FORMULE DE LOCALISATION EN SUPERGÉOMETRIE

P. Lavaud

Introduction

Le but de ce travail est d'étendre à la situation supergéométrique la formule de localisation de Berline-Vergne ([BV83b],[BV83a]) à travers le formalisme de la cohomologie équivariante.

Dans la situation supergéométrique les formes différentielles usuelles forment un complexe non borné supérieurement, et ne peuvent être intégrées. Bernstein et Leites ont introduit la classe des formes pseudodifférentielles. Soit M une supervariété, les formes pseudodifférentielles sur M sont les fonctions sur sur $\widehat{M} = \Pi TM$ le fibré tangent sur lequel on a renversé la parité dans les fibres. Les formes différentielles usuelles sont les fonctions sur $\widehat{M}$ polynomiales le long des fibres.

La différentielle extérieure et la contraction $\iota(\xi)$ par un champ de vecteurs ξ s'étendent naturellement à l'espace des formes pseudodifférentielles. Les opérateurs d et $\iota(\xi)$ s'interprètent comme des champs de vecteurs sur la supervariété $\widehat{M}$. Parmi les formes pseudodifférentielles, celles qui sont à support compact sur M et à décroissance rapide le long des fibres sont intégrables moyennant le choix d'une orientation (dans un sens à préciser) de la supervariété M. Toutes ces définitions occupent la première partie.

Dans une seconde partie, on s'intéresse aux superalgèbres de Clifford. Soit V un supermodule muni d'une forme bilinéaire superantisymétrique non-dégénérée Q. On note $C(V, Q)$ la superalgèbre de Clifford associée à cette donnée. On rappelle dans cette partie quelques résultats sur les représentations irréductibles des algèbres de Clifford classiques.

L'espace des éléments homogènes de degré 2 forme une superalgèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{osp}(V, Q)$. On a ainsi un isomorphisme entre $\mathfrak{osp}(V, Q)$ et les formes différentielles de degré 2. A l'aide de cet isomorphisme on définit un superpfaffien. L'étude du superpfaffien occupe la troisième partie. On considère $\mathfrak{osp}(V, Q)$ comme une supervariété. Ce superpfaffien est une fonction généralisée sur $\mathfrak{osp}(V, Q)$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ et inversible sur l'ouvert des éléments inversibles de $\mathfrak{osp}(V, Q)$. On détermine en particulier le front d'onde du superpfaffien en 0 et on le majore sur le reste de l'espace de ses singularités.

Dans une quatrième partie, on s'intéresse à la cohomologie équivariante des supervariétés, définie à partir des formes pseudodifférentielles.

On rappelle dans cette partie la notion de superconnexion introduite par Quillen et étendue au cas d'un super fibré au dessus d'une supervariété. Cela permet de définir une superforme de Thom équivariante pour un tel superfibré et d'avoir, dans ce contexte, une égalité entre classes de cohomologie analogue à l'isomorphisme de Thom dans ce contexte. On définit également une superforme d'Euler, ainsi qu'un inverse d'une forme d'Euler. L'isomorphisme de Thom permet d'obtenir une première formule de localisation fondamentale pour la suite.

La cinquième partie est consacrée à la formule de localisation. Soit G un supergroupe de Lie et M une G-supervariété munie d'une superstructure euclidienne G-invariante (on précisera ce que l'on entend par là). Soit α une forme équivariante fermée. Soit X un élément homogène pair de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Il définit un champ de vecteurs X_M sur M. Alors on peut localiser au voisinage de X l'intégrale de α sur M –qui est une fonction (généralisée) sur $\mathfrak{g}$– en une intégrale sur la variété $M(X)$ des zéros du champ de vecteurs X_M. Si les zéros sont isolés (c'est-à-dire $M(X)$ discrète), on note, pour tout p de $M(X)$, τ_p la représentation de $\mathfrak{g}$ dans T_pM et j_p l'injection de $\{p\}$ dans M. On a alors la formule suivante, valable sur un voisinage de X dans $\mathfrak{g}(X)$ le centralisateur de X dans $\mathfrak{g}$:

$$\int_M \alpha = (2\pi)^{\frac{n+m}{2}} \sum_{p \in M(X)} \frac{j_p^*(\alpha)}{\tau_p^*(Spf)}$$

où Spf désigne le superpfaffien, $dim(M) = (n,m)$. Dans le cas des zéros non isolés on a une formule analogue avec au lieu d'une sommation, une intégration sur $M(X)$, au lieu de $\tau_p^*(SPf)$, la classe d'Euler équivariante $\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}$ du fibré normal $T_N(M(X))$ dans M à la sous-supervariété $M(X)$ et au lieu de (n,m), (k,l) la dimension des fibres de $T_N(M(X))$.

Enfin, dans la dernière partie, on étudie quelques exemples de transformée de Fourier d'orbites coadjointes. Soit G un supergroupe et M une orbite coadjointe de G. Alors M est munie (cf [Kos77]) d'une superstructure symplectique G-invariante que l'on note ω. On note μ l'application moment de l'action de G sur M. La transformée de Fourier de M est par définition l'intégrale (on précisera les conditions pour qu'elle ait un sens comme fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$) :

$$\int_{M_\lambda} \exp(i\mu_\lambda + \omega_\lambda).$$

On calcule ces transformées de Fourier dans quelques cas particuliers, éventuellement à l'aide de la formule de localisation, et on les compare aux caractères de représentations irréductibles unitaires de G.

Table des matières

PARTIE I

Préliminaires

Dans tout ce qui suit le corps de base est $\mathbb{R}$.

1. Algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée

1.1. Superespaces vectoriels, superalgèbres.

1.1.1. *Superespaces vectoriels.* On appelle superespace vectoriel (réel) un espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué. On note $|v|$ la parité d'un élément v de V. Si V et V' sont deux superespaces vectoriels l'espace des morphismes de V dans V' est alors naturellement $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué. On note $\mathcal{L}(V, V')$ l'espace des applications linéaires de V dans V' et $\mathcal{L}(V, V')_0$ (resp. $\mathcal{L}(V, V')_1$) l'espace des applications linéaires paires (resp. impaires).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(V, V')_0 =& \{f \in \mathcal{L}(V, V'), f(V_i) \subset V'_i, i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\},\\ \mathcal{L}(V, V')_1 =& \{f \in \mathcal{L}(V, V'), f(V_i) \subset V'_{i+1}, i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

On note $\mathcal{L}(V)$ ou $End(V)$ l'espace $\mathcal{L}(V, V)$ des endomorphismes de V.

Exemple: $\mathbb{R}^{(n,m)} = \mathbb{R}^n \oplus \Pi\mathbb{R}^m$ avec $(\mathbb{R}^{(n,m)})_0 = \mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^{(n,m)})_1 = \mathbb{R}^m$, le symbole Π signifiant que l'on a pris la parité opposée.

1.1.2. *Superalgèbres.* On appelle superalgèbre une algèbre associative unitaire $\mathcal{A}$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée, c'est-à-dire vérifiant pour $i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}.$$

On dira que $\mathcal{A}$ est supercommutative si, pour a et b dans $\mathcal{A}$ homogènes (on note $|a|, |b|$ leurs parités respectives), on a :

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba.$$

Par exemple, la superalgèbre $End(V)$ des endomorphismes d'un superespace vectoriel est une superalgèbre non-supercommutative si $dim(V) \geq 2$. L'algèbre extérieure de $\mathbb{R}^m$, $\bigwedge \mathbb{R}^m$, $(m \in \mathbb{N})$ est une superalgèbre supercommutative

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux superalgèbres, on définit les morphismes de superalgèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ comme les éléments ϕ de $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})_0$ qui sont des morphismes d'algèbres. On note $Mor(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ l'espace des morphismes de superalgèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre. Un automorphisme de $\mathcal{A}$ est donc un automorphisme pair ϕ de superespace vectoriel tel que pour $a, a' \in \mathcal{A}$ on ait $\phi(aa') = \phi(a)\phi(a')$. On introduit également la notion d'antiautomorphisme. Un antiautomorphisme $* : a \mapsto a^*$, est un automorphisme pair de superespace vectoriel tel que pour $a, a' \in \mathcal{A}$ homogènes, on ait :

$$(aa')^* = (-1)^{|a||a'|}(a')^* a^*.$$

Exemple: Lorsque $\mathcal{A}$ est supercommutative l'identité est à la fois un automorphisme et un antiautomorphisme de $\mathcal{A}$.

1.1.3. *Superalgèbres proches.* Une superalgèbre proche est une superalgèbre locale de dimension finie supercommutative de corps résiduel $\mathbb{R}$.

Exemple: La superalgèbre $\bigwedge \mathbb{R}^m$ est pour tout entier naturel m une superalgèbre proche.

1.2. Supermodules.

1.2.1. *Définition.* Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre. On appelle $\mathcal{A}$-supermodule à gauche un $\mathcal{A}$-module à gauche M muni d'une graduation $M = M_0 \oplus M_1$ telle que si a et v sont homogènes, $|av| = |a| + |v|$. De même on appelle $\mathcal{A}$-supermodule à droite, un $\mathcal{A}$-module à droite M muni d'une graduation $M = M_0 \oplus M_1$ telle que si a et v sont homogènes, $|va| = |a| + |v|$. On dira, sauf s'il y a risque de confusion, $\mathcal{A}$-supermodule pour $\mathcal{A}$-supermodule à gauche.

Exemple: Si V est un superespace vectoriel, il est canoniquement muni d'une structure de $End(V)$-supermodule.

1.2.2. *Multiplication à droite associée.* Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre. Soit M un $\mathcal{A}$-supermodule à gauche. Si $\mathcal{A}$ est de plus munie d'un antiautomorphisme $*$, on associe à la multiplication à gauche une multiplication extérieure à droite en posant pour $a \in A$ et $v \in V$ homogènes :

$$av = (-1)^{|a||v|} va^*.$$

La multiplication à gauche et multiplication à droite ne commutent pas en général si $\mathcal{A}$ n'est pas supercommutative.

1.2.3. *Rang d'un $\mathcal{A}$-supermodule.* Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre et M un $\mathcal{A}$-supermodule. On dit que M est libre de rang (n, m) s'il existe une base de M sur $\mathcal{A}$ constituée d'éléments homogènes et qui ait n éléments pairs et m éléments impairs.

