a_i} - f_i$ les sections construites précédemment. Le support B de $(\Delta\tilde{a}_i = 0)$ est génériquement transverse à V.
C'est à dire que $\Delta\tilde{a}_i$ restreinte à V est non identiquement nulle, si $(\Delta\tilde{a}_i = 0) \cap V = \sum_{j=0}^{d} r_j D_j$ est la décomposition en branches irréductibles alors il existe un sous-ensemble analytique S_1 de $B \cap V$ tel que $\operatorname{codim}_{B\cap V} S_1 \geq 1$ et, pour tout point P de $(B \cap V) \setminus S_1$, B est lisse au voisinage de P dans $\mathbb{P}^n$, d'intersection transverse à V. On pose $S = S_1 \cup \operatorname{Sing}V$.

4.3 Construction d'un revêtement analytique ramifié

Soit $\mu : \mathcal{O}(l + m)_{\mathbb{P}^n} \to \mathbb{P}^n$ la projection du fibré et

$$H' = \{\xi \in \mathcal{O}(l + m)_{\mathbb{P}^n} \ / \ \sum_{i=0}^{k} \tilde{a}_i \xi^{k-i} = 0\} .$$

On vérifie que H' est une hypersurface bien définie de $\mathcal{O}(l + m)_{\mathbb{P}^n}$.

Notons $\hat{\mathcal{O}}(l + m)_{\mathbb{P}^n}$ la compactification de $\mathcal{O}(l + m)_{\mathbb{P}^n}$ donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(l + m)_{\mathbb{P}^n} &\hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}(l + m)_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\ \xi &\mapsto (\xi : 1) \end{aligned}$$

où $\mathbb{P}(\mathcal{O}(l + m)_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ est l'espace projectif des lignes de $\mathcal{O}(l + m)_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$. C'est une variété compacte projective. Dans la suite on identifie $\mathcal{O}(l + m)$ et son image par j dans $\hat{\mathcal{O}}(l + m)_{\mathbb{P}^n}$.
Notons $\hat{\mu} : \hat{\mathcal{O}}(l + m)_{\mathbb{P}^n} \to \mathbb{P}^n$ la projection. Soit $\hat{H}'$ l'adhérence de H' dans $\hat{\mathcal{O}}(l+m)_{\mathbb{P}^n}$. Alors $\hat{H}'$ est une hypersurface analytique de $\hat{\mathcal{O}}(l+m)_{\mathbb{P}^n}$. Notons encore $\hat{\mu} : \hat{H}' \to \mathbb{P}^n$ la restriction de $\hat{\mu}$. Cette application est propre.

1.1) $\hat{H}' \setminus (\hat{\mu})^{-1}(\tilde{a}_0 = 0) = H' \setminus (\hat{\mu})^{-1}(\tilde{a}_0 = 0)$:
En effet, si $P \in \hat{H}'$ est tel que $\tilde{a}_0(\hat{\mu}(P)) \neq 0$ alors il existe une suite de points $P_\alpha \in H'$ telle que $P_\alpha \to P$ et $|\tilde{a}_0(\hat{\mu}(p_\alpha))| \geq C_1 > 0$ entraine

