Bull. Sci. math.,
1999, 123, p. 385-411.

UN THÉORÈME DU TYPE D'OKA–LEVI POUR LES DOMAINES ÉTALÉS AU DESSUS DE VARIÉTÉS PROJECTIVES

PAR

PASCAL DINGOYAN

Institut de Mathématiques, UMR 9994 du CNRS, Université P. et M. Currie, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

Manuscrit présenté par G. HENKIN, reçu en Décembre 1997

ABSTRACT. – In this article, we study spread domains $\Pi : U \to V$ over a projective manifold V such that Π to be a Stein morphism, e.g., hull of meromorphy. We prove, such a domain is an existence domain of some holomorphic section $s \in H^0(U, E^l)$, where $E = \Pi^*(H)$, H an ample line bundle on V. This is done by proving some line bundle convexity theorem for U. We deduce various results, e.g., a Lelong–Bremermann theorem for almost plurisubharmonic functions and a general Levi type theorem: Let $U \to V$ a locally pseudoconvex spread domain over a projective manifold, then U is an almost domain of meromorphy, that is $\tilde{U} \setminus U = H$ some hypersurface in $\tilde{U}$, the hull of meromorphy of U. Hence, if W is a general spread domain over V then its pseudoconvex hull is obtained from its meromorphic hull minus some hypersurface. © Elsevier, Paris

1. Introduction

Soient V une variété compacte de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathcal{O}(1)_V$ un fibré en droites hermitien très ample au-dessus de V. Soit $\Pi : U \to V$ un espace étalé au-dessus de V, p. ex. un domaine dans V. Le but de notre travail est l'étude de certaines propriétés des fonctions méromorphes sur U. Notre étude sera entreprise via l'algèbre graduée $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(U, E^l)$, où l'on note $E = \Pi^*(\mathcal{O}(1)_V)$. Dans cet article nous supposerons que U est localement pseudoconvexe (l.pc) au-dessus de V (voir la définition des préliminaires), nous montrons :

THÉORÈME. – *Tout domaine localement pseudoconvexe U étalé au-dessus d'une variété projective est domaine d'existence* (*holomorphe*) *d'une section holomorphe du fibré E^k pour k assez grand.*

On obtient ainsi une caractérisation des domaines l.pc en terme de domaine d'holomorphie (voir la section 4). Cette caractérisation résulte d'un théorème, plus précis, de convexité le long d'un point frontière uniformisable :

THÉORÈME. – *Si $\Pi : U \to V$ est un espace étalé l.pc au-dessus de V et s'il s'injecte, $U \hookrightarrow U'$, en tant qu'espace étalé au-dessus de V, dans un espace étalé l.pc au-dessus de V, il existe un $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout* $\varepsilon \in]0,1]$, *pour tout $l \geqslant l_0$, pour toute suite $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de points de U, de limite* $\lim_{i\in\mathbb{N}} p_i = p \in \partial_{U'}U$, *la frontière topologique de U dans U', il existe une section $s \in H^0(U, \Pi^*\mathcal{O}(l))$ telle que*

$$\limsup \big|s(p_i)\big| = +\infty \quad \textit{et} \quad \int_U |s|^2 \min(\delta, d_\partial)^\varepsilon\, \Pi^*\omega^n < +\infty$$

où $\delta > 0$ est indépendant de p.

Ce théorème admet de nombreuses applications, par exemple :

– Si l'on note $\widehat{U}$ l'enveloppe de méromorphie de U (qui est l.pc au-dessus de U) alors :

THÉORÈME. – *$\widehat{U} \setminus U = H$ est une hypersurface, éventuellement vide.*

Notons l'exemple suivant : Soit $\mu : \widehat{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$ un éclatement de $\mathbb{P}^2$ en un point o, soit $S = \mu^{-1}(o)$ le diviseur exceptionel, alors $\widehat{\mathbb{P}}^2 \setminus S$ est localement pseudoconvexe *au-dessus* de $\widehat{\mathbb{P}}^2$. Aucun domaine U localement pseudoconvexe de $\widehat{\mathbb{P}}^2$ ayant une frontière contenant S comme composante connexe n'admet de fonction plurisousharmonique exhaustive. Notons de plus que $\widehat{\mathbb{P}}^2 \setminus S$ n'est pas domaine de méromorphie puisque le théorème de Hartogs entraine que toute fonction méromorphe de $\widehat{\mathbb{P}}^2 \setminus S \simeq \mathbb{P}^2 \setminus \{o\}$ s'étend méromorphiquement à $\widehat{\mathbb{P}}^2$.

– On en déduit le théorème de Lelong–Bremermann pour les fonctions quasi-plurisousharmoniques au sens suivant :

THÉORÈME. – *Soient $\Pi : U \to V$ un espace étalé pseudoconvexe au-dessus d'une variété projective, notons $\mathcal{O}(1)_U = \Pi^*\mathcal{O}(1)_V$. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinue supérieurement vérifiant $i\partial\bar{\partial}\varphi \geqslant -iC(\mathcal{O}_U(1))$.*

Alors il existe une suite de sections $s_j \in H^0(U, \mathcal{O}_U(j))$, $j \in \mathbb{N}$, *telle que*

$$\varphi = \left(\overline{\lim}\, \frac{1}{j} \log |s_j|^2\right)^*$$

où $*$ *désigne la régularisée supérieure.*

Dans [9], nous appliquons les résultats précédents pour montrer un phénomène d'extension de Hartogs dans les variétés projectives.

THÉORÈME. – *Soit* U *un ouvert d'une variété projective* $(\dim V \geqslant 2)$, *de complémentaire* $V \setminus \bar{U}$ *un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti* [1]. *Alors* U *contient une hypersurface compacte maximale* H. *Soit* $F \to V$ *un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de* V. *Supposons que l'intérieur de* $\bar{U}$ *soit égal à* U. *Alors toute section méromorphe de* F *définie au voisinage de* ∂U *se prolonge méromorphiquement à* $U \setminus H$. *Toute section holomorphe de* F *définie au voisinage de* ∂U *se prolonge méromorphiquement à* U, *de pôles éventuels contenus dans* H.

Ce résultat généralise ainsi, dans le cas holomorphe, le phénomène d'extension de Hartogs au cas projectif, on retrouve ainsi des théorèmes d'extension de Barth, Chow et Rossi.

Nos résultats sont tributaires des méthodes L^2, en particulier, ils sont conséquences d'une étude de l'algèbre $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(U, E^n)$. On se pose alors la question suivante : Lorsque U est l.pc au-dessus de V, existe-t-il pour toute hypersurface H une section holomorphe d'une puissance du fibré E s'annulant le long de H ? Cette question étant équivalente à : est-ce que le corps des fonctions méromorphes sur U est le corps des fractions de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(U, E^n)$? La réponse pourrait bien être négative en général (dans cette direction, on pourra consulter la construction du dernier chapitre de [2] qui suggère un exemple). Nous donnons une condition suffisante pour avoir une telle représentation sur les compacts :

THÉORÈME. – *Soit* $W \Subset U$ *un ouvert relativement compact localement pseudoconvexe dans* U *alors toute fonction méromorphe sur* U *s'écrit sur* W *comme quotient de deux sections holomorphes sur* W *d'une puissance du fibré* E.

Notons seulement que ce résultat s'applique aux variétés faiblement pseudoconvexes, i.e., admettant une fonction plurisousharmonique exhaustive.

Le problème précédent, global ou sur les compacts, pour les espaces étalés localement pseudoconvexes au-dessus d'une variété projective nous semble important :

D'une part, s'il admet une réponse positive, suivant les notations de la partie précédente, on obtiendrait un phénomène d'extension de Hartogs pour les fonctions méromorphes définies au voisinage connexe du bord de X (de complémentaire pseudoconcave) : celles-ci se prolongeraient méromorphiquement à X (l'hypersurface compacte maximale H de X ne serait pas une singularité essentielle pour les fonctions méromorphes de $X \setminus H$).

D'autre part, il apparait comme un cas particulier du problème suivant :

Problème B. – Soit $\Pi : U \to V$ un espace étalé localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété projective, et $F \to U$ un fibré holomorphe. Donner une condition sur F de sorte que : $(*)$ pour chaque compact K de U, il existe un $\mu_0 \in \mathbb{N}$ telle que $H^0(K, F \otimes E^{\mu_0}) \neq \{0\}$.

La solution du problème de Levi donnée par Oka [22] assure que tout domaine de Riemann pseudoconvexe au-dessus de $\mathbb{C}^n$ (voir la Définition 2) est de Stein. De même au-dessus d'une variété de Stein (Docquiert et Grauert [10]), au-dessus d'un espace projectif [27,12] et de variétés homogènes [16,28], ils sont de Stein (s'ils ne sont pas compacts). En particulier pour de tels domaines, tout fibré vectoriel admet des sections.