1.2.4. *Morphismes de $\mathcal{A}$-supermodules.* Si $\mathcal{A}$ est une superalgèbre et si M et N sont deux $\mathcal{A}$-supermodules, on note $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M, N)$ l'espace des morphismes $\mathcal{A}$-linéaires de supermodules, c'est-à-dire l'espace des morphismes ϕ d'espaces vectoriels tels que l'on ait, si ϕ est homogène, pour $a \in \mathcal{A}$ et $v \in V$ homogènes, $\phi(av) = (-1)^{|\phi||a|}a\phi(v)$. Si $M = N$ on note $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)$ ou $End_{\mathcal{A}}(M)$ l'espace des endomorphismes de M.

Si M et N sont deux $\mathcal{A}$-supermodules à droite, on note $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M, N)$ l'espace des morphismes de $\mathcal{A}$-supermodules, c'est-à-dire l'espace des morphismes ϕ d'espaces vectoriels tels que pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $v \in M$ on ait $\phi(va) = \phi(v)a$.

Dans les deux cas (module à droite ou à gauche), $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)$ est muni d'une structure d'anneau en prenant pour addition et multiplication l'addition et la composition des morphismes d'espaces vectoriels. Supposons $\mathcal{A}$-supercommutative. Si M est un supermodule à gauche, on donne à $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)$ une structure de $\mathcal{A}$-superalgèbre en posant pour $\phi \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M), a \in \mathcal{A}$ homogènes et $v \in M$:

$$(a\phi)(v) := a(\phi(v)).$$

Si M est un supermodule à droite, on donne à $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)$ une structure de $\mathcal{A}$-superalgèbre en posant pour $\phi \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M), a \in \mathcal{A}, v \in M$ homogènes :

$$(a\phi)(v) := (-1)^{(|\phi|+|v|)|a|}\phi(va).$$

Supposons que M soit un $\mathcal{A}$-supermodule à droite. On peut, si M est libre de rang fini (n, m), une fois effectué le choix d'une base de M sur $\mathcal{A}$ représenter de façon matricielle les éléments de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)$. La superalgèbre $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)$ est alors isomorphe à l'ensemble des matrices $(n + m, n + m)$ à coefficients dans $\mathcal{A}$ muni du produit matriciel habituel. On note $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathcal{A})$ l'espace des matrices $(n + m, n + m)$ à coefficients dans $\mathcal{A}$.

Précisons cet isomorphisme. Soit $(e_1, \ldots, e_{n+m})$ une base homogène de M avec $|e_i| = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $|e_i| = 1$ pour $n + 1 \leq i \leq n + m$. Soit $\phi \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)$, on pose $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n+m} e_i\phi_{i,j}$. On associe à ϕ la matrice

$$M_\phi := \Big(\phi_{i,j}\Big)_{1\leq i,j\leq n+m}.$$

L'isomorphisme $\phi \mapsto M_\phi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-superalgèbres. Supposons $\mathcal{A}$ supercommutative. La structure de $\mathcal{A}$-superalgèbre sur $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M)$ passe à l'espace des matrices par la relation suivante :

$$M_{a\phi} = \begin{pmatrix} aI_n & 0 \\ 0 & (-1)^{|a|}aI_m \end{pmatrix} M_\phi,$$

où I_n représente la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$.

Si on associe au vecteur $v = \sum\limits_i e_i a_i$ de M le vecteur colonne $V := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+m} \end{pmatrix}$, le vecteur $M_\phi V$ sera associé au vecteur $\phi(v)$.

L'espace $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathcal{A})$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué de la manière suivante :

$$\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathcal{A})_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{array}{l} A \text{ et } D \text{ à coefficients dans } \mathcal{A}_0 \\ B \text{ et } C \text{ à coefficients dans } \mathcal{A}_1 \end{array} \right\},$$

et

$$\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathcal{A})_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{array}{l} A \text{ et } D \text{ à coefficients dans } \mathcal{A}_1 \\ B \text{ et } C \text{ à coefficients dans } \mathcal{A}_0 \end{array} \right\}.$$

On note $\mathfrak{gl}(n,m)$ l'espace $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{gl}(n,m,\mathcal{A})$ l'espace $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathcal{A})$.

Supposons $\mathcal{A}$ supercommutative. On pose si $M \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathcal{A})_0$:

$${}^{str}M = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ -{}^tB & {}^tD \end{pmatrix},$$

(^{t} dénote la transposée ordinaire) et si $M \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathcal{A})_1$:

$${}^{str}M = \begin{pmatrix} {}^tA & -{}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}.$$

On dit que ${}^{str}M$ est la supertransposée de M. La supertransposition est un anti-automorphisme de $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathcal{A})$.

1.2.5. *Supertrace et trace étrange.* On suppose dans cette sous-section $\mathcal{A}$ supercommutative. On définit la supertrace sur $\mathfrak{gl}(n,m,\mathcal{A})$ par la formule suivante où $M = M_0 + M_1$ avec $M_0 \in \mathfrak{gl}(n,m,\mathcal{A})_0$ et $M_1 \in \mathfrak{gl}(n,m,\mathcal{A})_1$:

$$Str(M) = tr(A_0) + tr(A_1) - tr(D_0) + tr(D_1).$$

C'est une forme linéaire paire sur $\mathfrak{gl}(n,m,\mathcal{A})$ ($Str \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{gl}(n,m,\mathcal{A}),\mathcal{A})$) muni de la structure de $\mathcal{A}$-algèbre définie plus haut. En effet on a :

$$Str(a \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & (-1)^{|a|}I_m \end{pmatrix} M) = aStr(M).$$

Considérons maintenant la sous-superalgèbre ("étrange") de $\mathfrak{gl}(n,n,\mathcal{A})$ constituée des matrices de $\mathfrak{gl}(n,m,\mathcal{A})_0$ $A = D$ et $B = -C$, et des matrices de $\mathfrak{gl}(n,m,\mathcal{A})_1$

telles que $A = -D$ et $B = C$. On la note $\mathfrak{q}(n, \mathcal{A})$. On définit, pour $M \in \mathfrak{q}(n, \mathcal{A})$, une forme linéaire impaire à valeurs dans $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$:

$$Qtr(M) := 2i(-1)^{|M|}tr(B) = -2itr(C).$$

On l'appelle la trace "étrange".
Remarque: Le facteur $2i$ permet la cohérence avec la formule de la section **II.2**, $Qtr(X) = Str(\Gamma X)$, où Γ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^{n,0}$ sur $\mathbb{R}^{0,n}$ de carré l'identité.

1.2.6. *Changement de parité.* Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre. Soit $M = M_0 \oplus M_1$ un $\mathcal{A}$-supermodule. On lui associe le superespace vectoriel $\Pi M = (\Pi M)_0 \oplus (\Pi M)_1$ tel que $(\Pi M)_0 = M_1$ et $(\Pi M)_1 = M_0$. On définit le morphisme de changement de parité $\bar{\pi} \in \mathcal{L}(M, \Pi M)_1$ comme l'application identique de M dans ΠM (M et ΠM étant considérés comme espaces vectoriels). On donne à ΠM une structure de $\mathcal{A}$-supermodule de sorte que $\bar{\pi}$ soit un élément impair de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M, \Pi M)$ en posant pour $a \in \mathcal{A}$ et $v \in M$ homogènes :

$$a\bar{\pi}(v) = (-1)^{|a|}\bar{\pi}(av).$$

Avec ces conventions on a si $\mathcal{A}$ est munie d'un antiautomorphisme $a \mapsto a^*$:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(v)a^* &= (-1)^{(|v|+1)|a|}a\bar{\pi}(v) \\ &= (-1)^{|v||a|}\bar{\pi}(av) \\ &= \bar{\pi}(va^*). \end{aligned}$$

Si M est libre de rang (n, m) sur $\mathcal{A}$, ΠM est libre de rang (m, n) sur $\mathcal{A}$.

1.2.7. *Dualité.* Si V est un superespace vectoriel, on note V^* son dual, c'est-à-dire l'espace des morphismes linéaires de V dans $\mathbb{R}$. Si $\phi \in V^*$ et $v \in V$, on pose $< \phi, v >= \phi(v)$. Si V est de dimension finie (n, m), si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V_0 et $(f_1, \ldots, f_m)$ une base de V_1, on note $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base de V_0^* telle que $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (on a $\langle e_i^*, V_1 \rangle = \{0\}$ car e_i^* est pair). De même on note $(f_1^*, \ldots, f_m^*)$ la base de V_1^* telle que $\langle f_i^*, f_j \rangle = \delta_{i,j}$ (et $\langle f_i^*, V_0 \rangle = \{0\}$).

Si V est muni de plus d'une topologie on peut considérer son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur V. On le note $V' := \mathcal{L}_c(V, \mathbb{R})$.

Si $\mathcal{A}$ est une superalgèbre supercommutative et M un $\mathcal{A}$-supermodule, on pose $M^{*_{\mathcal{A}}} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A})$. Si M et $\mathcal{A}$ sont munis d'une topologie on définit également le dual topologique : $M'^{\mathcal{A}} = \mathcal{L}_{c,\mathcal{A}}(M, \mathcal{A})$ l'espace des formes $\mathcal{A}$-linéaires continues sur M.

On pose si $\phi \in M^{*_{\mathcal{A}}}$ et $v \in M$ sont homogènes :

$$< v, \phi >:= (-1)^{|v||\phi|} < \phi, v > .$$

Si V est un superespace vectoriel de dimension finie, cette relation détermine un isomorphisme entre V et $(V^*)^*$. Avec ces conventions, si $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ est une base de V, on a $(e_i^*)^* = e_i$ et $(f_j^*)^* = -f_j$ car ($\delta_{i,j}$ étant le symbole de Kronecker)

$$\begin{aligned} < e_j, e_i >= \delta_{i,j} &=< (e_i^*)^*, e_j > \\ &=< e_j^*, (e_i^*)^* >, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} < f_j, f_i >= \delta_{i,j} &=< (f_i^*)^*, f_j > \\ &= - < f_j^*, (f_i^*)^* > \end{aligned}$$

1.2.8. *Produit tensoriel.* Soient M et N deux superespaces vectoriels on définit de manière habituelle le produit tensoriel $M \otimes N$ de M et N. C'est un superespace vectoriel. Si M et N sont de plus deux espaces localement convexes dont les topologies sont définies par des semi-normes p_α et q_β respectivement, on munit $M \otimes N$ de la famille de semi-normes $p_{\alpha,\beta}$ définie pour tout $x \in M \otimes N$ par :

$$p_{\alpha,\beta}(x) := Inf \sum_i p_\alpha(x_i) q_\beta(y_i),$$

où l'Inf est pris sur l'ensemble des écritures $x = \sum\limits_i x_i \otimes y_i$. On note $M \widehat{\otimes} N$ l'espace complété de $M \otimes N$ pour la topologie définie par cette famille de semi-normes.