$|P_\alpha| \leq C_2$. Donc $|P| \leq C_2$.
1.2) Comme $\bigcap_i (\tilde{a}_i = 0) \subset (\tilde{a}_0 = 0) \subset (\Delta\tilde{a}_i = 0)$, alors
$\hat{\mu} : \hat{H}' \setminus (\hat{\mu})^{-1}(\Delta\tilde{a}_i = 0) \to \mathbb{P}^n \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0)$ est un revêtement fini non ramifié de degré k. En particulier, $(\hat{\mu})^{-1}(\Delta\tilde{a}_i = 0) \supset \mathrm{Sing}(\hat{H}')$.
Notons que l'intersection des zéros des $\tilde{a}_i$ peut contenir une hypersurface.
1.3) $\hat{H}' \setminus (\hat{\mu})^{-1}(\Delta\tilde{a}_i = 0)$ est connexe : Sinon notons C_1 la composante connexe de $\hat{H}' \setminus (\hat{\mu})^{-1}(\Delta\tilde{a}_i = 0)$ qui contient $\{s(P),\ P \in U \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0)\}$.
Il existe un unique polynôme $Q_1(X) = X^r + \sum_{i=1}^{r} c_i X^{r-i}$ avec
$c_i \in H^0(\mathbb{P}^n \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0), \mathcal{O}(i(l+m)))$ tel que C_1 soit donnée par $(Q_1(\xi) = 0)$. Ce polynôme est obtenu en formant les fonctions symétriques de $\xi_{|C_1}$ dans chaque trivialisation de $\mathcal{O}(l+m)$, ces fonctions symétriques se recollant en sections de $\mathcal{O}(i(l+m))$ au dessus de $\mathbb{P}^n \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0)$. En particulier Q_1 donne une équation minimale de C_1 dans chaque trivialisation.
Les c_i admettent des extensions méromorphes à $\mathbb{P}^n$ que l'on note encore c_i.
Si $r < k$, comme $Q_1(s) \equiv 0$ sur U et k minimal, cela entraine que chaque section méromorphe c_i est nulle le long de V. Ce qui entraine $s \equiv 0$, cela contredit nos hypothèses.
Notons $\hat{H}$ l'unique composante irréductible de $\hat{H}'$ qui contient
$\hat{H}' \setminus (\hat{\mu})^{-1}(\Delta\tilde{a}_i = 0)$.

Remarque 8 $\hat{H}'$ est irréductible $\Longleftrightarrow \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^n} \bigcap_i (\tilde{a}_i = 0) \geq 2$.

Lorsque l'intersection des zéros de $\tilde{a}_i$ contient des hypersurfaces, les branches irréductibles de $\hat{H}'$ différentes de $\hat{H}$, se projettent sur $\bigcap_i (\tilde{a}_i = 0)$, c'est à dire qu'elles sont verticales.

1.4) $\hat{\mu} : \hat{H} \to \mathbb{P}^n$ est génériquement finie ([2], p.117) :
$\hat{\mu}$ est de strict rang n car $\hat{\mu}_{|H \setminus (\hat{\mu})^{-1}(\Delta\tilde{a}_i = 0)}$ est de rang n et $\hat{H}$ est irréductible.
L'ensemble $D = \{h \in \hat{H} / \mathrm{rang}_h \hat{\mu} \leq n-1\}$ est un sous ensemble analytique propre de $\hat{H}$. De plus $D' = \hat{\mu}(D)$ est un sous ensemble analytique de $\mathbb{P}^n$ tel que $\dim D' \leq n-2$. Notant $S_1 = (\hat{\mu})^{-1}(D')$ alors $\hat{\mu} : \hat{H} \setminus S_1 \to \mathbb{P}^n \setminus D'$ est holomorphe propre, discrète, surjective et ouverte.

Considérons
$H_1 \overset{n}{\to} \hat{H} \overset{\hat{\mu}}{\to} \mathbb{P}^n$ où $n : H_1 \to \hat{H}$ est la normalisation de $\hat{H}$ et
$H_1 \overset{g_1}{\to} Z \overset{g_0}{\to} \mathbb{P}^n$ la factorisation de Stein de $H_1 \overset{\hat{\mu} \circ n}{\longrightarrow} \mathbb{P}^n$ ([14]) :
2.1) g_1 est holomorphe propre surjective, g_0 est holomorphe finie,
$\hat{\mu} \circ n = g_0 \circ g_1$.
2.2) $(g_1)_*(\mathcal{O}_{H_1}) = \mathcal{O}_Z$, g_1 est à fibre connexe (les points de Z peuvent

être identifiés aux composantes connexes des fibres de $\hat{\mu} \circ n$), et H_1 normal entraine que Z est normal.
En particulier, g_0 est holomorphe propre, finie et surjective. Comme $\hat{H}$ est irréductible, H_1 est connexe, donc Z est connexe normal. Donc g_0 définit un revêtement ramifié de $\mathbb{P}^n$.
De plus, *au dessus de* $\mathbb{P}^n \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0)$, les propriétés suivantes sont vérifiées :
3.1) $\hat{H}$ est lisse et $\tilde{\mu}$ est un revêtement non ramifié, en particulier n est biholomorphe. Les fibres de $\hat{\mu} \circ n$ sont alors discrètes donc les fibres de g_1 sont discrètes et connexes. Ce qui entraine que g_1 est injective au dessus de $\mathbb{P}^n \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0)$; Z étant normal, g_1 est biholomorphe.
3.2) g_0 est un revêtement non ramifié de degré k hors des zéros de la section discriminant.