Notons l'exemple suivant : Considérons $\mathbb{C}^{2*} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ comme domaine localement pseudoconvexe dans l'éclaté $\sigma : \widehat{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$ de $\mathbb{P}^2$ en l'origine o de $\mathbb{C}^2$. Notons $B(r)$ la boule euclidienne de centre 0 et $B^*(r)$ cette boule privée de l'origine. Comme

$$H^1\big(B^*(r), \mathbb{Z}\big) = H^2\big(B^*(r), \mathbb{Z}\big) = 0,$$

on a la suite exacte

$$0 \to H^1\big(B^*(r), \mathcal{O}\big) \to H^1\big(B^*(r), \mathcal{O}^*\big) \to 0.$$

Si z, w désigne les coordonnées canoniques de $\mathbb{C}^2$, notons $U_1 = \{z \neq 0\}$ et $U_2 = \{w \neq 0\}$, de sorte que

$$H^1\big(B^*(r), \mathcal{O}\big) \simeq H^1\big(\{U_1, U_2\}, \mathcal{O}\big) = H^0\big(B^* \setminus \{zw = 0\}, \mathcal{O}\big).$$

On voit que de nombreux fibrés ne vérifient pas $(*)$:

Avec ces identifications, considérons la classe de cohomologie sur $\mathbb{C}^{2*}$ donnée par la fonction $\frac{1}{zw}$. Celle-ci correspond au fibré de Serre :

C'est le fibré en droite F au-dessus de $\mathbb{C}^{2*}$, qui est trivial au-dessus de U_1 et U_2 et de fonction de transition $\exp(\frac{1}{zw})$. Ce fibré ne se prolonge pas à $\mathbb{C}^2$. Montrons qu'il ne vérifie pas la condition $(*)$. Considérons la couronne $C(r) = B^{2r} \setminus \bar{B}^r$. Si E désigne la réstriction, à $\mathbb{C}^{2*}$, du fibré hyperplan au-dessus de $\widehat{\mathbb{P}}^2$, on a $H^0(C(r), F \otimes E^\mu) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$: si une section s de $F \otimes E^\mu$ existe au-dessus de $C(r)$, celle-ci se prolonge holomorphiquement à $B^*(2r)$. Considérons $B^*(2r)$ comme domaine dans $\widehat{\mathbb{P}}^2$ et divisons s par une section non identiquement nulle e de E^μ au-dessus de $\widehat{\mathbb{P}}^2$. Le théorème de Levi entraine que le diviseur de $\frac{s}{e}$ se prolonge à $\sigma^{-1}(B^r)$, donc F serait isomorphe à un fibré associé à un diviseur de $B(r)$, ce qui est faux.

Une partie de cet article a été annoncée dans une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [8] et diffusée sous forme d'un preprint [9] de l'Université Pierre et Marie Curie.

Je tiens à remercier vivement G. Henkin et H. Skoda, pour leurs nombreux conseils et encouragements.

2. Préliminaires

Convention. – Toute nos variétés seront supposées dénombrable à l'infini.

2.1. Espaces étalés localement pseudoconvexes

2.1.1. Espaces étalés

DÉFINITION 1. – *Soit V une variété analytique. On appelle espace étalé au-dessus de V un couple (Π, U) avec U un espace topologique séparé et $\Pi : U \to V$ un homéomorphisme local. On munira U de sa structure complexe naturelle induite par Π.*

Il découle du théorème de Poincaré–Volterra qu'un espace étalé est naturellement munie d'une structure de variété dénombrable à l'infini. Un morphisme d'espaces étalés $j : (\Pi, U) \to (\Pi', U')$ est une application $j : U \to U'$ vérifiant $\Pi' \circ j = \Pi$. En particulier, un morphisme d'espaces étalés est une application localement homéomorphe. Si U est connexe, on dira que U est un domaine au-dessus de V. On a :

LEMME 2.1.2. – *Dans ce cas, deux morphismes $j, j' : U \to U'$ d'espaces étalés, coïncidant en un point de U, sont égaux.*

On vérifie la propriété suivante : Si $\Pi_i : U_i \to V,\ i = 1, 2, 3$, sont étalés et s'il existe un morphisme injectif d'espace étalé $j_i : U_1 \to U_i,\ i = 2, 3$, alors l'espace

$$S = \frac{U_2 \coprod U_3}{U_1}$$

obtenu en recollant U_2 et U_3 le long de U_1 est naturellement muni d'une structure d'espace étalé au-dessus de V de sorte que les injections canoniques $U_i \hookrightarrow S,\ i = 2, 3$, sont des morphismes d'espaces étalés.

Le théorème suivant est essentiel pour la notion d'enveloppe (voir [5]) :

THÉORÈME 2.1.3. – *Soit $\mathcal{J} = (j_i,\ i \in I)$ une famille de morphismes de (X, Π) dans (Π_i, X_i). Il existe une variété, notée $\bigcap X_i$, étalée au-dessus de V, un morphisme de X dans $\bigcap X_i$, notée $\cap j_i$, des morphismes $\varphi_i : \bigcap X_i \to X_i$, tels que $\varphi_i \circ \cap j_i = j_i$ pour tout i, et pour tout espace étalé X', pour tout morphismes $j' : X \to X',\ j_i' : X' \to X_i$ tels que $j_i = j_i' \circ j'$, il existe un morphisme $\varphi' : X' \to \bigcap X_i$ tel que $\cap j_i = \varphi' \circ j'$ et $j_i' = \varphi_i \circ \varphi$. On appellera $\cap j_i$ l'intersection des morphismes j_i et $\bigcap X_i$ s'appellera l'intersection des X_i (unique à isomorphisme près).*

Soient (Π, U) un domaine étalé (au-dessus de V variété), et

$$\mathcal{A} = \{f_\mu : U \to Y_\mu,\ \mu \in I\}$$

une famille d'applications méromorphes (resp. holomorphes) f_μ à valeurs dans des espaces analytiques Y_μ. Un prolongement analytique simultané de $\mathcal{A}$ (au-dessus de V relativement à Π) est un triplet $(\tilde{U}, \tilde{j}, \tilde{\mathcal{A}})$ avec $\tilde{U} = (\tilde{\Pi}, \tilde{U})$ un domaine au-dessus de V, $\tilde{j}$ un morphisme de U dans $\tilde{U}$, $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{f}_\mu : \tilde{U} \to Y_\mu,\ \mu \in I\}$ une famille d'applications méromorphes (resp. holomorphes) telles que $f_\mu = \tilde{f}_\mu \circ \tilde{j}$. Un prolongement simultané $(\tilde{U}, \tilde{j}, \tilde{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{A}$ sera dit maximal si, pour tout prolongement simultané $(U', j', \mathcal{A}')$ de $\mathcal{A}$, il existe un morphisme $\tilde{j}' : U' \to \tilde{U}$ tel que $(\tilde{U}, \tilde{j}, \tilde{\mathcal{A}})$ prolonge $\mathcal{A}'$ et $\tilde{j} = \tilde{j}' \circ j'$. Un prolongement maximal est, s'il existe, unique à isomorphisme d'espaces étalés près.

THÉORÈME 2.1.4. – *Sous les hypothèses précédentes, il existe un prolongement analytique simultané maximal de $\mathcal{A}$.*

La construction est classique, on pourra consulter [17,5].

Remarque 1. – L'unicité à isomorphisme près du prolongement maximal de $\mathcal{A}$ (au-dessus de V relativement à Π) nous autorise à l'appeler $\mathcal{A}$-enveloppe de U au-dessus de V, ou bien enveloppe de U par rapport à $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des fonctions méromorphes sur U, on appellera ce prolongement maximal l'enveloppe de méromorphie de U (au-dessus de V).

On a alors :

LEMME 2.1.5. – *Soit $i:(\Pi, W) \to (\Pi_1, W_1)$ un morphisme d'espaces étalés au-dessus d'une variété complexe V, $\mathcal{A}$ une famille d'applications méromorphes* (*respectivement holomorphes*), *de sources W_1, à valeurs dans des espaces analytiques, notons $\mathcal{A}_{|W}$ la famille image réciproque déduite de $\mathcal{A}$ par i, $\tilde{W}$ l'enveloppe de W par rapport à $\mathcal{A}_{|W}$ et $\tilde{W}_1$ celle de W_1 par rapport à $\mathcal{A}$. Alors $\tilde{W} = \tilde{W}_1$, à isomorphisme d'espaces étalés près, et si $\mathcal{A}$ sépare les points de W_1 alors W_1 s'injecte dans son enveloppe et la famille $\mathcal{A}_{\tilde{W}}$, induite par les extensions de la famille $\mathcal{A}_{|W}$ sur $\tilde{W}$, sépare les points de $\tilde{W}$.*

2.1.2. Espaces étalés localement pseudoconvexes

DÉFINITION 2. – *Un espace étalé (Π, U), au-dessus d'une variété V, sera dit localement pseudoconvexe au-dessus de V, s'il existe un recouvrement $\mathcal{W}$ de V par des ouverts W de Stein, tels que chaque composante connexe de $\Pi^{-1}(W)$ soit de Stein. Si U est connexe et localement pseudoconvexe au-dessus de V, on dira que U est un domaine localement pseudoconvexe au-dessus de V.*

Remarque 2. – Diverses notions de pseudoconvexité au-dessus de variétés ont été définies, voir par exemple [10,22]. Dans l'article de Docquiert et Grauert [10], il est montré que ces notions coincident au-dessus d'une variété de Stein.