1.2.9. *Algèbres supersymétriques.* Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre supercommutative et M un $\mathcal{A}$-supermodule. On note $T(M) := \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} M^{\otimes i}_{\mathcal{A}}$ l'algèbre tensorielle de M sur $\mathcal{A}$ avec $M^{\otimes i}_{\mathcal{A}} = M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \ldots \underset{\mathcal{A}}{\otimes} M$ (i fois) et $M^{\otimes 0}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. L'espace $T(M)$ est naturellement muni d'une structure de superalgèbre sur $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{I}$ l'idéal de $T(M)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ pour x et y homogènes. On appelle algèbre supersymétrique de M la superalgèbre supercommutative :

$$S(M) := T(M)/\mathcal{I}.$$

1.3. Formes bilinéaires.

DÉFINITION 1.1. *Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre supercommutative. Soit M un $\mathcal{A}$-supermodule et $\mathcal{C}$ un $\mathcal{A}$-supermodule. On appelle forme $\mathcal{A}$-bilinéaire sur M à valeurs dans $\mathcal{C}$ une application $\mathcal{B}$ de $M \times M$ dans $\mathcal{C}$, qui s'écrit $\overline{\mathcal{B}} \circ \phi$ où ϕ est la projection canonique de $M \times M$ sur $M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} M$ et $\overline{\mathcal{B}}$ est un élément de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} M, \mathcal{C})$.*

On munit naturellement $\mathcal{B}$ de la parité de $\overline{\mathcal{B}}$. On a donc pour $\mathcal{B}$ homogène et $a \in \mathcal{A}$, $v, w \in M$ homogènes, les relations :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(va, w) &= \mathcal{B}(v, aw), \\
\mathcal{B}(v, wa) &= \mathcal{B}(w, v)a, \\
\mathcal{B}(av, w) &= (-1)^{|\mathcal{B}||a|} a\mathcal{B}(v, w).
\end{aligned}$$

On dit que $\mathcal{B}$ est supersymétrique si pour tout v et tout w homogènes dans M, on a :

$$\mathcal{B}(v, w) = (-1)^{|v||w|}\mathcal{B}(w, v).$$

On dit que $\mathcal{B}$ est superantisymétrique si pour tout v et tout w homogènes dans M, on a :

$$\mathcal{B}(v, w) = -(-1)^{|v||w|}\mathcal{B}(w, v).$$

Si $\mathcal{B}$ est une forme bilinéaire homogène sur V on définit une forme bilinéaire $\Pi\mathcal{B}$ sur ΠV en posant pour tout v et tout w homogènes dans V :

$$\Pi\mathcal{B}(\pi v, \pi w) = (-1)^{|v|+|\mathcal{B}|}\mathcal{B}(v, w).$$

Lorsque l'on ne précise pas $\mathcal{C}$, on sous-entend formes bilinéaires à valeurs dans $\mathcal{A}$.

On vérifie que $\Pi\mathcal{B}$ est bien une forme bilinéaire sur ΠV et on a de plus la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1. *Si $\mathcal{B}$ est homogène, la forme $\Pi\mathcal{B}$ est homogène de même parité que $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ est de plus supersymétrique alors $\Pi\mathcal{B}$ est superantisymétrique et si $\mathcal{B}$ est superantisymétrique $\Pi\mathcal{B}$ est supersymétrique.*

Démonstration: La première propriété est évidente. Si v et w sont des éléments homogènes de V, on a :

$$\begin{aligned}
\Pi\mathcal{B}(\pi w, \pi v) &= (-1)^{|\mathcal{B}|+|w|}\mathcal{B}(w, v) \\
&= (-1)^{|\mathcal{B}|+|w|+|v||w|}\mathcal{B}(v, w) \\
&= (-1)^{|v|+|w|+|v||w|}\Pi\mathcal{B}(\pi v, \pi w) \\
&= -(-1)^{(|v|+1)(|w|+1)}\Pi\mathcal{B}(\pi v, \pi w).
\end{aligned}$$

Ceci montre la seconde propriété annoncée (le passage de superantisymétrique à symétrique est similaire). $\diamondsuit$

DÉFINITION 1.2. *Soit $\mathcal{B}$ une forme bilinéaire supersymétrique sur M. Soit ϕ un morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$, on note $\widetilde{M}$ le superespace vectoriel réel $M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} (\mathcal{A}/(ker\phi))$, et on note $\widetilde{\mathcal{B}}$ la forme sur $\widetilde{M}$ obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par passage au quotient de $\phi \circ \mathcal{B}$. Une forme supersymétrique paire sera dite de signature (p, q) relativement à ϕ, si la* *restriction à* $\widetilde{M}_0$ *(qui est un espace vectoriel) de la forme* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *est de signature* (p, q). *Nous dirons que* $\mathcal{B}$ *est définie positive (resp. négative) relativement à* ϕ *si la forme* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *est non dégénérée et si sa restriction à* $\widetilde{M}_0$ *est une forme définie positive (resp. négative). Si* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *est dégénérée et si sa restriction à* $\widetilde{M}_0$ *est définie positive (resp. négative), on dira que* $\mathcal{B}$ *est faiblement définie positive (resp. négative) relativement à* ϕ.

Si V *est un superespace vectoriel muni d'une forme bilinéaire réelle* $\mathcal{B}$ *paire supersymétrique définie positive, on dira que* $\mathcal{B}$ *est un superproduit scalaire, et que* V *a une superstructure euclidienne. Si* $\mathcal{B}$ *est faiblement définie positive, on dira que* V *a une superstructure euclidienne faible.*

Remarque: Comme $\mathcal{B}(M_0, M_1) \subset \mathcal{A}_1$, on a $\widetilde{\mathcal{B}}(M_0, M_1) = \{0\}$. Ceci montre que la non dégénérescence de $\widetilde{\mathcal{B}}$ implique en particulier que la restriction de $\widetilde{\mathcal{B}}$ à $\widetilde{M}_1$ est une forme symplectique.

2. Supergéométrie

2.1. Supervariétés.

2.1.1. *Faisceaux de superalgèbres.* Soit M un espace topologique. Dans toute la suite nous supposerons toujours les espaces topologiques dénombrables à l'infini. On appelle faisceau de superalgèbres sur M un faisceau d'algèbres $\mathcal{F}$ tel que pour tout ouvert U de M, $\mathcal{F}(U)$ soit une superalgèbre, et si $U \subset V$ le morphisme ρ_V^U : $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ soit un morphisme de superalgèbres. Un morphisme d'espaces muni de faisceaux de superalgèbres est la donnée d'un morphisme d'espaces topologiques $\phi : M \to N$ et pour chaque ouvert U de N d'un morphisme de superalgèbres $\phi^* : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\phi^{-1}(U))$ tels que les morphismes ϕ commutent aux morphismes de restriction.

2.1.2. *La supervariété* $\mathbb{R}^{(n,m)}$.

Définition 2.1. *La supervariété* $\mathbb{R}^{(n,m)}$ *est la donnée de* $\mathbb{R}^n$ *munie du faisceau de superalgèbres supercommutatives suivant :*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(U) := \mathcal{C}^\infty(U) \otimes \bigwedge(\mathbb{R}^m)^*, \quad \forall U \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{ouvert.}$$

On note $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{(n,m)}$ (elle est homogène : $|e_i| = 0$ et $|f_j| = 1$). On note $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ la base duale de sorte que $x_i = e_i^*$ et $\xi_j = f_j^*$. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en les variables paires $x_1, \ldots, x_n$ et polynomiales en les variables impaires $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Si $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(\mathbb{R}^{(n,m)})$, on note :

$$f = \sum_I f_I(x_1, \ldots, x_n)\xi_I,$$

où I désigne un sous ensemble de $\{1, \ldots, m\}$ et si $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ avec $i_1 < \ldots < i_k$, $\xi_I := \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}$.

Si U_0 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit que $U := (U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{(n,m)}}|_{U_0})$ est l'ouvert de $\mathbb{R}^{(n,m)}$ défini par U.

2.1.3. *Définition d'une supervariété.*

DÉFINITION 2.2. *Une supervariété M (réelle) $\mathcal{C}^\infty$ de dimension (n, m) est un espace topologique M_0 séparé, dénombrable à l'infini, muni d'un faisceau de superalgèbres supercommutatives $\mathcal{O}_M$ vérifiant les conditions suivantes. Il existe un recouvrement ouvert $\bigcup_{i \in I} U_i = M_0$ (où I est un ensemble) de M_0 et pour tout $i \in I$ un isomorphisme ϕ_i entre $(U_i, \mathcal{O}_M|_{U_i})$ et un ouvert $V_i = ((V_i)_0, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{(n,m)}}|_{V_i})$ de $\mathbb{R}^{(n,m)}$.*

Si U est un ouvert de M isomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{(n,m)}$, on dit que U est ouvert de coordonnées de M.

On a la propriété suivante :

PROPOSITION 2.1. *Soit $\mathcal{C}^0_{M_0}$ le faisceau des fonctions continues sur M_0. Il existe un unique morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_M$ dans $\mathcal{C}^0_{M_0}$ tel qu'il existe une (unique) structure de variété différentielle sur M_0 pour laquelle $\mathcal{C}^\infty_{M_0}$ soit le faisceau image de ce morphisme. Le noyau de ce morphisme est le faisceau $\mathcal{O}^1_M$ d'idéaux de $\mathcal{O}_M$ tel que pour tout ouvert U de M_0, $\mathcal{O}^1_M(U)$ est l'idéal des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_M(U)$.*

Démonstration: Soit ϕ un morphisme de $\mathcal{O}_M$ dans $\mathcal{C}^0_{M_0}$. Soit U un ouvert de M_0 et $f \in \mathcal{O}^1_M$, alors nécessairement $\phi(f)$ est nilpotent. Or le seul élément nilpotent de $\mathcal{C}^0_{M_0}$ est 0, donc $\mathcal{O}^1_M(U)$ est inclus dans le noyau de ϕ pour tout ouvert U. On note $\mathcal{F}$ le faisceau quotient $\mathcal{O}_M/\mathcal{O}^1_M$. On constate alors que $(M_0, \mathcal{F})$ est une variété $\mathcal{C}^\infty$. En effet sur les ouverts U_i, on a $\mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{C}^\infty((V_i)_0)$ car $(\phi_i^{-1})^*(\mathcal{O}^1_M(U_i)) = \mathcal{O}^1_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(V_i)$. Par la suite on notera $\mathcal{C}^\infty_{M_0}$ le faisceau $\mathcal{F}$. On le considère comme un sous-faisceau de $\mathcal{C}^0_{M_0}$. Ainsi la projection de $\mathcal{O}_M$ sur $\mathcal{O}_M/\mathcal{O}^1_M$ se prolonge en un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_M$ sur $\mathcal{C}^0_{M_0}$ ayant les propriétés annoncées.