Soit $\sigma : U \to H \hookrightarrow \hat{H}$ définie par $P \mapsto s(P)$. On a $\hat{\mu} \circ \sigma(P) = P$. $\sigma^{-1}(\mathrm{Sing}\hat{H}) \subset \sigma^{-1}\hat{\mu}^{-1}(\Delta\tilde{a}_i = 0) \subset (\Delta\tilde{a}_i = 0) \cap U$ est nulle part dense dans U. Donc, comme U est normal, une et une seule application holomorphe $\sigma_1 : U \to H_1$ existe telle que $n \circ \sigma_1 = \sigma$.

Soit $\sigma_0 = g_1 \circ \sigma_1$. Alors $\sigma_0 : U \to Z$ vérifie

$$g_0 \circ \sigma_0 = g_0 \circ g_1 \circ \sigma_1 = \hat{\mu} \circ n \circ \sigma_1 = \hat{\mu} \circ \sigma = \mathrm{Id}_U.$$

C'est à dire que σ_0 définit, au dessus de U, une section du revêtement ramifié $g_0 : Z \to \mathbb{P}^n$.

4.4 Conclusion

1) Notons B_1 l'ensemble critique de $g_0 : Z \to \mathbb{P}^n$. Comme Z et $\mathbb{P}^n$ sont normaux, B_1 est une hypersurface. De la propriété 3.2, on déduit que $B_1 \subset B$. De plus, d'après la définition de S, au voisinage de chaque point de $(B \cap U) \setminus S$, B est lisse transverse à U. Comme $\mathrm{Sing}V \subset S$, appliquant le Théorème 4.1.2, puis le Lemme 4.1.1, g_0 est non ramifié au voisinage de chaque point $\sigma_0(P)$ lorsque $P \in (B \cap U) \setminus S$. g_0 est non ramifiée au voisinage de chaque point de $\sigma_0(U \setminus S)$.

2) Soit $K_i,\ i \in \mathbb{N}$, une suite exhaustive de $U \setminus S$, formée d'ouverts connexes relativement compacts de $U \setminus S$ telle que $\overline{K_i} \subset\subset K_{i+1}$.

Montrons que chacun des compacts $\sigma_0(\overline{K_i})$ admet une base de voisinage W_i telle que $g_0 : W_i \to g_0(W_i)$ soit biholomorphe. Il suffit de prouver l'injectivité.
Donnons-nous une métrique riemannienne sur Z. On note
$W_{i,\,\epsilon} = \{P \in Z \ /\ \mathrm{dist}(P,\ \sigma_0(\overline{K_i})) < \epsilon\}$, de sorte que $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ entraine $W_{i,\,\epsilon_1} \subset\subset W_{i,\,\epsilon_2}$.

Supposons au contraire que pour tout voisinage $W_{i,\,\epsilon}$, $\epsilon > 0$, il existe deux points distincts $x_\epsilon,\ y_\epsilon$ de $W_{i,\,\epsilon}$ de même projection par g_0.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $x_\epsilon \to x \in \sigma_0(K_i)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $y_\epsilon \to y$.
Mais $y \in \bigcap_{\epsilon>0} \overline{W}_{i,\,\epsilon} = \sigma_0(K_i)$ et $g_0(y) = \lim_{\epsilon\to 0} g_0(y_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} g_0(x_\epsilon) = g_0(x)$.
Comme σ_0 est une section, $g_0 : \sigma_0(\overline{K_i}) \to \overline{K_i}$ est injective, donc $x = y$. On obtient une suite $(x_\epsilon, y_\epsilon) \to (x,x)$ avec $x_\epsilon \neq y_\epsilon$, $g_0(x_\epsilon) = g_0(y_\epsilon)$ et $x \in \sigma_0(\overline{K_i})$, ce qui contredit le fait que g_0 est non ramifiée en x.
On fixera alors une suite strictement décroissante $\epsilon_i > 0$ de sorte que la restriction de g_0 à $W_{i,\,\epsilon_i}$ soit injective.