Remarque 3. – La notion de pseudoconvexité locale, telle qu'elle est définie ci-dessus, pour un espace étalé $\Pi: U \to V$ au-dessus d'une variété est une notion relative.

On utilisera les faits fondamentaux suivants :

THÉORÈME 2.1.6 (Docquier et Grauert [10]). – *Si U est un espace étalé localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété de Stein, alors U est une variété de Stein.*

PROPOSITION 2.1.7 (Corollaire du théorème de Hartogs [15]). – *Soit Y une hypersurface d'un espace étalé $U = (\Pi, U)$ localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété V, alors $\Pi_{U \setminus Y} : U \setminus Y \to V$ est localement pseudoconvexe au-dessus de V.*

LEMME 2.1.8 (Hirschowitz [16]). – *Soient $\psi : \Omega \to V$ une application holomorphe et (Π, U) un domaine étalé localement pseudoconvexe au-dessus de V, alors $\Omega' = \Omega \times_V U$, le produit fibré de Ω et U au-dessus de V, est étalé localement pseudoconvexe au-dessus de Ω. En particulier, si Ω est étalé localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété B alors Ω' est localement pseudoconvexe au-dessus de B.*

LEMME 2.1.9. – *Soit $j : (\Pi_1, W_1) \to (\Pi_2, W_2)$ un morphisme injectif d'espaces étalés au-dessus d'une variété V. Supposons ces espaces localement pseudoconvexes au-dessus de V, alors $j(W_1)$ est localement pseudoconvexe au-dessus de V.*

THÉORÈME 2.1.10 (Corollaire du théorème de Levi [20]). – *Soit (Π, U) un domaine étalé au-dessus d'une variété lisse V, alors son enveloppe de méromorphie au-dessus de V est étalée localement pseudoconvexe au-dessus de V.*

2.1.3. La distance frontière

Rappelons enfin une propriété fondamentale des espaces étalés localement pseudoconvexes, au-dessus d'une variété kählérienne, concernant le défaut de plurisousharmonicité de la fonction distance au bord.

Soit $\Pi : U \to V$ un domaine étalé localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété kählérienne $V = (V, \omega)$. Notons encore ω l'image réciproque par Π de la forme kählérienne.

DÉFINITION 3. – *Soit P un point de U. Définissons la distance de P au bord de U, notée $d_{\partial U}(P)$, comme étant l'infimum des longueurs (éventuellement infinies) des géodésiques issues de P et sortant de tout compact de U en un temps fini. C'est-à-dire une géodésique $\gamma : [0, a[\to U$ telle que $\gamma(0) = P$ et pour tout compact K de U, il existe un temps $t_K \in [0, a[$ tel que $\gamma([t_K, a[) \cap K = \emptyset$. $d_{\partial U}(P)$ est soit identiquement* *infini pour tout* P*, en ce cas on dit que* U *est sans point frontière* (*au-dessus de* V *relativement à* Π)*, soit définit une fonction finie positive continue sur* U*. En ce cas, on dit que* U *possède des points frontières* (*au-dessus de* V *relativement à* Π).

Dans toute la suite, on ne considèrera que des domaines (c'est à dire des variétés connexes) étalés au dessus de variétés.

THÉORÈME 2.1.11 ([22,27,26,11]). – *Soit* $\Pi : U \to V$ *un espace localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété kählérienne* V*. Supposons que* U *admette des points frontières. Si la projection de* U *sur* V *est relativement compacte dans* V*, alors il existe un* $\varepsilon > 0$*, une constante réelle* C *tels que* $i\partial\bar{\partial} - \log d_{\partial U} \geqslant C\omega$ *sur l'ouvert* $\{P \in U,\ d_{\partial U} < \varepsilon\}$*. De plus les constantes* ε *et* C *ne dépendent que de la projection de* U *sur* V*.*

Remarque 4. – Dans [11] un minorant explicite de la constante C est obtenu en terme d'un tenseur géométrique lié au fibré tangent. Cette estimation permet donc d'étendre le théorème précédent au cas où U n'est plus de projection relativement compacte dans V en supposant cependant connue une borne du tenseur sur V.

3. Convexité par rapport aux sections d'un fibré en droites

Les espaces étalés localement pseudoconvexes au-dessus de $\mathbb{C}^n$ sont holomorphiquement convexes. Dans le cas des domaines localement pseudoconvexes univalents d'une variété algébrique, Pinney [23] et Asserda [3] montrent qu'il y a convexité par rapport aux sections d'une puissance d'un fibré positif. Le cas des espaces étalés multivalents semble plus délicat. Si l'étalement est un revêtement, Napier [21] montre qu'il y a convexité. Dans cet article nous n'aurons besoin que d'un théorème de convexité près d'une frontière topologique d'un domaine étalé localement pseudoconvexe.

THÉORÈME 3.1. – *Soient* $\Pi : M_0 \to M$ *un espace étalé localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété* M *compacte projective,* $M_1 \subset M_0$ *un ouvert localement pseudoconvexe dans* M_0 (*donc au-dessus de* M) *et* $E = \Pi^*\mathcal{O}(1)_M$*. Il existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall m \geqslant m_0$, $\forall \varepsilon \in]0,1]$, $\forall p \in \mathrm{Fr}_{M_0}(M_1)$ *et pour toute suite de points de* M_1 *tendant vers* P*,* $\exists s \in$

$H^0(M_1, E^m)$ non bornée sur la suite et vérifiant

$$\int_{M_1} |s|^2 \min(d_{\partial M_1}, \delta)^{\varepsilon} \omega^n < +\infty$$

où $\delta > 0$ est indépendant de P et ω désigne l'image réciproque par Π d'une métrique kählérienne sur M.

Preuve. – Les restrictions de M_0 et M_1 au-dessus d'une partie affine de M étant des variétés de Stein, on peut appliquer les techniques L^2.

On utilise d'abord le Théorème de résolution L^2 du $\bar\partial$ (voir [6]) afin de construire une section vérifiant les conditions du Théorème de relèvement L^2 de [25].

Soient $P_0 \in \mathrm{Fr}_{M_0}(M_1)$, $\underline{P_0} = \Pi(P_0)$ et W_{P_0} un voisinage de P_0 dans M_0 tel que Π soit biholomorphe d'un voisinage de $\overline{W_{P_0}}$ sur son image. Considérons $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ sections holomorphes $t_1, \dots, t_n$ de $\mathcal{O}(1)_M$ de sorte que $\bigcap_{i=0}^{i=n}(t_i = 0)$ consiste en d points (comptés avec multiplicité) et les sections donnent un système de coordonnées locales sur un voisinage de $\overline{\Pi(W_{P_0})}$, centrées en $\underline{P_0}$ (quitte à restreindre W_{P_0}). Notant encore t_i, $i = 1, \dots, n$, les sections images réciproques par Π, quitte à restreindre W_{P_0}, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall p \in W_{P_0} \cap M_1,\ \|t\|^2(p) = \big(|t_1|^2 + \cdots + |t_n|^2\big)(p) \geqslant C d^2_{\partial M_0}(p).$$

Notons que $i\partial\bar\partial \log \|t\|^2 \geqslant -iC(E)$, donc $\log \|t\|^2$ définit une fonction QPSH sur M_0 de lieu singulier, discret dans M_0, contenant P_0. En particulier, quitte à restreindre W_{P_0}, on peut supposer

$$\Pi^{-1}\Big(\bigcap (t_i = 0)\Big) \cap \overline{W}_{P_0} = \{P_0\}.$$

Soit s une section holomorphe locale de E^{l+1} sur $\overline{W}_{P_0}$ non nulle sur $\overline{W}_{P_0}$ (restreindre W_{P_0} si nécessaire) et θ une fonction plateau à support compact dans W_{P_0}, identique à 1 au voisinage $U_{P_0} \Subset W_{P_0}$ de P_0 dans M_0.

a. Comme M est compacte et $\mathcal{O}(1)$ strictement positif, il existe une constante $\beta \geqslant 0$ telle que $i\mathrm{Ricci}(\omega_M) \geqslant -i\beta C(\mathcal{O}(1))$. Posons $k = \varepsilon + n - 1$ avec $1 \geqslant \varepsilon > 0$ et soit $l_0 = \mathrm{Ent}(1 + n + \beta) + 1$ (où Ent désigne la fonction partie entière), on a

$$
\begin{aligned}
& il_0 C(E) + i\partial\bar\partial \log \|t\|^{2(k+1)} + i \operatorname{Ricci}(\omega_M) \\
& \quad \geqslant i\big(\operatorname{Ent}(\varepsilon + n + \beta) + 1 - (k+1) - \beta\big) C(E) > 0.
\end{aligned}
$$

Appliquant le Théorème de résolution L^2 du $\bar\partial$ (voir [6]), $\forall l \in \mathbb{N}$ tel que $l + 1 \geqslant l_0$ comme

$$
I_0 = \int_{M_0} |\bar\partial \theta s|^2_{C(E,(k+1)\log\|t\|^2)} e^{-(k+1)\log\|t\|^2}\, dV_\omega < +\infty,
$$

$$
\begin{aligned}
& \exists \varphi \in L^2_{\text{loc}}\big(M_0, E^{l+1}\big) \text{ telle que} \\
& \quad \bar\partial\varphi = \bar\partial\theta s \text{ et } \int_{M_0} |\varphi|^2 e^{-(k+1)\log\|t\|^2}\, dV_\omega \leqslant I_0.
\end{aligned}
$$

En particulier, comme $t_1, \ldots, t_n$ donnent un système de coordonnées locales centrées en P_0 et $k + 1 = \varepsilon + n \geqslant n$, la fonction $\frac{1}{\|t\|^{2(k+1)}}$ est non localement intégrable en P_0, la section φ étant holomorphe au voisinage U_{P_0} de P_0 doit s'annuler en P_0.

b. Considérons la fonction $-\log d_{\partial M_1}$. D'après Takeuchi [27], comme $\overline{\Pi(M_1)}$ est compact dans M, $\exists \alpha \geqslant 0$ tel que

$$
i\partial\bar\partial - \log\min(\delta, d_{\partial M_1}) \geqslant -i\alpha C(E),
$$

avec δ constante assez petite ne dépendant que de la projection de M_1 sur M. On peut choisir W_{P_0} de sorte que $d_{\partial M_1} < \delta$ sur $\overline{W}_{P_0}$.