Soit ϕ' un second morphisme de faisceaux ayant la propriété de la proposition. Soit $\mathcal{H}$ le faisceau image de ϕ' c'est, par hypothèse, le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ pour une structure de variété différentielle sur M_0. On a de plus un morphisme surjectif de $\mathcal{F} = \mathcal{O}_M/\mathcal{O}^1_M$ sur $\mathcal{H}$. Or $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ sont des faisceaux de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ pour deux structures de variétés sur M_0, c'est donc un isomorphisme. Le morphisme ϕ est donc essentiellement unique. $\diamondsuit$

Soit U un ouvert de M_0. Les éléments de $\mathcal{O}_M(U)$ sont appelés les fonctions sur U. Si $f \in \mathcal{O}_M(U)$ et $x \in U$, on note $\widetilde{f}$ l'image de f dans $\mathcal{C}^0_{M_0}$ et on pose

$f(x) = \widetilde{f}(x) \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ est la valeur de f en x, mais il faut rappeler que f n'est pas déterminée par ses valeurs en tout les points de U.
Notation : Dans la suite on notera de façon générale avec un indice 0 les ouverts de la variété M_0 sous-jacente à la supervariété M (par exemple U_0) et sans indice l'ouvert correspondant de M (c'est-à-dire $U = (U_0, \mathcal{O}_M|_{U_0})$).

Exemple: Si V est un superespace vectoriel, on lui associe une supervariété de la façon suivante. On munit V du faisceau défini par $\mathcal{O}_V(U_0) := \mathcal{C}^\infty_{V_0}(U_0) \otimes S(V_1^*) = \mathcal{C}^\infty(U_0, S(V_1^*))$ (V_1^* étant pris avec sa parité et U_0 étant un ouvert de V_0). Le morphisme de restriction de U_0 à U_0' si $U_0' \subset U_0$ (U_0' et U_0 étant des ouvert de V_0) est le morphisme de restriction de $\mathcal{C}^\infty(U_0', S(V_1^*))$ à $\mathcal{C}^\infty(U_0, S(V_1^*))$. Plus généralement, soit $V \to M$ un fibré vectoriel au dessus d'une variété M dont les fibres sont des superespaces vectoriels impairs. On lui associe la supervariété N telle que $N_0 = M$ et $\mathcal{O}_N(U) = \mathcal{C}^\infty(U, S(V^*))$ si U est un ouvert de M. On peut montrer que toute supervariété est de ce type (Batchelor [Bat79]).

2.1.4. *Partitions de l'unité.*

PROPOSITION 2.2. *Soit M une supervariété, soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M (I est un ensemble et $\bigcup_{i\in I} U_i = M$). Alors il existe sur M des partitions de l'unité associées à $\{U_i\}_{i\in I}$. C'est-à-dire qu'il existe un ensemble de fonctions $\{\phi_i\}_{i\in I}$ telles que localement il n'y a qu'un nombre fini d'indices tels que ϕ_i soit non nul, $\sum_{i\in I} \phi_i = 1$ et ϕ_i est à support dans $(U_i)_0$.*

Démonstration: On suppose dans un premier temps que les U_i sont tous des ouverts de coordonnées. Il existe une partition de l'unité $\sum_{i\in I} f_i = 1$ sur M_0 associée à $\{(U_i)_0\}_{i\in I}$. La projection de $\mathcal{O}_M(M)$ sur $\mathcal{C}^\infty_{M_0}(M_0)$ étant surjective, il existe des fonction paires ψ_i sur M telles que $\widetilde{\psi_i} = f_i$. Comme U_i est un ouvert de coordonnées on peut choisir ψ_i de sorte que ψ_i soit à support dans $(U_i)_0$. Alors $\sum_{i\in I} \psi_i = g$ avec $\widetilde{g} = 1$ donc inversible dans $\mathcal{O}_M(M)_0$. On pose $\phi_i = g^{-1}\psi_i$. On définit bien ainsi une partition de l'unité.

Si maintenant U_i n'est pas un ouvert de coordonnées, il existe un recouvrement de U_i par des ouverts de coordonnées $\{U_{i,j}\}_{j\in J}$ et une partition de l'unité $\{h_{i,j}\}_{j\in J}$ sur U_i associée à $\{U_{i,j}\}_{j\in J}$. En reprenant les notations précédentes il existe pour tout j une fonction $\psi_{i,j}$ telle que $\widetilde{\psi_{i,j}} = \widetilde{h_{i,j}} f_i$. On pose alors $\psi_i = \sum_{j\in J} \psi_{i,j}$ et l'on définit comme précédemment une partition de l'unité sur M. $\diamondsuit$

2.1.5. *Morphismes de supervariétés.*

DÉFINITION 2.3. *Soient M et N deux supervariétés. Un morphisme de supervariétés entre M et N est un morphisme (ϕ, ϕ^*) d'espaces topologiques munis de faisceaux de superalgèbres supercommutatives.*

On montre que ϕ est un morphisme de variété $\mathcal{C}^\infty$.

2.1.6. *Sous-supervariété fermée.*

DÉFINITION 2.4. *Soit M une supervariété. Une sous supervariété fermée de M est une supervariété N telle que N_0 soit une sous-variété de M_0 et telle qu'il existe un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_M$ tel que $\mathcal{O}_N$ soit égal à $\mathcal{O}_M/\mathcal{I}$.*

Soient N et M deux supervariétés. Une immersion fermée de N dans M est un isomorphisme de N sur une sous-supervariété fermée de M.

2.1.7. *Points à valeurs dans un algèbre proche.* Les supervariétés munies de leur morphismes forment une catégorie. C'est une sous catégorie de la catégorie des espace annelés en $\mathbb{R}$-algèbres supercommutatives, c'est-à-dire les espaces muni d'un faisceau de $\mathbb{R}$-superalgèbres supercommutatives. On note $\mathfrak{C}$ cette dernière catégorie. Si P est une superalgèbre proche (Cf. sous-section **I.I.3**) on lui associe l'espace annelé $(\{pt\}, P)$. Si M est une supervariété on lui associe le "foncteur points" :

$$\mathfrak{P}_M : P \longmapsto Mor_{\mathfrak{C}}((\{pt\}, P), (M_0, \mathcal{O}_M)),$$

de la catégorie des superalgèbres proches dans la catégorie des ensembles. On pose $\mathfrak{P}_M(P) = M_P$, on dit que c'est l'ensemble des points proches de M à valeurs dans P. On a une application naturelle

$$\begin{array}{ccc} M_P & \longrightarrow & M_0 \\ \phi & \longmapsto & \phi(pt). \end{array}$$

Soit U un ouvert de M_0. On lui associe l'ensemble

$$U_P := \{\phi \in M_P, \phi(pt) \in U_0\}.$$

Si U est un ouvert de coordonnées, alors le système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ sur U réalise un isomorphisme entre U et un ouvert U' de $\mathbb{R}^{(n,m)}$. On note $a \mapsto \bar{a}$ la projection canonique de P sur $\mathbb{R}$. Alors on a :

$$U'_P = \{(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m), a_i \in P_0, b_j \in P_1, (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \in U'_0\}.$$

Exemples: Soit V un superespace vectoriel et P une superalgèbre proche, l'ensemble des points de la supervariété associée à V à valeurs dans P est $(V \otimes P)_0$.

Si M est une supervariété et $P = \mathbb{R}$, on a $\mathfrak{P}_M(\mathbb{R}) = M_0$.

Soient M et M' deux supervariétés, et ϕ un morphisme de M dans M'. On définit alors une application $\mathfrak{P}_\phi$ de $\mathfrak{P}_M$ dans $\mathfrak{P}_{M'}$ en posant pour toute superalgèbre proche P et $f \in \mathfrak{P}_M(P)$, $\mathfrak{P}_\phi(P)(f) = \phi \circ f \in \mathfrak{P}_{M'}(P)$. On pose $\phi_P := \mathfrak{P}_\phi(P)$.

Pour toute superalgèbre proche P et pour toute supervariété M, $\mathfrak{P}_M(P)$ peut être muni d'une structure de variété différentiable. On a de plus le lemme suivant :

LEMME 2.1. *Soient M et N deux supervariétés. Soient ϕ et ψ deux morphismes de M dans N. Alors si pour toute superalgèbre proche P on a $\phi_P = \psi_P$, on a $\phi = \psi$.*

Démonstration: On pose $dim(N) = (n, m)$ et $dim(M) = (n', m')$. Tout d'abord on a $\phi_{\mathbb{R}} = \psi_{\mathbb{R}}$, et donc comme $M_0 = M_{\mathbb{R}}$ et $N_0 = N_{\mathbb{R}}$, on a $\phi_0 = \psi_0$.

Soit U_0 un ouvert de coordonnées de N et V_0 un ouvert de coordonnées de M. Soit $f \in \mathcal{O}_N(U_0)$, on lui associe pour toute superalgèbre proche P la fonction f_P sur U_P qui envoie $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ sur $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$. Si $P = \bigwedge \mathbb{R}^q$ avec $q \geq m$, et $q \geq m'$, alors l'application $f \mapsto f_P$ de $\mathcal{O}_N(U_0)$ dans les fonctions de U_P à valeurs dans P est injective. De même l'application $g \mapsto g_P$ de $\mathcal{O}_M(V_0)$ dans les fonctions sur V_P à valeurs dans P est injective. Cela étant vrai pour tout ouvert de coordonnées, c'est vrai pour tout ouvert de M ou de N.