3) Soit X un voisinage de $U \setminus S$ dans $\mathbb{P}^n$ tel que $X \cap V = U \setminus S$. Notons $\Pi : N \to U \setminus S$ le fibré normal de $U \setminus S$ dans X et $N \ni \zeta \to |\zeta|$ une métrique hermitienne. Il existe un voisinage T de la section nulle de N et une application lisse $\varphi : T \to X$ tels que $\varphi : T \to \varphi(T)$ est un difféomorphisme, $\varphi(T)$ est un voisinage de $U \setminus S$ dans X et $T \times [0,1] \ni (\zeta, t) \mapsto \varphi(t\zeta)$ donne un rétract différentiable de $\varphi(T)$ sur $U \setminus S$.
Dans la suite si on se donne $\alpha > 0$ et $A \subset U \setminus S$, on notera $T_{A,\,\alpha} = \{\zeta \in T,\ /\Pi(\zeta) \in A \text{ et } |\zeta| < \alpha\}$.

$\forall i \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_i > 0$ tel que $\varphi(T_{K_i,\,\alpha_i}) \subset\subset g_0(W_{i,\,\epsilon_i})$. On peut supposer $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ et α_i assez petit de sorte que $T_{K_i,\alpha}$ soit connexe pour tout $\alpha \leq \alpha_i$ car K_i est connexe.
Notons $g_{0,i}^{-1}$ l'inverse de $(g_0)_{|W_{i,\epsilon_i}} : W_{i,\,\epsilon_i} \to g_0(W_{i,\epsilon_i})$.
Alors $(g_{0,i}^{-1})_{|K_i} = (\sigma_0)_{|K_i}$. Notons que, $\forall r \in \mathbb{N}$,
$\varphi(T_{K_i,\alpha_i}) \cap \varphi(T_{K_{i+r},\alpha_{i+r}}) = \varphi(T_{K_i,\alpha_{i+r}})$ est connexe car $\alpha_{i+r} \leq \alpha_i$. Comme, $(g_{0,i}^{-1})_{|K_i} = (\sigma_0)_{|K_i} = (g_{0,i+r}^{-1})_{|K_i}$, les deux sections,
$(g_{0,i}^{-1})_{|\varphi(T_{K_i,\alpha_{i+r}})}$ et
$(g_{0,i+r}^{-1})_{|\varphi(T_{K_i,\alpha_{i+r}})}$, de g_0 au dessus de $\varphi(T_{K_i,\alpha_{i+r}})$, coïncident le long de K_i. Comme $\varphi(T_{K_i,\alpha_{i+r}})$ est connexe, elles coïncident sur cet ensemble.

Notons $\tilde{T} = \bigcup_i \varphi(T_{K_i,\,\alpha_i})$ et définissons $\tilde{\sigma}_0 : \tilde{T} \to Z$ par $\tilde{\sigma}_0(P)$ $= g_{0,i}^{-1}(P)$ si $P \in \varphi(T_{K_i,\,\alpha_i})$. Alors $\tilde{T} \cap V = U \setminus S$ et on a vu que $\tilde{\sigma}_0$ est bien définie car
si $P \in \varphi(T_{K_i,\,\alpha_i}) \bigcap \varphi(T_{K_{i'},\,\alpha_{i'}})$ alors $g_{0,i}^{-1}(P) = g_{0,i'}^{-1}(P)$.
On a $g_0 \circ \tilde{\sigma}_0 = \mathrm{Id}_{\tilde{T}}$ et $(\tilde{\sigma}_0)_{|U\setminus S} = \sigma_0$.

Maintenant g_1 est biholomorphe au dessus de $\mathbb{P}^n \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0)$, ce qui permet de définir une section de $\tilde{H} \to \mathbb{P}^n$ au dessus de $\mathbb{P}^n \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0)$ par $\tilde{\sigma} = n \circ g_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_0$.
On a ainsi une section du fibré $\mathcal{O}(l+m)$ au dessus de $\tilde{T} \setminus (\Delta\tilde{a}_i = 0)$. Comme son graphe est algébrique, elle se prolonge méromorphiquement à $\tilde{T}$. De plus cette section vérifie : $(n \circ g_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_0)_{|U\setminus S} = n \circ g_1^{-1} \circ \sigma_0 = n \circ \sigma_1 = \sigma$ sur

$U \setminus S$ hors des zéros de la section discriminante, donc sur $U \setminus S$. Notons $T_1 \to \mathbb{P}^n$ l'enveloppe de méromorphie de $\tilde{T}$ au dessus de $\mathbb{P}^n$.