Considérons le morphisme g de fibrés au-dessus de M_1 :

$$
E^l \otimes \mathbb{C}^n \to E^{l+1}, \quad (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{i=n} h_i t_i.
$$

Ce morphisme est génériquement surjectif (il est surjectif hors de $\bigcap(t_i = 0)$). Notons $\tilde g$ le morphisme induit par g sur les sections globales au-dessus de M_1. Soit

$$
l_1 = \operatorname{Ent}\big(\max(4\alpha + 1 + n - 1 + \beta, 1 + n)\big) + 1 \geqslant l_0,
$$

prenons $l \geqslant l_1$, de sorte que

$$ilC(E) + i\partial\bar{\partial} - 4\varepsilon \log \min(\delta, d_{\partial_{M_1}})$$
$$- (\varepsilon + n - 1)iC(E) + i\,\mathrm{Ricci}(\omega) > 0.$$

Comme M_1 privée d'une hypersurface est de Stein, une condition pour que la section holomorphe $\theta s - \varphi$ appartienne à l'image de $\tilde{g}$ est, d'après le Théorème de relèvement L^2 de [25] :

$$(\#) \qquad I = \int_{M_1} \frac{|\theta s - \varphi|^2}{\|t\|^{2(k+1)}} e^{-(-4\varepsilon \log \min(\delta, d_{\partial_{M_1}}))}\, dV_\omega < +\infty.$$

Or

$$I \leqslant \int_{W_{P_0} \cap M_1} 2 \frac{|\theta s|^2}{\|t\|^{2(k+1)}} d^{4\varepsilon}_{\partial_{M_1}}\, dV_\omega + \int_{M_0} 2 \frac{|\varphi|^2}{\|t\|^{2(k+1)}} \delta^{4\varepsilon}\, dV_\omega,$$

et, sur $W_{P_0} \cap M_1$, on a $(d^2_{\partial_{M_1}})^{2\varepsilon} \leqslant C^{2\varepsilon}(\|t\|^2)^{2\varepsilon}$, d'où

$$\int_{W_{P_0} \cap M_1} \frac{|\theta s|^2}{\|t\|^{2(k+1)}} d^{4\varepsilon}_{\partial_{M_1}}\, dV_\omega \leqslant C^{2\varepsilon} \int \frac{|\theta s|^2}{(\|t\|^2)^{n-\varepsilon}}\, dV_\omega < +\infty$$

car, les t_i, $i = 1, \ldots, n$, donnant un système de coordonnées locales, $\frac{1}{(\|t\|^2)^r}$ est localement intégrable en P_0 si $r < n$. Donc $\exists\, h_1, \ldots, h_n \in H^0(M_1, E^l)$ vérifiant

$$\theta s - \varphi = \sum_{i=1}^{i=n} h_i t_i \quad \text{et} \quad \int_{M_1} \frac{\|h\|^2}{\|t\|^{2k}} e^{-(-4\varepsilon \log \min(\delta, d_{\partial_{M_1}}))}\, dV_\omega \leqslant I.$$

Considérons une suite $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de M_1 convergeant vers P_0. Si

$$\overline{\lim_{i \in \mathbb{N}}}\, \|h\|(z_i) < +\infty$$

alors

$$0 < \lim_{i \to +\infty} \left|(\theta s - \varphi)(z_i)\right| \leqslant \overline{\lim_{i \to +\infty}}\, \|h\|(z_i) \lim_{i \to +\infty} \|t\|(z_i) = 0.$$

Donc l'une au moins des sections h_i est non bornée sur la suite.

Comme $A = \max_{M_1} \|t\| < +\infty$, on a

$$\int\limits_{M_1} \frac{\|h\|^2}{\|t\|^{2k}} e^{-(-4\varepsilon \log \min(\delta, d_{\partial M_1}))}\, dV_\omega \geqslant \frac{1}{A} \int\limits_{M_1} \|h\|^2 e^{-(-4\varepsilon \log \min(\delta, d_{\partial M_1}))}\, dV_\omega.$$

□

Remarque 5. – (i) On peut donc dire que tout domaine localement pseudoconvexe $U \to V$ étalé au-dessus d'une variété projective est domaine d'holomorphie pour l'algèbre

$$A(U) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0\left(U, E^n\right)$$

des sections holomorphes, au-dessus de U, des puissances de E, où E est l'image réciproque d'un fibré en droites ample sur V (car le domaine d'existence holomorphe de sections holomorphes d'un fibré en droites est localement pseudoconvexe).

(ii) L'hypothèse M_0 localement pseudoconvexe au-dessus de M est seulement utilisée pour créer une section holomorphe d'une puissance de E vérifiant (#). Si, par exemple M_1 est de volume fini, l'image réciproque d'une section holomorphe de $\mathcal{O}(l)$ au-dessus de M non nulle en $\underline{P_0}$ nulle en $\bigcap_{i=1,\dots,n}(t_i = 0) \setminus \{\underline{P_0}\}$ (comptés avec multiplicité) vérifie (#).

(iii) Soient M une variété complexe et $M_1 \Subset M$ un ouvert localement pseudoconvexe dans M. Supposons que M admette une métrique kählerienne ω et qu'il existe un fibré E hermitien tel que $iC(E) + i\mathrm{Ricci}(\omega) > 0$. Supposons de plus E ample au voisinage de $\overline{M}_1$ (condition vérifier si M admet une métrique kählérienne complète), il existe alors un entier m_0 tel que pour tout $m \geqslant m_0$ et tout point P du bord de M_1 dans M, on puisse trouver n sections $t_1, \dots, t_n$ de E^m holomorphes au voisinage de $\overline{M}_1$ donnant un système de coordonnées locales centrées en P au voisinage de P dans M. Bien que l'ensemble des zéros communs aux t_i ne soit pas en général discret, en procédant d'une manière analogue à la partie **a**, on obtient un phénomène de convexité au bord.

4. Un théorème du type d'Oka–Lévi

La solution du problème de Lévi, donnée par Oka, montre que tout domaine localement pseudoconvexe étalé au-dessus de $\mathbb{C}^n$ est domaine d'holomorphie (la réciproque étant fausse dans le cas ramifié comme le montre un exemple dû à Grauert et Remmert). Lorsque l'on s'intéresse à des domaines localement pseudoconvexes étalés au-dessus d'une variété algébrique projective, de nombreux exemples montrent que les fonctions holomorphes peuvent se réduire aux constantes. On peut poser le problème de Lévi en termes de fonctions méromorphes : Un domaine localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété projective est-t-il domaine de méromorphie ? (la réciproque étant vraie, voir par exemple [16]). Il est facile de voir que ce n'est pas exactement le cas (voir exemple ci-dessous). Nous montrons cependant :

THÉORÈME 4.1. – *Soit $\Pi : M_1 \to M$ un espace étalé localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété projective algébrique M. Soit $\widehat{M_1}$ l'enveloppe de méromorphie de M_1 au-dessus de M. Alors $\widehat{M_1} \setminus M_1$ est une hypersurface de $\widehat{M_1}$. De plus pour m_0 assez grand, il existe une section méromorphe de E^{m_0} au-dessus de $\widehat{M_1}$, holomorphe au-dessus de M_1, ayant pour pôle cette hypersurface à l'ordre un.*

Example 1. – Soient V une variété projective de dimension $n \geqslant 2$ et $Y \subset V$ un ensemble analytique de codimension complexe, dans V, supérieure à deux. Soit $\mu : \tilde{V} \to V$ une modification propre de V, de centre Y, telle que l'ensemble exceptionnel $\tilde{Y} = \mu^{-1}(Y)$ soit une hypersurface lisse dans $\tilde{V}$ variété projective lisse. Soit U un domaine localement pseudoconvexe dans V rencontrant Y tel que, par exemple, le bord de U soit lisse près de Y. Notant $\tilde{U}$ l'image réciproque de U par μ, $\tilde{U} \setminus \tilde{Y}$ est localement pseudoconvexe dans $\tilde{V}$. Cependant, $\tilde{U} \setminus \tilde{Y} \simeq U \setminus Y$, Y étant de codimension complexe deux dans V, le théorème de Hartogs implique $\mathcal{M}(\tilde{U} \setminus \tilde{Y}) = \mathcal{M}(U \setminus Y) = \mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(\tilde{U})$ car μ est une modification propre. En particulier, bien que $\tilde{U} \setminus \tilde{Y}$ soit localement pseudoconvexe dans $\tilde{V}$, ce n'est pas un domaine de méromorphie. Cet exemple montre que certains domaines pseudoconcaves, obtenus en enlevant un sous-ensemble analytique Y de codimension deux dans une variété V, sont naturellement munis d'une structure d'espaces étalés localement pseudoconvexes au-dessus de l'éclaté de V le long de Y.