Soit maintenant U_0 un ouvert de N_0 et $V_0 = \phi_0^{-1}(U_0) = \psi^{-1}(U_0)$. Comme $\phi_P = \psi_P$ on a pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_N(U_0)$ $(\phi^*(f))_P = \phi^*_P(f_P) = \psi^*_P(f_P) = (\psi^*(f))_P$. En particulier pour $P = \bigwedge \mathbb{R}^m$, on obtient $\phi^*(f) = \psi^*(f)$ et ce pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_N(U)$. On a donc $\phi = \psi$ si $\phi_P = \psi_P$ pour toute superalgèbre proche P. $\diamondsuit$

2.1.8. *Faisceau des dérivations.*

DÉFINITION 2.5. *Soit $(M, \mathcal{O}_M)$ une supervariété. On note $\mathcal{D}er_M$ le faisceau des dérivations de $\mathcal{O}_M$: si U est un ouvert de M, $\mathcal{D}er_M(U)$ est l'ensemble des applications linéaires ζ de $\mathcal{O}_M(U)$ dans lui même telles que, pour tout f et tout g homogènes dans $\mathcal{O}_M(U)$, on ait si ζ est homogène :*

$$\zeta(fg) = (\zeta f)g + (-1)^{|f||\zeta|} f(\zeta g).$$

C'est un sous $\mathcal{O}_M$-module de $End(\mathcal{O}_M)$.

On définit le faisceau $\mathcal{D}iff_M$ des opérateurs différentiels sur M. C'est le faisceau de sous-algèbres de $End(\mathcal{O}_M)$ tel que pour tout ouvert U de M, $\mathcal{D}iff_M(U)$ soit la sous-algèbre de $End(\mathcal{O}_M(U))$ engendrée par $\mathcal{D}er_M$.

PROPOSITION 2.3. *Soit M une supervariété de dimension (n, m). Le faisceau $\mathcal{D}er_M$ est localement libre de rang fini égal à (n, m).*

Démonstration: Pour tout point m de M_0 il existe un voisinage ouvert U de M tel que $\mathcal{O}_M(U)$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(\mathbb{R}^{(n,m)})$. Il suffit donc de vérifier que $\mathcal{D}er_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(\mathbb{R}^{(n,m)})$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(\mathbb{R}^{(n,m)})$-module libre de rang (n, m). $\diamondsuit$

Si $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m)$ est le système de coordonnées canonique sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$, on note $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ la base (sur $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(\mathbb{R}^{(n,m)})$) de $\mathcal{D}er_{\mathbb{R}^{(n,m)}}(\mathbb{R}^{(n,m)})$ telle que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{i,j}, \;\; \frac{\partial}{\partial x_i} \xi_j = 0, \;\; \frac{\partial}{\partial \xi_j} x_i = 0, \;\; \frac{\partial}{\partial \xi_j} \xi_i = \delta_{i,j}.$$

2.1.9. *Topologie sur $\mathcal{O}_M(U)$.* On définit une topologie sur $\mathcal{O}_M(U)$ en disant qu'une suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f si et seulement si pour tout opérateur différentiel D sur U, la suite $(\widetilde{Df_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\widetilde{Df}$ sur tout compact inclus dans U.

Si U est un ouvert de coordonnées on écrit

$$f = \sum_I f_I \xi_I,$$

où I est un m-uplet de 0 et de 1. On a, pour tout n-uplet $J_0 \in \mathbb{N}^n$ et tout m-uplet $I_0 \in \{0,1\}^m$:

$$\frac{\partial^{J_0}}{\partial x^{J_0}} \frac{\partial^{I_0}}{\partial \xi^{I_0}} (f)^{\sim} = (-1)^{\frac{|I_0|(|I_0|-1)}{2}} \frac{\partial}{\partial x^{J_0}} (f_{I_0}).$$

où $|I_0| = \sum\limits_{i\in I_0} p_i$ et $\frac{\partial^{J_0}}{\partial x^{J_0}} = \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}} \dots \frac{\partial^{p_n}}{\partial x_n^{p_n}}$ si $J_0 = (p_1, \dots, p_n)$ et $\frac{\partial^{I_0}}{\partial \xi^{I_0}} = \frac{\partial^{p_1}}{\partial \xi_1^{p_1}} \dots \frac{\partial^{p_m}}{\partial \xi_m^{p_m}}$ si $I_0 = (p_1, \dots, p_m)$.

Pour cette topologie, $\mathcal{O}_M(U)$ est un espace de Fréchet.

2.2. Superfibrés vectoriels.

2.2.1. *Définition.*

Définition 2.6. *Soit M une supervariété de dimension (n,m). Un superfibré vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension (k,l) sur M est la donnée d'un morphisme de supervariétés $\pi : \mathcal{V} \to M$, tel que pour tout $m \in M$, il existe un ouvert U (appelé ouvert de trivialisation) de M contenant m et un isomorphisme $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{(k,l)}$ vérifiant les conditions suivantes :*

-Pour tout ouvert U le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi_U} & U \times \mathbb{R}^{n,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{Id} & U \end{array}.$$

En particulier ψ_U^* est un morphisme de $\mathcal{O}_M(U)$-algèbres.

-Pour tout U et tout V ouverts de trivialisation, si $(x_1, \dots, x_k, \xi_1, \dots, \xi_l)$ est le système de coordonnées canonique sur $\mathbb{R}^{(k,l)}$, on impose que $(\psi_U \circ \psi_V^{-1})^*|_{(U\cap V)\times\mathbb{R}^{(k,l)}}$

est linéaire en les x_i et les ξ_j. Plus précisément, on impose :

$$(\psi_U \circ \psi_V^{-1})^*(x_i) = \sum_p x_p f_{i,p} + \sum_q \xi_q g_{i,q},$$
$$(\psi_U \circ \psi_V^{-1})^*(\xi_j) = \sum_p x_p f'_{i,p} + \sum_q \xi_q g'_{i,q}$$

où $f_{i,p}, g'_{i,q} \in \mathcal{O}_M(U)_0$ et $f'_{i,p}, g_{i,q} \in \mathcal{O}_M(U)_1$.

DÉFINITION 2.7. *Soit M une supervariété et $\pi : \mathcal{V} \to M, \pi' : \mathcal{V}' \to M$ deux superfibrés vectoriels au dessus de M. On appelle morphisme de superfibrés vectoriels de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ un morphisme de supervariétés $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ qui commute avec π et π' ($\pi = \pi' \circ \phi$) et tel que, si U est un ouvert de trivialisation de $\mathcal{V}$ et V un ouvert de trivialisation de $\mathcal{V}'$, $(\psi'_V \circ \phi \circ \psi_U^{-1})^*|_{U\cap V \times \mathbb{R}^{n,m}}$ soit linéaire en les x_i et les ξ_j, les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^{n,m}$.*

On dit que deux fibrés $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de superfibrés vectoriels de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.

2.2.2. *Faisceau des sections.*

Soit M une supervariété et $\pi : \mathcal{V} \to M$ un superfibré vectoriel de base M. Soit $U \subset M_0$ un ouvert de trivialisation de $\mathcal{V}$ et ϕ un isomorphisme de $\pi^{-1}(U)$ de $U \times \mathbb{R}^{(k,l)}$. On a donc un isomorphisme $\mathcal{O}_M(U)$-linéaire ϕ^* de $\mathcal{O}_M(U)\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{k,l}}(\mathbb{R}^{k,l})$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(\pi^{-1}(U))$. On note $(x_1, \ldots, x_k, \xi_1, \ldots, \xi_l)$ les fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^{(k,l)}$. La donnée de l'isomorphisme ϕ équivaut à la donnée de $(\phi^*(x_1), \ldots, \phi^*(x_k), \phi^*(\xi_1), \ldots, \phi^*(\xi_l))$. Ces fonctions engendrent un sous $\mathcal{O}_M(U)$-module libre de rang (k, l) de $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(\pi^{-1}(U))$.

On note $\Gamma_{\mathcal{V}}(U)$ le $\mathcal{O}_M(U)$ module dont il est le dual. Donc $\phi^*(x_1), \ldots, \phi^*(x_k)$, $\phi^*(\xi_1), \ldots \phi^*(\xi_l)$ sont des formes linéaires sur $\Gamma_{\mathcal{V}}(U)$ et forment une base de $\Gamma^*_{\mathcal{V}}(U)$ comme $\mathcal{O}_M(U)$-module. Si U et V sont deux ouverts de trivialisation de M (avec des isomorphismes de trivialisation ϕ_U et ϕ_V), on a un morphisme de transition de $\Gamma_{\mathcal{V}}(\pi^{-1}(U\cap V))$ dans $\Gamma_{\mathcal{V}}(\pi^{-1}(U\cap V))$ défini grâce au morphisme $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$. Comme les ouverts de trivialisation forment un recouvrement ouvert de M cela définit un faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules localement libres de rang (k, l). On appelle ce faisceau le faisceau des sections de $\mathcal{V}$.

Exemple: Soit V un superespace vectoriel de dimension finie et on note $\mathcal{V} = (V_0, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$ la supervariété associée. Soit $M = (M_0, \mathcal{O}_M)$ une supervariété. On pose $\mathcal{F} := M \times \mathcal{V}$. C'est un superfibré vectoriel trivial de fibre V. Le faisceau des sections est $\Gamma_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_M \otimes V$ et les fonctions linéaires le long des fibre au dessus d'un ouvert U de M_0 sont les éléments de $\mathcal{O}_M(U) \otimes V^* \subset \mathcal{O}_M(U)\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$.

PROPOSITION 2.4. *Soit M une supervariété de dimension (n, m). Il y a une bijection entre les classes d'équivalences de superfibrés vectoriels $\mathcal{V}$ de dimension*

(k,l) sur M et les classes d'équivalences par des morphismes pairs de faisceaux de $\mathcal{O}_M$-supermodules sur M localement libres de dimension (k,l).

Démonstration: On a vu que l'on associe à un superfibré vectoriel de dimension (k,l) sur M le faisceau des sections sur M. Un fibré équivalent aurait donné un faisceau équivalent.

Réciproquement, soit $\Gamma_{\mathcal{V}}$ un faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules localement libres. On considère le faisceau $\Gamma_{\mathcal{V}}^* := \mathcal{L}_{\mathcal{O}_M}(\Gamma_{\mathcal{V}}, \mathcal{O}_M)$ des morphismes $\mathcal{O}_M$-linéaires de $\Gamma_{\mathcal{V}}$ dans $\mathcal{O}_M$, puis le faisceau $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)$. Le spectre maximal du faisceau d'anneaux commutatifs $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)_0$ est un fibré vectoriel, noté $\mathcal{V}_0$, au dessus de M_0. On note π_0 la projection de $\mathcal{V}_0$ sur M_0. Le faisceau $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)$ sur M_0 définit un faisceau, noté encore $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)$ sur $\mathcal{V}_0$ en posant pour tout ouvert U de $\mathcal{V}_0$: $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)(U) = S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)(\pi_0(U))$ (la projection est une application ouverte).