Lemme 4.4.1 $T_1 \simeq \mathbb{P}^n$

Preuve. Sinon ce domaine étalé localement pseudoconvexe au dessus de $\mathbb{P}^n$ serait de Stein, d'après Takeuchi [25]. Mais comme $\mathrm{codim}_{\mathrm{U}} S \geq 2$ et U est normal, toute fonction holomorphe h sur ce domaine, a une restriction à $U \setminus S$ qui se prolonge à U, comme $\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}$, elle doit être constante. Ce qui contredirait le fait que les fonctions holomorphes de T_1 séparent les points. $\square$

Donc $\tilde{\sigma}$ admet un prolongement méromorphes à $\mathbb{P}^n$, c'est à dire que s admet un prolongement méromorphe à V. $\square$

References

1. A. Andreotti. Théorème de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves. Bull. Soc. Math. France **91**, 1–38, 1963.
2. A. Andreotti and W. Stoll. Analytic and Algebraic Dependence of Meromorphic Functions. In Lecture Notes in Mathematics, volume 234. Springer Verlag, 1971.
3. A. Andreotti and G. Tomassini. Some remarks on pseudoconcave manifolds, pages 85–104. Essays in topology and related topics. Mémoires dédiées à G. de Rham. Springer, 1970.
4. W. Barth. Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und komplexprojektiven Räumen. Inventiones math. **5**, 42–62, 1968.
5. W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven. Compact Complex Surfaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer–Verlag, 1e edition, 1984.
6. T. Bouche. Inégalité de Morse pour la *d*" −cohomologie sur une variété non compacte. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **22**, 501–513, 1989. Série 4.
7. C. W. Brown. Matrices over commutative rings, volume 169 of Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., 1993.
8. W. L. Chow. On meromorphic maps of algebraic varieties. Annals of Maths **89**, 391–403, 1969.
9. G. Coeuré. Analytic Functions and Manifolds in Infinite Dimensional Spaces, volume 11 of Mathematics Studies. North-Holland, first edition, 1974.
10. P. Dingoyan. Un théorème d'Oka-Levi pour les domaines étalés au dessus de variétés projectives. A paraitre au Bulletin des Sciences Mathématiques.
11. P. Dingoyan. Fonctions méromorphes sur un ouvert pseudoconcave d'une variété algébrique projective. C. R. Acad. Sci. Paris **321(1)**, 975–979, 1995.
12. P. Dingoyan. Fonctions méromorphes sur un espace étalé localement pseudoconvexe au dessus d'une varifé projective. Prébublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 9994 du CNRS, FRANCE, (130), JUIN 1997.
13. H. Grauert. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. **146**, 331–368, 1962.
14. H. Grauert and R. Remmert. Coherent Analytic Sheaves, volume 265 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1984.
15. P. Griffiths and J. Harris. Principles of Algebraic Geometry. Wiley Classics Library. John Wiley and Sons, inc, 1 edition, 1994.

16. Ph. A. Griffiths. Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, pages 185–251. Global analysis, Pap.Hon. K. Kodaira. Princeton Univ. Press, 1969.
17. A. Hirschowitz. Pseudoconvexité au dessus d'espaces plus ou moins homogènes. Invent. Math. **26**, 303–322, 1974.
18. L. Kaup and B. Kaup. Holomorphic Functions of Several Variables. De Gruyter Studies in Mathematics, 1983.
19. K. Kodaira. The theory of harmonic integrals and their applications to algebraic geometry (Work done at Princeton University,1952), pages p. 488–582. K. Kodaira : Collected Works. Princeton University Press, 1975. Tome I.
20. J.J. Kohn and H. Rossi. On the extension of holomorphic functions from the boundary of complex manifold. Ann. of Math. **81**, 451–472, 1965.
21. E.E. Levi. Studii dui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse. Annali di Math. **17(3)**, 61–87, 1910.
22. G. Marinescu. Non compact holomorphic Morse inequalities and application. PhD thesis, Université Paris-7, 1994.
23. M. Namba. Branched coverings and algebraic functions, volume 161 of Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & technical, 1987.
24. H. Rossi. Continuation of subvarieties of projective varieties. Amer. J. Math. **91**, 567–575, 1969.
25. A. Takeuchi. Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes. J. Math. Kyoto Univ. **6**, 323–357, 1967.