Preuve du théorème précédent. – On utilise un argument de Baire de manière similaire à Lelong [19] : Notons F la frontière topologique de M_1 dans son enveloppe $\tilde{M}_1$ si celle-ci n'est pas isomorphe à M_1. D'après le Théorème 3.1 de convexité, on sait qu'il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall P \in F, \exists s \in H^0(M_1, E^{m_0})$ non bornée sur une suite de points de M_1 tendant vers P dans son enveloppe. En particulier, pour tout ouvert U de $\widehat{M_1}$ contenant P l'application de restriction

$$R_{M_1} : H^0\big(U \cup M_1, E^{m_0}\big) \to H^0\big(M_1, E^{m_0}\big)$$

est non surjective. On utilise alors le théorème (voir [14] page 40) :

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques, E complet et métrisable. Soit u une application linéaire continue de E dans F. Si $u(E) \neq F$ alors $u(E)$ est maigre.

Donc pour tout ouvert U de $\widehat{M_1}$ contenant un point frontière P,

$$R_{M_1} : H^0\big(U \cup M_1, E^{m_0}\big) \to H^0\big(M_1, E^{m_0}\big)$$

est d'image maigre.

Prenons une suite de points F_1 dénombrable dense de la frontière F et une famille dénombrable $\mathcal{A}$ d'ouverts de $\widehat{M_1}$ de sorte que pour tout $P \in F_1$, $\mathcal{A}$ soit une base de voisinage en P. Alors $R_{M_1}(H^0(A \cup M_1, E^{m_0}))$ est maigre dans $H^0(M_1, E^{m_0})$, pour tout $A \in \mathcal{A}$. La réunion (dénombrable) de ces ensembles étant maigre dans $H^0(M_1, E^{m_0})$, il existe $s \in H^0(M_1, E^{m_0})$ nulle part prolongeable holomorphiquement au voisinage de tout point de F. Or, s se prolonge en une section méromorphe $\tilde{s}$ à $\widehat{M_1}$, nécessairement $P(\tilde{s}) \supset F_1$ or $P(\tilde{s})$ est fermé, donc $P(\tilde{s}) \supset \bar{F}_1 = F$. Donc le bord topologique de M_1 dans $\widehat{M_1}$ est inclus dans une hypersurface, celle-ci ne disconnectant pas $\widehat{M_1}$, on a $M_1 \cup P(\tilde{s}) = \widehat{M_1}$ car s est holomorphe sur M_1.

Notons, pour tout ouvert $U \subset \widehat{M_1}$, $H^0_{(2)}(U, E^{m_0}, (\min(\delta, d_{\partial_{\widehat{M_1}}}))^{\varepsilon})$ l'espace des sections holomorphes de carrés intégrables sur U pour la mesure

$$\big(\min(\delta, d_{\partial_{\widehat{M_1}}})\big)^{\varepsilon} \frac{1}{n!} \omega^n_{|U}$$

et $H^0_{(2)}(M_1, E^{m_0}, (\min(\delta, d_{\partial_{M_1}}))^\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$, l'espace des sections holomorphes sur M_1 de carrés intégrables pour la mesure

$$\big(\min(\delta, d_{\partial_{M_1}})\big)^\varepsilon \frac{1}{n!}\omega^n$$

(où l'on a choisi δ assez petit de sorte que le défaut de plurisousharmonicité des distances au bord soit minoré par $-im_1C(E)$ à une distance inférieur à δ des bords et $m_0 \geqslant m_1$ assez grand de sorte que l'on soit dans la situation du théorème précédent pour M_1). Alors, pour tout ouvert $A \in \mathcal{A}$ le morphisme de restriction

$$\begin{aligned} R_{M_1} : H^0_{(2)}\big(A \cup M_1, E^{m_0}, \big(\min\big(\delta, d_{\partial_{\widehat{M_1}}}\big)\big)^\varepsilon\big) \\ \to H^0_{(2)}\big(M_1, E^{m_0}, \big(\min\big(\delta, d_{\partial_{M_1}}\big)\big)^\varepsilon\big) \end{aligned}$$

est continu et non surjectif, donc d'image maigre. La réunion dénombrable d'ensembles maigres étant maigre, il existe une section

$$s \in H^0_{(2)}\big(M_1, E^{m_0}, \big(\min(\delta, d_{\partial_{M_1}})\big)^\varepsilon\big)$$

nulle part prolongeable holomorphiquement à travers l'hypersurface, mais prolongeable méromorphiquement en $\tilde{s}$. La condition d'intégrabilité nécessite que les pôles de $\tilde{s}$ le long de F sont d'ordre un. □

COROLLAIRE 4.2. – *Toute hypersurface H d'un domaine pseudoconvexe étalé au-dessus d'une variété projective V est le lieu polaire d'une section méromorphe d'une puissance de l'image réciproque du fibré hyperplan.*

Remarque 6. – D'après [8], les sections holomorphes de carré intégrable séparent les points. On voit, par un argument similaire au précédent, que tout domaine localement pseudoconvexe est domaine d'existence holomorphe d'une section de l'algèbre graduée

$$A_{d^\varepsilon_{\partial U}}(U) = A(U) \cap L^2\big(U, d^\varepsilon_{\partial U}\big)$$

des sections holomorphes de carré intégrables pour la mesure $d^\varepsilon_{\partial U} dV_\omega$, avec $\varepsilon > 0$. On a besoin de toute la précision des estimations L^2 pour avoir l'information géométrique précise que le pôle de la section construite précédement est à l'ordre 1.

Comme on l'a vu, si $\Pi : U \to V$ est un espace localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété projective, son enveloppe de méromorphie diffère de U d'au plus une hypersurface. C'est en fait un phénomène général : Soit $\Pi : W \to V$ un espace étalé. Notons

$$A(W) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(W, E^n)$$

l'algèbre graduée des sections holomorphes, au-dessus de W, des puissances de E. Introduisons, comme Hirschowitz (voir [16] Lemme 1.8) l'enveloppe pseudoconvexe $\tilde{W}$ de W : C'est l'intersection des buts de tous les morphismes d'espaces étalés $j : W \to W'$ où $W' = (\Pi', W')$ est un domaine étalé localement pseudoconvexe au-dessus de V (voir Théorème 2.1.3). Alors $\tilde{W} = (\tilde{\Pi}, \tilde{W})$ est localement pseudoconvexe au-dessus de V (en effet, au-dessus de chaque ouvert U de Stein de V, les restrictions des espaces étalés W' sont de Stein, donc chacune des applications $(\tilde{\Pi})^{-1}(U) \to W'$ se prolonge à l'enveloppe d'holomorphie de $(\tilde{\Pi})^{-1}(U)$ au-dessus de U. Recollant $\tilde{W}$ et cette enveloppe le long de $(\tilde{\Pi})^{-1}(U)$, de la propriété universelle de $\tilde{W}$, on déduit que $(\tilde{\Pi})^{-1}(U)$ est biholomorphe à son enveloppe d'holomorphie). Le Théorème de convexité 3.1 montre que $\tilde{W}$ diffère de son enveloppe de méromorphie $\tilde{\tilde{W}}$ d'au-plus une hypersurface (éventuellement vide), et que $\tilde{W}$ est domaine d'existence de $A(\tilde{W})$. Considérons $j_1 : W \to W_1$ l'enveloppe de méromorphie de W et $j_2 : W \to W_2$ le domaine d'existence de $A(W)$. Une section de E^l, $l \in \mathbb{N}$, étant localement une fonction holomorphe, W_2 est étalé localement pseudoconvexe au-dessus de V. Notons donc, $u : W \to \tilde{W}$, $\varphi_1 : \tilde{W} \to W_1$ et $\varphi_2 : \tilde{W} \to W_2$ les morphismes déduits du Théorème 2.1.3. On obtient un théorème du type Oka–Lévi :

THÉORÈME 4.3. – *$\tilde{W} = W_2$ et $\tilde{\tilde{W}} = W_1$ à isomorphisme d'espaces étalés près.*

Preuve. – Montrons d'abord que W_2 et $\tilde{W}$ sont isomorphes. En effet, $\tilde{W}$ étant localement pseudoconvexe au-dessus de V, il est domaine d'existence de $A(\tilde{W})$ donc de $u^* A(\tilde{W})$ d'après le Lemme d'identité 2.1.5, or W_2 prolonge $u^* A(\tilde{W})$, on déduit qu'il existe $\alpha : W_2 \to \tilde{W}$ vérifiant $\alpha \circ j_2 = u$. Mais $j_2 = \varphi_2 \circ u$ d'où $\alpha \circ \varphi_2 \circ u = u$, en particulier $\alpha \circ \varphi_2$ est l'identité sur $u(W)$, ce qui entraine, par le Lemme 2.1.2, que c'est l'identité de $\tilde{W}$. De même, $j_2 = \varphi_2 \circ \alpha \circ j_2$, d'où $\varphi_2 \circ \alpha$ est l'identité de $j_2(W)$, donc $\varphi_2 \circ \alpha$ est l'identité de W_2.