On a une projection $f \mapsto \widetilde{f}$ de $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)$ sur le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{V}_0$ qui sont polynomiales le long des fibres. Comme sur $\mathcal{O}_M(U)$, on peut définir une topologie sur $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)(U)$ pour tout ouvert U de $\mathcal{V}$. Pour cette topologie $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)(U)$ n'est pas complet, on note $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}(U)$ la superalgèbre obtenue en complétant $S(\Gamma_{\mathcal{V}}^*)(U)$. On obtient ainsi un préfaisceau $\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{V}}$ sur $\mathcal{V}_0$ et on note $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ le faisceau engendré. On constate que $\mathcal{V} := (\mathcal{V}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$ définit un superfibré vectoriel au dessus de M.

Un faisceau $\Gamma_{\mathcal{V}'}$ isomorphe à $\Gamma_{\mathcal{V}}$ aurait donné un fibré $\mathcal{V}'$ isomorphe à $\mathcal{V}$. $\diamondsuit$

Remarque: Le faisceau $U \mapsto \Gamma_{\mathcal{V}}(U)_0$ est isomorphe au faisceau des morphismes de supervariétés s de U dans $\mathcal{V}$ tels que $\pi \circ s = Id_U$.

Un morphisme de superfibrés vectoriels détermine un morphisme pair du faisceau des sections et réciproquement.

Exemple: Soit M une supervariété de dimension (n,m). On appelle fibré tangent le superfibré vectoriel associé au faisceau des dérivations. C'est un super fibré vectoriel de rang (n,m), on le note TM. On appelle aussi champs de vecteurs sur M ses sections c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{D}er_M(U)$ pour un ouvert U de M donné.

DÉFINITION 2.8. *Soit $\mathcal{V} \longrightarrow M$ un superfibré vectoriel et p un point de M_0, on appelle fibre en p de $\mathcal{V}$, et on note $\mathcal{V}_p$ le superespace vectoriel défini par $\mathcal{V}_p = (\mathcal{O}_M/\mathfrak{m}_p)(U) \underset{\mathcal{O}_M(U)}{\otimes} \Gamma_{\mathcal{V}}(U)$ où U est un ouvert de trivialisation de $\mathcal{V}$ contenant p et $\mathfrak{m}_p$ est le faisceau des fonctions s'annulant en p.*

Exemple: L'espace tangent T_pM s'identifie aux dérivations ζ de $\mathcal{O}_M(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\zeta(gf) = \zeta(g)f(p) + (-1)^{|g||\zeta|}g(p)\zeta(f)$.

La proposition précédente nous permet de généraliser la notion de superfibré vectoriel en admettant des fibres de dimension infinie.

Définition 2.9. *Soit M une supervariété. On appelle superfibré vectoriel au dessus de M un faisceau de $\mathcal{O}_M$-supermodule localement libre.*

Cependant, dans le cas où la dimension de ce faisceau n'est pas de dimension finie, on n'a pas de supervariété associée et on ne parlera donc pas de fonctions sur le fibré.

2.2.3. *Image réciproque.*

Soit $\tau : N \longrightarrow M$ un morphisme de supervariétés et $\mathcal{M}$ un superfibré vectoriel au dessus de M. On note $\tau^*\Gamma_{\mathcal{M}}$ le faisceau de $\mathcal{O}_N$-modules sur N tel que

$$\tau^*\Gamma_{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_N \underset{\tau^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{M}}}{\otimes} \tau^{-1}\Gamma_{\mathcal{M}}$$

où $\tau^{-1}\Gamma_{\mathcal{M}}$ (resp.$\tau^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$) est le faisceau engendré par le préfaisceau qui à un ouvert U de N associe $\lim_{V\supset\tau(U)} \Gamma_{\mathcal{M}}(V)$ (resp. $\lim_{V\supset\tau(U)} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(V)$). On note $\tau^*\mathcal{M}$ le superfibré vectoriel sur N associé. C'est le fibré image réciproque de $\mathcal{M}$ par τ.

Exemple: Si $\mathcal{M}$ est le fibré tangent TM au dessus de M on en déduit un fibré τ^*TM au dessus de N et on a une application naturelle $d\tau$, appelée application tangente, de TN (le fibré tangent de N) dans τ^*TM.

Exemple: Si N est un point ($N = \{p\}$), alors si $\mathcal{M}$ est de rang (k, l) on a :

$$\tau^*\mathcal{M} = \mathcal{M}_p.$$

2.2.4. *Superfibré* $\Pi\mathcal{V}$.

Soit $\mathcal{V}$ un superfibré vectoriel de dimension (k, l) au dessus de M. On note $\Gamma_{\mathcal{V}}$ son faisceau des sections. On note $\Pi\mathcal{V}$ le superfibré vectoriel de dimension (l, k) défini par le faisceau de $\mathcal{O}_M$-supermodules $\Pi\Gamma_{\mathcal{V}}$. Le morphisme de changement de parité $\bar{\pi} : \Gamma_{\mathcal{V}} \to \Pi\Gamma_{\mathcal{V}}$ est un morphisme impair de $\mathcal{O}_M$-modules.

2.2.5. *Quotient, Somme directe et produit tensoriel de superfibrés vectoriels.*

Soit M une supervariété et soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux superfibrés vectoriels au dessus de M. On note $\Gamma_{\mathcal{V}}, \Gamma_{\mathcal{V}'}$ les faisceaux de sections associés. On appelle somme directe de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ le superfibré vectoriel associé au faisceau $\Gamma_{\mathcal{V}} \oplus \Gamma_{\mathcal{V}'}$. On le note $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}'$. De même on appelle produit tensoriel de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ le superfibré vectoriel associé au faisceau $\Gamma_{\mathcal{V}} \underset{\mathcal{O}_M}{\otimes} \Gamma_{\mathcal{V}'}$. On le note $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}'$. Si $\mathcal{V}'$ est un sous-fibré de $\mathcal{V}$ On appelle quotient de $\mathcal{V}$ par $\mathcal{V}'$ et on note $\mathcal{V}/\mathcal{V}'$ le superfibré vectoriel associé au faisceau $\Gamma_{\mathcal{V}}/\Gamma_{\mathcal{V}'}$.

2.2.6. *Champs de vecteurs verticaux.* Soit M une supervariété et $\pi : \mathcal{V} \longrightarrow M$ un superfibré vectoriel au dessus de M. Le fibré tangent TM de M se relève en un fibré π^*TM au dessus de $\mathcal{V}$. On a alors une application naturelle de $T\mathcal{V}$ dans π^*TM. On appelle champs de vecteurs verticaux les sections de $T\mathcal{V}$ qui s'envoient sur la section nulle de π^*TM. Ce sont les dérivations de $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ annulant $\pi^*\mathcal{O}_M(M)$

2.2.7. *Fibré Normal à une sous-supervariété.* Soit M une supervariété et Q une sous-supervariété de M. On note j l'injection de Q dans M. Le fibré tangent TQ de Q est un sous fibré de $j^*(TM)$. On appelle fibré normal à Q dans M et on note T_NQ le fibré quotient $j^*(TM)/TQ$.

2.3. Formes différentielles et pseudodifférentielles. Dans toute la suite on pose pour alléger l'écriture $\Pi T^*M := (\Pi TM)^*$.

2.3.1. *Formes différentielles.*

DÉFINITION 2.10. *Soit U un ouvert d'une supervariété M. On appelle formes différentielles sur U les éléments de la superalgèbre supercommutative $\Omega_M(U) := S(\Gamma_{\Pi T^*M}(U))$. On a ainsi un faisceau Ω_M de superalgèbres supercommutatives.*

On appelle différentielle extérieure, et on note d, la dérivation impaire de $\Omega_M(U)$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} d^2 & = & 0, \\ < df, \bar{\pi}\zeta > & = & -(-1)^{(|\zeta|+1)|f|}\zeta f \textit{ pour } f \in \mathcal{O}_M(U), \zeta \in \mathcal{D}er_M(U) \textit{ homogènes,} \end{array}$$

On note $H_M(U)$ la cohomologie de $(\Omega_M(U), d)$.

Si l'on considère les éléments de $\Omega_M(U) = S(\Gamma_{\Pi T^*M}(U))$ comme des fonctions sur ΠTM, alors d est un élément de $\mathcal{D}er_{\Pi TM}(\Pi TM)$. Soit U un ouvert de coordonnées de M. On note $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ les coordonnées sur U. Au dessus de U le fibré TM est trivial et les dérivations $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_m})$ forment une base de sections. On a dans un ouvert de coordonnées :

$$d = \sum_i dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j d\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

On a alors $< dx_i, \bar{\pi}\frac{\partial}{\partial x_j} >= -\delta_{i,j}, < dx_i, \bar{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi_j} >= 0, < d\xi_j, \bar{\pi}\frac{\partial}{\partial x_j} >= 0$ et $< d\xi_i, \bar{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi_j} >= -\delta_{i,j}$.

2.3.2. *Formes pseudodifférentielles.*

DÉFINITION 2.11. *Soit M une supervariété de dimension (n,m). On pose $\widehat{M} := \Pi TM$. C'est une supervariété de dimension $(n+m, n+m)$. Si U est un ouvert de M, $\widehat{U} := \Pi TU$ est un ouvert de $\widehat{M}$. On appelle formes pseudodifférentielles sur U les éléments de la superalgèbre supercommutative $\mathcal{O}_{\widehat{M}}(\widehat{U})$. On la note :*

$$\widehat{\Omega}_M(U) := \mathcal{O}_{\widehat{M}}(\widehat{U}).$$

L'algèbre $\widehat{\Omega}_M(U)$ contient $\Omega_M(U) = S(\Pi T^*U)$, l'algèbre des formes différentielles ou encore l'algèbre des fonctions sur $\widehat{U}$ qui sont polynomiales dans les fibres. Si U est un ouvert de coordonnées et $(x_1, \dots, x_n,\ \xi_1, \dots, \xi_m)$ les coordonnées sur U, alors $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m, dx_1, \dots, dx_n, d\xi_1,\ \dots, d\xi_m)$ sont des coordonnées sur $\widehat{U}$ et les éléments de $\widehat{\Omega}_M(U)$ sont les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en les x_i et les $d\xi_j$ et de degré 0 ou 1 en chacune des variables impaires ξ_j et dx_i.

La différentielle extérieure sur les formes différentielles s'étend par continuité aux formes pseudodifférentielles. Si U est un ouvert de coordonnées c'est la dérivation de $\widehat{\Omega}_M(U)$ qui envoie x_i sur dx_i, ξ_j sur $d\xi_j$ et qui est nulle sur les dx_i et les $d\xi_j$. C'est un champ de vecteurs sur $\widehat{M}$.