Notant $i : \tilde{W} \to \tilde{\tilde{W}}$ l'injection de $\tilde{W}$ dans son enveloppe de méromorphie, comme W_1 prolonge $(i \circ u)^*\mathcal{M}(\tilde{\tilde{W}})$, il existe un morphisme $\beta : W_1 \to \tilde{\tilde{W}}$ vérifiant $\beta \circ j_1 = (i \circ u)$ d'où $i \circ u = \beta \circ \varphi_1 \circ u$, en particulier $i^{-1} \circ \beta \circ \varphi_1$ induit l'identité sur $u(W)$, d'où $i^{-1} \circ \beta \circ \varphi_1$ est l'identité de $\tilde{W}$. Donc, $\varphi_1 : \tilde{W} \to W_1$ est une injection. En particulier, $\mathcal{M}(\tilde{W}) = \mathcal{M}(W_1)$ et comme W_1 est domaine de méromorphie, W_1 est l'enveloppe de méromorphie de $\tilde{W}$. □

Remarque 7. – Ainsi, si $W \hookrightarrow V$ est un domaine dans une variété, et si l'on connait $\tilde{W}$, un domaine univalent de V contenant W tel que toute section holomorphe de $A(W)$ se prolonge en une section holomorphe de $A(\tilde{W})$, alors toute fonction méromorphe sur W se prolonge méromorphiquement à $\tilde{W}$. Dans [9], cette remarque, généralisée, sera utilisée pour montrer l'existence d'un phénomène d'extension de Hartogs pour certains ouverts de variété projective :

THÉORÈME 4.4. – *Soit U un ouvert d'une variété projective* ($\dim V \geqslant 2$)*, de complémentaire $V \setminus \bar{U}$ un domaine pseudoconcave au sens d'Andreotti* [1]. *Alors U contient une hypersurface compacte maximale H. Soit $F \to V$ un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de V. Supposons que l'intérieur de $\bar{U}$ soit égal à U. Alors toute section méromorphe de F définie au voisinage de ∂U se prolonge méromorphiquement à $U \setminus H$. Toute section holomorphe de F définie au voisinage de ∂U se prolonge méromorphiquement à U, de pôles éventuels contenus dans H.*

5. Le théorème de Lelong–Bremermann pour les fonctions QPSH

D'après Lelong [18] et Bremermann [4], toute fonction plurisousharmonique dans un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$ est une fonctions de Hartogs. Pour des domaines pseudoconvexes au-dessus d'une variété projective, on montre :

THÉORÈME 5.1. – *Soient $\Pi : U \to V$ un espace étalé pseudoconvexe au-dessus d'une variété algébrique projective et $\mathcal{O}(1)_U = \Pi^*\mathcal{O}(1)$. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinue supérieurement vérifiant*

$$i\partial\bar{\partial}\varphi \geqslant -iC\big(\mathcal{O}_U(1)\big).$$

Alors il existe une suite de sections $s_j \in H^0(U, \mathcal{O}_U(j))$, $j \in \mathbb{N}$, *telle que* $\varphi = (\overline{\lim}\, \frac{1}{j} \log |s_j|^2)^*$ *où* $*$ *désigne la régularisée supérieure.*

Remarque 8. – Dans [7], Demailly obtient des méthodes d'approximations des fonctions QPSH de la manière suivante :

Sous les hypothèses précédentes, soit $\varphi : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ QPSH telle que $i2\partial\bar{\partial}\varphi + iC(E) \geqslant 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère les espaces

$$H^0_{(2)}\big(U, K_U \otimes E^m, \exp(-m\varphi)\big) = \left\{ s \in H^0\big(U, K_U \otimes E^m\big) \colon \int\limits_U |s|^2 \exp(-2m\varphi)\, dV_\omega < +\infty \right\}.$$

On montre alors l'approximation de φ par les fonctions $\sup \frac{1}{2m} \log |s_\alpha|^2$ où (s_α) est une base orthonormée de $H^0_{(2)}(U, K_U \otimes E^m, \exp(-m\varphi))$.

Preuve du théorème précédent. – On suit la méthode de Bremermann [4]. Notons $\underline{\mathbb{C}}$ le fibré trivial au-dessus de V munie de la métrique hermitienne triviale de courbure nulle. Soit $\mathbb{P} : \mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}}) \to V$ le fibré en espaces projectifs au-dessus de V dont la fibre $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})_x$, pour $x \in V$, est l'espace projectif des lignes de $(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})_x \simeq \mathbb{C}^2$. Soit

$$\begin{aligned} j : \mathcal{O}(-1) &\to \mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}}) \\ \zeta &\mapsto (\zeta : 1) \end{aligned}$$

Considérons sur $\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}}$ les “formes linéaires” $\alpha_i : (\alpha_1, \alpha_2) \to \alpha_i$, pour $i = 1, 2$. α_2 définit une section, encore notée α_2, du fibré $\mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})}$, dual du fibré tautologique de $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})$.

On a $(\alpha_1 = 0) \simeq V$ et $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}}) \setminus (\alpha_2 = 0) = j(\mathcal{O}(-1))$. On réalise ainsi $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})$ comme compactification du fibré $\mathcal{O}(-1)$ par adjonction d'un point à l'infini dans chaque fibre. Dans la suite, $\mathcal{O}(-1)$ et son image par j seront identifiés. Notons que $\mathcal{O}(-1)_{\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})}$ admet une section méromorphe canonique donnée par $\frac{1}{\alpha_2}$, holomorphe au-dessus de $\mathcal{O}(-1)$. Le fibré $\mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})}$ est semi-positif, strictement positif dans les directions verticales de $\mathbb{P}$ (voir [13]), en particulier le fibré $E = \mathbb{P}^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})}$ est strictement positif ($\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})$ est donc une variété compacte projective). On a l'équation

$$K_{\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})} = \mathcal{O}(-2)_{\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \underline{\mathbb{C}})} \otimes \mathbb{P}^*\big(\det(\mathcal{O}(1) \oplus \underline{\mathbb{C}}) \otimes K_V\big)$$

donc il existe $r \in \mathbb{N}$ de sorte que $E^r \otimes K_{\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)\oplus\underline{\mathbb{C}})}$ soit positif. Dans la suite on supposera que la métrique kählérienne de V est celle induite par celle de $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)\oplus\underline{\mathbb{C}})$. La construction précédente étant fonctorielle, on obtient un étalement

$$\tilde{\Pi}:\mathbb{P}\big(\mathcal{O}(-1)_U\oplus\underline{\mathbb{C}}_U\big)\to\mathbb{P}\big(\mathcal{O}(-1)_V\oplus\underline{\mathbb{C}}_V\big).$$

On ne précisera, dans la suite, l'indice U ou V relatif aux différents espaces et fibrés au-dessus de U ou V que lorsqu'un risque de confusion est possible. On notera, par exemple, α_2 la section canonique de $\mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)\oplus\underline{\mathbb{C}})}$ que l'on soit au-dessus de V ou de U.

Considérons, dans $\mathcal{O}(-1)$, la fonction $\zeta\mapsto\ln|\zeta|^2$, elle vérifie l'équation $i\partial\overline{\partial}\ln|\zeta|^2=i\mu^*C(\mathcal{O}(1))+[U]$, où l'on a identifié U à la section nulle de $\mathcal{O}(-1)$ et $\mu:\mathcal{O}(-1)\to U$ désigne la projection du fibré. En particulier la fonction ψ définie, sur $\mathcal{O}(-1)$, par $\zeta\mapsto\psi(\zeta)=\ln|\zeta|^2+\varphi\circ\mu(\zeta)$ est plurisousharmonique dans l'ouvert $\mathcal{O}(-1)_U$. Celui-ci étant pseudoconvexe dans $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)_U\oplus\underline{\mathbb{C}}_U)$, l'ouvert $\{\psi<0\}$ de $\mathcal{O}(-1)$ est pseudoconvexe dans $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)_U\oplus\underline{\mathbb{C}}_U)$.

Utilisant le Lemme 2.1.8 de Hirschowitz,

$$\tilde{\Pi}:\mathbb{P}\big(\mathcal{O}(-1)_U\oplus\underline{\mathbb{C}}_U\big)\to\mathbb{P}\big(\mathcal{O}(-1)_V\oplus\underline{\mathbb{C}}_V\big)$$

est un espace étalé localement pseudoconvexe au-dessus de $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)_V\oplus\underline{\mathbb{C}}_V)$, donc $\{\psi<0\}\to\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)_V\oplus\underline{\mathbb{C}}_V)$ est étalé localement pseudoconvexe au-dessus de $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)_V\oplus\underline{\mathbb{C}}_V)$. En particulier, on peut appliquer le théorème précédent, il existe un $m_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout point P_0 de la frontière topologique de $\{\psi<0\}$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)_U\oplus\underline{\mathbb{C}}_U)$, pour toute suite de points de $\{\psi<0\}$ tendant vers P_0, on dispose d'une section $s\in H^0(\{\psi<0\},E^{m_0})$ de norme non bornée le long de la suite. Si $P_0\in\mathcal{O}(-1)$ alors $\frac{s}{\alpha_2^{m_0}}$ définit une section holomorphe de $\mathbb{P}^*\mathcal{O}(m_0)$ au-dessus de $\{\psi<0\}$ qui est non bornée le long de la suite. Comme $P_0\notin U$, $\zeta\mapsto\langle\frac{s}{\alpha_2^{m_0}},\zeta^{m_0}\rangle$ (où $\langle,\rangle$ désigne le crochet de dualité naturelle entre $\mathbb{P}^*\mathcal{O}(m_0)$ et $\mathcal{O}(-m_0)$) définit une fonction holomorphe sur $\{\psi<0\}$ de module non bornée le long de la suite. Si $P_0\in(\alpha_2=0)$, une section de $\mathcal{O}(l)$, $l\in\mathbb{N}$, au-dessus de U et non nulle en $\mathbb{P}(P_0)$, donne, par accouplement de dualité, une fonction holomorphe sur $\{\psi<0\}$, infinie en P_0. On dispose donc pour tout point de la frontière topologique de $\{\psi<0\}$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)_U\oplus\underline{\mathbb{C}}_U)$ d'une fonction holomorphe sur $\{\psi<0\}$ non bornée près de ce point. Utilisant un argument de Baire comme précédement, on construit une fonction holomorphe h dans $\{\psi < 0\}$ de module non borné au voisinage de tout point de la frontière topologique de $\{\psi < 0\}$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)_U \oplus \underline{\mathbb{C}}_U)$. Soit $\{W_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ un recouvrement ouvert de U par des ouverts de carte donnant une trivialisation de $\mathcal{O}(-1)$ au-dessus de W_i, $\tau_i : \mathcal{O}(-1)_{W_i} \simeq W_i \times \mathbb{C}$ des trivialisations associées. On écrit alors

$$\tau_i\big(\{\psi < 0\}_{W_i}\big) = \big\{(p,z) \in W_i \times \mathbb{C},\ \ln|z| + \ln d_i(p) + \tfrac{1}{2}\varphi(p) < 0\big\}$$

où d_i est une fonction lisse donnant la métrique du fibré $\mathcal{O}(-1)$ dans la trivialisation définie par τ_i. On obtient, dans chaque trivialisation, un domaine de Hartogs contenant son plan de symétrie $(z = 0)$, domaine d'existence de la fonction $h \circ \tau_i^{-1}$. Développant cette fonction en série de Hartogs de la variable z,

$$h \circ \tau_i^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_i^k(p) z^k\ ,$$

le théorème de Hartogs donne (voir [4]) :

$$\left(\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k} \ln|s_i^k|\right)^* = \ln d_i + \frac{1}{2}\varphi \Leftrightarrow \left(\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k} \ln|s_i^k| d_i^{-k}\right)^* = \frac{1}{2}\varphi$$

sur W_i. Notons

$$h \circ \tau_j^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_j^k(p) z^k,$$

on a, sur $W_i \cap W_j$, $h \circ \tau_j^{-1} = h \circ \tau_i^{-1} \circ (\tau_i \circ \tau_j^{-1})$, d'où

$$h \circ \tau_j^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_j^k(p) z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} s_i^k(p)(g_{ij} z)^k,$$

où on note g_{ij} l'automorphisme de transition du fibré $\mathcal{O}(-1)$ de la trivialisation (τ_j, W_j) à la trivialisation (τ_i, W_j). Par unicité du développement en série entière, on obtient $s_j^k = g_{ij}^k s_i^k$ c'est-à-dire $s_i^k = g_{ij}^{-k} s_j^k$. En particulier les fonctions $(s_i^k,\ k$ fixé $)$ se recollent en une section holomorphe globale s^k du fibré $\mathcal{O}(k)$ au-dessus de U. On a

$$\left(\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{k}\ln|s^k|\right)^* = \frac{1}{2}\varphi$$

où $|s^k|$ désigne la norme de la section s_k dans la métrique hermitienne sur $\mathcal{O}(k)$ (donnée par les fonctions d_i^{-k}). □

Remarque 9. – Considérons le cas particulier d'un ouvert pseudoconvexe U de $\mathbb{C}^n$ (ou plus généralement U variété de Stein). Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ une fonction QPSH. Comme U est une variété de Stein, il existe sur U une fonction ψ strictement plurisousharmonique exhaustive lisse. En particulier, il existe une fonction $\chi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe croissante telle que $\varphi+\chi\circ\psi$ soit plurisousharmonique. Appliquant le théorème de Lelong–Bremermann usuel, on trouve une suite h_j, $j\in\mathbb{N}$, de fonctions holomorphes sur U telle que

$$\varphi+\chi\circ\psi = \left(\overline{\lim_{j\to+\infty}}\frac{1}{j}\log|h_j|\right)^*,$$

ce qui s'écrit

$$\varphi = \left(\overline{\lim_{j\to+\infty}}\frac{1}{j}\log\bigl(|h_j|e^{-j\chi\circ\psi}\bigr)\right)^*.$$

On retrouve le théorème précédent, la fonction s'écrit comme limite supérieure de logarithme de sections des puissances du fibré trivial $\underline{\mathbb{C}}$ muni de la métrique $e^{-\chi\circ\psi}$.

COROLLAIRE 5.2. – *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une suite d'entiers $k_i>0$ et une suite de sections $s_{k_i}\in H^0(U,\mathcal{O}(k_i))$, tels que*

$$\varphi = \lim_{i\to+\infty}\frac{1}{k_i}\log|s_{k_i}|^2 \quad \textit{dans } L^1_{\mathrm{loc}}(U).$$

COROLLAIRE 5.3. – *Sous les hypothèses du théorème précédent, supposons de plus φ continue au voisinage d'un compact L de U, alors*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists s_1,\dots,s_r\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}}H^0\bigl(U,E^i\bigr)$$

de sorte que, sur L, on ait :

$$\varphi - \varepsilon \leqslant \max\left(\frac{1}{\nu_1}\log|s_1|^2, \ldots, \frac{1}{\nu_r}\log|s_r|^2\right) \leqslant \varphi$$

où les $\nu_1, \ldots, \nu_r$ *sont des entiers naturels.*

6. Le problème de Weierstrass dans les ouverts de variétés projectives

Dans [29], K. Weierstrass montre que les fonctions méromorphes sur des tores complexes s'écrivent comme quotient de fonctions théta. La théorie d'Oka montre que toute fonction méromorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ s'écrit comme quotient de fonction holomorphe. Les résultats de Lelong [19] pour le cas des hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ à croissance lente et ceux de Skoda [24] pour le cas général des hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ et des domaines de Stein, donnent des solutions avec contrôle de la croissance par les méthodes L^2. Un problème important est d'estimer le défaut de plurisousharmonicité et de corriger ce défaut pour les potentiels que l'on construit.

Si l'on s'intéresse à une variété holomorphiquement convexe M, une hypersurface n'est pas en générale contenue dans l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe : si les fibres de la réduction de Remmert $q : M \to S_M$ sont génériquement de dimension positive k, alors le degré de transcendance de $\mathcal{M}(M)$ sur $\mathcal{M}(S_M)$ est k. Si $k = 0$ (c'est-à-dire M est 1-convexe) alors toute fonction méromorphe sur M s'écrit sur M comme quotient de deux fonctions holomorphes. Cependant, si $k > 0$, nécessairement la projection du lieu polaire des fonctions $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{M}(M)$ donnant une base de transcendance sur $\mathcal{M}(S_M)$ est tout S_M. En particulier, ces fonctions ne sont pas quotient global de fonctions holomorphes. Nous montrons que l'on peut, sous l'hypothèse d'étalement au-dessus d'une variété projective, écrire ces fonctions, sur chaque compact, comme quotient de sections du fibré tordu $\mathcal{O}(l)$, $l \in \mathbb{N}$ assez grand, dépendant du compact.