Si ζ est une dérivation de $\mathcal{O}_M(U)$ on lui associe la dérivation $\iota(\zeta)$ (de parité $|\zeta|+1$ si ζ est homogène) de $\widehat{\Omega}_M(U)$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} \iota(\zeta)^2 & = & 0, \\ \iota(\zeta)f & = & 0, \\ \iota(\zeta)(df) & = & (-1)^{|\zeta|}\zeta f \text{ pour } f \in \mathcal{O}_M(U),\ \zeta \in \mathcal{D}er_M(U). \end{array}$$

En coordonnées si $\zeta = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} g_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, on a :

$$\iota(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|f_i|} f_i \frac{\partial}{\partial dx_i} + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{|g_j|+1} g_j \frac{\partial}{\partial d\xi_j}.$$

On pose pour $\zeta \in \mathcal{D}er_M(U)$ homogène,

$$\mathcal{L}(\zeta) := [d, \iota(\zeta)] = d\iota(\zeta) + (-1)^{|\zeta|}\iota(\zeta)d.$$

On appelle $\mathcal{L}(\zeta)$ la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs ζ. On a alors si $f \in \mathcal{O}_M(U)$ les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\zeta)f &= \zeta.f, \\ [\mathcal{L}(\zeta), d] &= 0. \end{aligned}$$

On note $\widehat{H}_M(U)$ la cohomologie de $(\widehat{\Omega}_M(U), d)$. A priori, l'application $U \mapsto \widehat{H}_M(U)$ ne définit pas un faisceau.

2.3.3. *Image réciproque.* Soient M et N deux supervariétés et τ un morphisme de N dans M. Si U est un ouvert de N, on a un morphisme naturel $d\tau$ de $\mathcal{O}_N(U)$-modules de $\mathcal{D}er_N(U)$ dans $\tau^*\mathcal{D}er_M(U)$. Pour tout ouvert $V \supset \tau(U)$ de M, on associe à une dérivation $\zeta \in \mathcal{D}er_N(U)$ la dérivation

$$d\tau(\zeta) : f \in \mathcal{O}_M(V) \mapsto \rho_U^{\tau^{-1}(V)}\Big(\zeta(\tau^* f)\Big),$$

où $\rho_U^{\tau^{-1}(V)}$ est le morphisme de restriction de $\mathcal{O}_N(\tau^{-1}(V))$ à $\mathcal{O}_N(U)$. On a donc un morphisme, que l'on note encore $d\tau$, de TN dans TM, et un morphisme $\widehat{\tau} := \pi d\tau$ de $\widehat{N}$ dans $\widehat{M}$. On a donc un morphisme naturel

$$\widehat{\tau}^* : \widehat{\Omega}_M(U) \longrightarrow \widehat{\Omega}_N(\tau^{-1}(U)),$$

entre les formes pseudodifférentielles sur $U \subset M$ et sur $\tau^{-1}(U) \subset N$ pour un ouvert U de M. De plus ce morphisme commute avec la différentielle extérieure. Plus précisément on note d_M la différentielle sur $\widehat{\Omega}_M$ et d_N la différentielle sur $\widehat{\Omega}_N$, on a alors $\widehat{\tau}^*(d_M\omega) = d_N(\widehat{\tau}^*(\omega))$ pour toute forme pseudodifférentielle ω sur M. On a donc pour tout ouvert U de M un morphisme entre $\widehat{H}_M(U)$ et $\widehat{H}_N(\tau^{-1}U)$.

2.3.4. *Superconnexions.* Soit $\mathcal{V}$ un superfibré vectoriel de base M. On appelle superconnexion un endomorphisme impair $\mathbb{A}$ du faisceau de superespaces vectoriels $\widehat{\Omega}_M \underset{\mathcal{O}_M}{\otimes} \Gamma_{\mathcal{V}}$ des formes pseudodifférentielles à valeurs dans $\mathcal{V}$ tel que, si $\alpha \in \widehat{\Omega}_M(U)$ et $\omega \in \widehat{\Omega}_M(U, \mathcal{V})$:

$$\mathbb{A}(\alpha\omega) = (d\alpha)\omega + (-1)^{|\alpha|}\alpha(\mathbb{A}\omega).$$

Remarque: Cette définition est due à Quillen [MQ86].

On en déduit une action de $\mathbb{A}$ sur le faisceau $\widehat{\Omega}_M \underset{\mathcal{O}_M}{\otimes} End_{\mathcal{O}_M}(\Gamma_{\mathcal{V}})$ en posant pour $\alpha \in \widehat{\Omega}_M(U, End(\mathcal{V})) := \widehat{\Omega}_M(U) \underset{\mathcal{O}_M(U)}{\otimes} End_{\mathcal{O}_M(U)}(\Gamma_{\mathcal{V}}(U))$ (U étant un ouvert de M et le crochet étant le crochet de supercommutation des endomorphismes de $\widehat{\Omega}_M(U, \mathcal{V})$) :

$$\mathbb{A}.\alpha = [\mathbb{A}, \alpha].$$

La courbure d'une superconnexion est l'opérateur $\mathbb{A}^2$ sur $\widehat{\Omega}_M(M)$. C'est un opérateur local (qui commute avec la multiplication par les fonctions de $\mathcal{O}_M(M)$). Il est donc donné par un élément F pair de $\widehat{\Omega}_M(M, End(\Gamma_{\mathcal{V}}))$ qui satisfait l'identité de Bianchi :

$$\mathbb{A}F = 0.$$

En effet si $f \in \mathcal{O}_M(M)$ et $\omega \in \widehat{\Omega}_M(M, \Gamma_{\mathcal{V}}(M))$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^2(f\omega) =& \mathbb{A}((df)\omega + (-1)^{|f|} f\mathbb{A}\omega) \\ =& (-1)^{|f|+1} df\mathbb{A}\omega + (-1)^{|f|} df\mathbb{A}\omega + f\mathbb{A}^2\omega \\ =& f\mathbb{A}^2\omega.\end{aligned}$$

L'égalité de Bianchi provient de l'égalité :

$$\mathbb{A}.F = [\mathbb{A}, \mathbb{A}^2] = 0.$$

Considérons le cas du fibré trivial $\mathcal{V} = M \times V$. On a alors $\Gamma_{\mathcal{V}}(M) = \mathcal{O}(M) \otimes V$, et $\widehat{\Omega}_M(M, \mathcal{V}) = \widehat{\Omega}_M(M) \otimes V$. L'action de d sur $\widehat{\Omega}_M(M, \mathcal{V})$ est définie par $d = d \otimes 1$ et c'est une superconnexion. Alors, $\mathbb{A}$ est donné par :

$$\mathbb{A} = d + \omega,$$

où $\omega \in \widehat{\Omega}_M(M, End(\mathcal{V}))$ est une forme pseudodifférentielle à valeurs dans $End(\mathcal{V})$. En effet, on constate que si $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ sont deux superconnexions, d'après la règle de Leibnitz elles diffèrent par un opérateur local.

3. Superalgèbres de Lie, Supergroupes de Lie

3.1. Superalgèbres de Lie.

Définition 3.1. *On appelle superalgèbre de Lie un superespace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une forme bilinéaire paire superantisymétrique à valeurs dans $\mathfrak{g}$ appelé crochet (de Lie) vérifiant la relation (super-Jacobi) suivante :*

$$[Z, [X, Y]] = [[Z, X], Y] + (-1)^{|Z||X|}[X, [Z, Y]].$$

On appelle sous-superalgèbre de Lie d'une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$, un sous-superespace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet, c'est-à-dire $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Si $\mathcal{A}$ est une superalgèbre supercommutative on appelle $\mathcal{A}$-points de $\mathfrak{g}$ les éléments de $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}} = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A})_0$. C'est une algèbre de Lie.

Exemple: Soit V un superespace vectoriel. La superalgèbre $End(V)$ munie du crochet de supercommutation :

$$[v, w] = vw - (-1)^{|v||w|} wv \quad \text{pour } v, w \in End(V) \text{ homogènes},$$

est une superalgèbre de Lie.

On note $\mathfrak{gl}(n, m)$ l'ensemble des matrices réelles de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où A est une matrice (n,n), D est une matrice (m,m), B est une matrice (n,m) et C une matrice (m,n). On pose :

$$\mathfrak{gl}(n,m)_0 = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\}$$
$$\mathfrak{gl}(n,m)_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\}.$$

Alors $\mathfrak{gl}(n,m)$ muni du crochet de supercommutation des matrices forme une superalgèbre de Lie.

On suppose maintenant que V est muni d'un forme bilinéaire supersymétrique $\mathcal{B}$. On définit la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$ comme l'ensemble des éléments X de $\mathfrak{gl}(V)$ tels que pour tout u et tout v homogènes de V on ait si X est homogène :

$$\mathcal{B}(Xu,v) = (-1)^{|u||X|}\mathcal{B}(u,Xv).$$

On définit de la même façon $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$ pour une forme bilinéaire $\mathcal{B}$ superantisymétrique sur V.

3.1.1. *Morphismes.* Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux superalgèbres de Lie. Un morphisme ϕ de superalgèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ est un morphisme pair de superespaces vectoriels qui respecte le crochet :

$$\phi([v,w]) = [\phi(v),\phi(v)] \quad \text{pour } v,w \in \mathfrak{g}.$$

Exemple: L'isomorphisme impair entre $(V,\mathcal{B})$ et $(\Pi V,\Pi\mathcal{B})$ si $\mathcal{B}$ est une forme bilinéaire supersymétrique ou superantisymétrique induit un isomorphisme pair entre $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$ et $\mathfrak{osp}(\Pi V,\Pi\mathcal{B})$.

3.1.2. *Représentations.* Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie. On appelle représentation de $\mathfrak{g}$ la donnée d'un superespace vectoriel V et d'un morphisme de superalgèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V) = End(V)$.

Exemple: On appelle représentation adjointe (notée ad) de $\mathfrak{g}$ la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ par le crochet. Si $v,w \in \mathfrak{g}$ on pose :

$$ad(v)w = [v,w].$$

Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie et V et W deux représentations de $\mathfrak{g}$. On définit une représentation $V \otimes W$ en posant pour $X \in \mathfrak{g}, v \in V, w \in W$ homogènes :

$$X(v\otimes w) = Xv\otimes w + (-1)^{|X||v|}v\otimes Xw.$$

On définit ainsi si V est une représentation de $\mathfrak{g}$ une représentation sur la superalgèbre tensorielle $T(V)$ puis par passage au quotient sur la superalgèbre symétrique $S(V)$. De même on définit à l'aide de l'isomorphisme entre $\mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{gl}(\Pi V)$ les représentations sur ΠV et $S(\Pi V)$.