Nous rappelons la proposition suivante de Demailly ([6], proposition 1.4) :

PROPOSITION 6.1. – *Soit X une variété analytique et Z un ensemble analytique dans X. Il existe une fonction* $\psi < -1$*, de classe* C^∞ *sur*

$X \setminus Z$, convergeant vers $-\infty$ au voisinage de Z et localement sommable sur X, et une $(1,1)$-forme réelle γ continue sur X ayant les propriétés suivantes :

(i) $i\partial\bar{\partial}\psi \geqslant \gamma$

(ii) *si α est un réel > 0, $e^{-\alpha\psi}$ est non intégrable au voisinage de tout point $z \in Z$ en lequel la codimension du germe Z_z est au plus égale à α.*

On en déduit :

THÉORÈME 6.2. – *Soit $\Pi : U \to V$ un espace étalé au-dessus d'une variété complexe munie d'une métrique kählérienne $\tilde{\omega}$. Soit $\tilde{E}$ un fibré hermitien strictement positif au-dessus de V. Notons $E = \Pi^*\tilde{E}$ munie de la structure hermitienne réciproque. Soit Z un ensemble analytique dans U. Soit $U_0 \subset U$ un ouvert relativement compact de U, localement pseudoconvexe au-dessus de V. Alors il existe sur U_0 une section $s \in H^0(U_0, E^{\otimes k})$ s'annulant sur Z, pour k assez grand.*

Preuve. – Notant $C(\tilde{E})$ la courbure du fibré $\tilde{E}$, comme $\Pi(U_0)$ est relativement compact dans V, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $iC(\tilde{E}) > \alpha\,\tilde{\omega}$ sur $\Pi(U_0)$. On peut supposer $\alpha = 1$. U_0 étant relativement compact dans U, un nombre fini de composantes irréductibles de Z rencontre U_0. On peut supposer Z irréductible sur U de codimension l. Considérons la fonction ψ, définie sur U, associée à Z par la Proposition 6.1. U_0 étant relativement compact dans U, il existe un entier n_0 tel que $l\gamma > -n_0\,\omega$ avec $\omega = \Pi^*\tilde{\omega}$ sur U_0.

Soit $p_0 \in U_0 \setminus Z$ et φ_{p_0} un potentiel singulier local (défini par $\varphi_{p_0}(p) = \theta(p)\log|z(p)|^{2n}$, avec θ fonction lisse à support compact dans $U_0 \setminus Z$, identiquement égale à 1 au voisinage de p_0, et z un système de coordonées locales centré en p_0). Il existe un entier n tel que $inC(E) + i\partial\bar{\partial}\varphi_{p_0} + i\mathrm{Ricci}(\omega) - n\,\omega > 0$ sur U_0. Choisissons une section C^∞, s_0 de $E^{\otimes n}$ à support compact dans petit voisinage de p_0 ne rencontrant pas Z, holomorphe au voisinage de p_0 et non nulle en p_0. $\Pi(U_0)$ étant de projection relativement compacte, appliquant le Théorème 2.1.11 on voit que U_0 privé d'une hypersurface est de Stein. Notons $\delta = \varphi_{p_0} + l\psi$. D'après [6], on peut résoudre le problème du $\bar{\partial}$ avec estimations L^2 sur U_0, par rapport à la métrique ω :

$$\bar{\partial}s_1 = \bar{\partial}s_0 \quad \text{et} \quad \int_{U_0} |s_1|^2 e^{-\delta}\,dV \leqslant \int_{U_0} |\bar{\partial}s_0|^2_{C(A,\delta)} e^{-\delta}\,dV.$$

(i) s_1 est nulle en p_0, $e^{-\varphi_{p_0}}$ étant non intégrable au voisinage de p_0 et s_1 y étant holomorphe,

(ii) s_1 étant holomorphe au voisinage de Z dans U_0 et de carré intégrable relativement à $e^{-l\psi}$ qui n'est pas localement intégrable près de Z doit s'annuler le long de Z.

On obtient donc une section holomorphe $s = s_0 - s_1$ non identiquement nulle, s'annulant le long de Z. $\square$

Remarque 10. – Si l'on ne suppose plus U_0 relativement compact dans U, il suffit d'avoir $Z \cap U_0$ relativement compact dans U pour avoir une section $s \in H^0(U_0, E^l)$ (l assez grand) s'annulant sur $Z \cap U_0$.

COROLLAIRE 6.3. – *Supposons de plus U réunion croissante d'ouverts relativement compacts et localement de Stein au-dessus de V. Alors tout sous ensemble analytique Z de V s'écrit sur chaque compact de U comme l'intersection d'exactement $n+1$ sections du fibré $E^{\otimes k}$, définies au voisinage du compact. L'entier k dépendant du compact.*

Remarque 11. –

(i) Le Corollaire 6.3 s'applique en particulier aux ouverts faiblements pseudoconvexes (i.e., admettant une fonction plurisousharmonique exhaustive).

(ii) Considérons un espace étalé $\Pi : U \to V$ au-dessus d'une variété projective de dimension n. Il est classique que si U contient une courbe compacte C qui s'écrit au voisinage de C comme intersection complète des zéros de $n-1$ sections du fibré $\Pi^*\mathcal{O}(l)$, alors U est pseudoconcave au sens d'Andreotti [1]. En particulier, toute fonction méromorphe sur U est algébrique, elle s'écrit donc comme quotient de deux sections holomorphes sur U du fibré $\Pi^*\mathcal{O}(k)$ pour k assez grand. Dans le cas des étalements au-dessus d'une surfaces, on voit que l'existence d'une courbe compacte $C \subset U$, vérifiant $[C]^2 > 0$, suffit à assurer la pseudoconcavité de U.

Pour plus de détails, on pourra consulter [1,9].

RÉFÉRENCES

[1] A. ANDREOTTI, Théorème de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves, *Bull. Soc. Math. France* 91 (1963) 1–38.

[2] A. ANDREOTTI and W. STOLL, Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions, in: *Lecture Notes in Math.*, Vol. 234, Springer, Berlin, 1971.

[3] S. ASSERDA, The Levi problem on projective manifolds, *Math. Z.* 219 (1995) 631–636.

[4] H.J. BREMERMANN, On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions, *Math. Ann.* 131 (1) (1956) 76–86.

[5] G. COEURÉ, *Analytic Functions and Manifolds in Infinite Dimensional Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[6] J.P. DEMAILLY, Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semipositif au-dessus d'une variété kählérienne complète, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 15 (4) (1982) 457–511.

[7] J.P. DEMAILLY, Regularization of closed positive currents and intersection theory, *J. Algebraic Geometry* 1 (1992) 361–409.

[8] P. DINGOYAN, Fonctions méromorphes sur un ouvert localement pseudoconvexe étalé au-dessus d'une variété projective, *C. R. Acad. Sci. Paris* 324 (1) (1997) 817–822.

[9] P. DINGOYAN, Fonctions méromorphes sur un espace étalé localement pseudoconvexe au-dessus d'une varíté projective, Prébublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 9994 du CNRS, France (130), Juin 1997.

[10] K. DOCQUIER und H. GRAUERT, Levisches Problem und Rungerscher Satz für Teilgebiete Steincher Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 140 (1960) 94–123.

[11] G. ELENCWAJG, Pseudoconvexité locale dans les variétés kählériennes, *Ann. Inst. Fourier* 25 (2) (1980) 295–314.

[12] R. FUJITA, Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, *J. Math. Soc. Japan* 15 (1963) 443–473.

[13] PH.A. GRIFFITHS, Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, in: *Global Analysis, Pap. Hon. K. Kodaira*, Princeton Univ. Press, 1969, pp. 185–251.

[14] A. GROTHENDIECK, *Topological Vector Spaces*, Notes on Mathematics and Its Applications, Gordon and Breach, 2nd Edn., 1975.

[15] F. HARTOGS, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, *Münch. Ber.* 36 (1906) 223–242.

[16] A. HIRSCHOWITZ, Pseudoconvexité au-dessus d'espaces plus ou moins homogènes, *Invent. Math.* 26 (1974) 303–322.

[17] J. KAJIWARA and E. SAJAI, Generalisation of Levi–Oka's theorem concerning meromorphic functions, *Nagoya Math. J.* 29 (1967) 75–84.

[18] P. LELONG, Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 58 (1941) 83–177.

[19] P. LELONG, *Fonctions Entières et Fonctionnelles Analytiques*, Presse de Montréal, 1968.

[20] E.E. LEVI, Studii dui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, *Annali di Math.* 17 (3) (1910) 61–87.

[21] T. NAPIER, Convexity properties of coverings of smooth projective varieties, *Math. Ann.* 286 (1990) 433–479.

[22] K. OKA, Sur les fonctions de plusieurs variables, IX. Domaine fini sans point critique intérieur, *Jap. J. Math.* 23 (1953) 97–155.

[23] K.R. PINNEY, Line bundle convexity of pseudoconvex domains in complex manifolds, *Math. Z.* 206 (1991) 605–605.
[24] H. SKODA, Nouvelle méthode pour l'etude des potentiels associés aux ensemble analytiques, in : *Séminaire Pierre Lelong (Analyse) Ann. 1972/73*, Lecture Notes in Math., Vol. 410, Springer, Berlin, 1974.
[25] H. SKODA, Morphismes surjectifs et fibrés linéaires semi-positifs, in : *Séminaire Pierre Lelong–Henri Skoda (Analyse) Ann. 1978/79*, Lecture Notes in Math., Vol. 822, Springer, Berlin, 1980.
[26] O. SUZUKI, Pseudoconvex domains on kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 12 (1976–1977) 121–214.
[27] A. TAKEUCHI, Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes, *J. Math. Kyoto Univ.* 6 (1967) 323–357.
[28] T. UEDA, Pseudoconvex domains over grassmann manifolds, *J. Math. Kyoto Univ.* 20 (2) (1980) 391–394.
[29] K. WEIERSTRASS, Untersuchungen über die $2r$-fachen periodischen Funktionen von r Veränderlichen, *J. Reine Angew. Math.* 89 (1880) 1–8.