3.2. Supergroupes.

DÉFINITION 3.2. *On appelle supergroupe une supervariété G munie de trois morphismes :*

$$\begin{array}{rrcll} m: & G \times G & \longrightarrow & G & (\textit{multiplication}), \\ i: & G & \longrightarrow & G & (\textit{inverse}), \\ e: & \{pt, \mathbb{R}\} & \longrightarrow & G & (\textit{neutre}). \end{array}$$

vérifiant les relations de commutation suivantes où Δ est le morphisme diagonal de G dans $G \times G$, $\pi : G \longrightarrow \{pt\}$ le morphisme canonique et $j_1 : G \longrightarrow G \times \{pt\}$ l'injection canonique (resp. $j_2 : G \longrightarrow \{pt, \mathbb{R}\} \times G$)

$$m \circ (m \times Id_G) = m \circ (Id_G \times m),$$
$$m \circ (i \times Id_G) \circ \Delta = m \circ (Id_G \times i) \circ \Delta = e \circ \pi,$$
$$m \circ (e \times Id_G) \circ j_1 = m \circ (Id_G \times e) \circ j_2 = Id_G.$$

On notera aussi e l'image du point dans G_0.
Remarque: De la même façon que l'on peut considérer une supervariété comme un foncteur de la catégorie des superalgèbres proches dans la catégorie des ensembles, on peut considérer un supergroupe comme un foncteur de la catégorie des superalgèbres proches dans la catégorie des groupes.

Exemple: L'espace $End(V)$ est naturellement muni d'une structure de supervariété dont la variété sous-jacente est $End(V)_0 = End(V_0) \oplus End(V_1)$ considéré comme variété $\mathcal{C}^\infty$. On définit $GL(V)$ comme la sous supervariété ouverte de $End(V)$ d'ouvert sous-jacent $GL(V)_0 = GL(V_0) \times GL(V_1)$. L'espace $GL(V)$ est naturellement muni d'une structure de supergroupe. On a $\mathcal{O}_{GL(V)} = \mathcal{O}_{GL(V)_0} \otimes \bigwedge \mathfrak{gl}(V)_1^*$

On note $\mathfrak{G}$ le foncteur de la catégorie des superalgèbres proches dans celle des groupes qui à toute superalgèbre proche P associe les matrices inversibles de $\mathfrak{gl}(n,m)_P$. On pose $GL(n,m,P) := \mathfrak{G}(P)$. Ce foncteur est représentable et on note $GL(n,m)$ le supergroupe qui le représente. Concrètement $GL(n,m,P)$ est le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec A et D matrices (n,n) et (m,m) respectivement à coefficients dans P_0 et inversibles et B, C à coefficients dans P_1 quelconques.

3.2.1. *Morphismes.* Soient G_1 et G_2 deux supergroupes. On appelle morphisme de supergroupes un morphisme ϕ de supervariétés qui commute avec les structures de groupes. C'est-à-dire que si l'on note m_k et i_k la multiplication et l'inverse dans G_k on impose :

$$\begin{aligned}\phi \circ i_1 =& i_2 \circ \phi,\\ \phi \circ m_1 =& m_2 \circ (\phi \times \phi).\end{aligned}$$

Exemple: Les supergroupes $GL(V)$ et $GL(\Pi V)$ sont isomorphes. En effet $GL(\Pi V)$ est l'ouvert des éléments inversibles de $End(\Pi V)$. Or on a vu que l'on a une structure de $End(V)$ module sur ΠV, c'est-à-dire que l'on a un morphisme pair de superalgèbres de $End(V)$ dans $End(\Pi V)$ qui envoie ϕ sur $(-1)^{|\phi|}\phi$. Ce morphisme est bijectif. Par conséquent il induit un isomorphisme entre $GL(V)$ et $GL(\Pi V)$.

3.2.2. *Sous-supergroupe.* On appelle sous-supergroupe fermé de G une sous-supervariété fermée H de G telle que H soit stable part les morphismes i et m. En particulier un sous supergroupe est un supergroupe et H_0 est un sous groupe de Lie de G_0.

Soient H et G deux supergroupes. Une immersion fermée de H dans G est un isomorphisme de H sur un sous-supergroupe de G.

Fonctoriellement si le supergroupe G est représenté par un foncteur $\mathfrak{G}$ de la catégorie des superalgèbres proches dans la catégorie des groupes, un sous-supergroupe H est la donnée d'un sous-foncteur $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ qui envoie toute superalgèbre proche P sur un sous-supergroupe $\mathfrak{H}(P)$ de $\mathfrak{G}(P)$ et tel que de plus $\mathfrak{H}$ soit représentable par une supervariété.

3.2.3. *Composante neutre.* Soit G un supergroupe. On appelle composante neutre de G et on note G^0 le sous-supergroupe de G défini par l'ouvert (et fermé) G_0^0 de G_0 où G_0^0 est la composante connexe de G_0 contenant l'élément neutre de G_0.

3.2.4. *Superalgèbre de Lie associée à un supergroupe.*

Soit G un supergroupe de Lie on lui associe la superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs sur G invariants par translation à gauche. C'est le sous espace $\mathcal{D}er_G(G)^G$ de $\mathcal{D}er_G(G)$ pour la multiplication à gauche m_g de G dans G.

On a de plus comme dans la situation classique un isomorphisme de superespaces vectoriels entre $\mathfrak{g}$ et $T_e(G)$ l'espace tangent de G en l'élément neutre. En particulier $\mathfrak{g}$ a la même dimension que G.

3.2.5. *Représentations.* Soit G un supergroupe. On appelle représentation de dimension finie de G (sous-entendu à gauche) la donnée d'un superespace vectoriel V et d'un morphisme ρ de supergroupes de G dans $GL(V)$. En particulier comme $GL(V) \subset End(V)$ et que $End(V) \simeq V \otimes V^*$, on peut considérer ρ comme un élément de $\mathcal{O}_G(G) \otimes (V \otimes V^*)$.

On appelle représentation à droite de G la donnée d'un superespace vectoriel V et d'un morphisme ρ_d de G dans $GL(V)^{opp}$ où $GL(V)^{opp}$ est le groupe $GL(V)$ muni de la multiplication inversée : $m_i = m \circ \delta_i$, δ_i étant l'inversion des facteurs de $GL(V) \times GL(V)$ dans $GL(V) \times GL(V)$. Plus précisément on a $\delta_i(g, g') = (g', g)$ pour $(g, g') \in GL(V)_0 \times GL(V)_0$, et si $f \in \mathcal{O}_{GL(V)}(U)$ et $f' \in \mathcal{O}_{GL(V)}(U')$ (U, U' ouverts de $GL(V)_0$) sont homogènes on a $\delta_i^*(f \otimes f') = (-1)^{|f||f'|} f' \otimes f$. On peut considérer $GL(V)^{opp}$ comme un ouvert de $V^* \otimes V$ à l'aide de l'anti-isomorphisme de superalgèbres de $V \otimes V^*$ sur $V^* \otimes V$ qui envoie $\phi \otimes v$ sur $(-1)^{|v||\phi|} v \otimes \phi$. Ainsi, on considère ρ_d comme un élément de $(V^* \otimes V) \otimes \mathcal{O}_G(G)$.

PROPOSITION 3.1. *Soit V un superespace vectoriel. Une représentation (à gauche) de G sur V est une structure de $\mathcal{O}_G(G)$-supercomodule (à gauche) sur V, c'est-à-dire un morphisme de superespaces vectoriels*

$$\rho : V \to \mathcal{O}_G(G) \otimes V,$$

qui vérifie :

$$(Id_{\mathcal{O}_G(G)} \otimes \rho) \circ \rho = (m^* \otimes Id_V) \circ \rho,$$
$$(e^* \otimes Id_V) \circ \rho = Id_V,$$

où m et e sont la multiplication et l'élément neutre de G.

Si V est un superespace vectoriel topologique localement convexe, on appelle représentation différentiable un morphisme continu ρ de V dans $\mathcal{O}_G(G) \widehat{\otimes} V$ qui vérifie les relations ci-dessus. Si V est de dimension finie, toute représentation est une représentation différentiable.

On définirait de même une représentation différentiable à droite sur un espace vectoriel topologique V.

Exemple: On considère $G = GL(n, m)$ et $V = \mathfrak{gl}(n, m)$. La supervariété G est une sous-supervariété ouverte de $\mathfrak{gl}(n, m)$ et la loi de groupe sur G est la restriction à G de la multiplication dans l'algèbre (associative) $\mathfrak{gl}(n, m)$. On a donc une représentation naturelle à gauche (resp. à droite) de $GL(n, m)$ sur $\mathfrak{gl}(n, m)$ par multiplication à gauche (resp. à droite) on la note ρ_g (resp. ρ_d). Ces deux représentations commutent. On définit alors la représentation adjointe de $GL(n, m)$ dans $\mathfrak{gl}(n, m)$ par :

$$Ad = \rho_g . (\rho_d \circ i),$$

où . est la composition des endomorphismes dans $End(\mathfrak{gl}(n,m))$, et i l'inverse de $GL(n,m)$. C'est une représentation à gauche de $GL(n,m)$ dans $\mathfrak{gl}(n,m)$. Si l'on considère les points à valeurs dans une superalgèbre proche P, on a si $g \in GL(n,m)_P$ et $X \in \mathfrak{gl}(n,m)_P$:

$$Ad(g).X = gXg^{-1}.$$

Si V et W sont deux représentations de G on définit une représentation de G sur $V \otimes W$. La représentation de G sur V est un morphisme ρ_V de G dans $GL(V)$, celle de G sur W est un morphisme ρ_W de G dans $GL(W)$. Or comme l'on a remarqué que $\mathcal{O}_{GL(V)} = \mathcal{O}_{GL(V)_0} \otimes \bigwedge \mathfrak{gl}(V)_1^*$ et que l'on a une immersion fermée de $GL(V)_0 \times GL(W)_0$ dans $GL(V \otimes W)_0$, on a une immersion i de $GL(V) \times GL(W)$ dans $GL(V \otimes W)$. La représentation de G dans $V \otimes W$ est alors donnée par le morphisme $i \circ (\rho_V \times \rho_W)$. On a alors également des représentations de G sur $T(V), S(V)$ et $\bigwedge V$.

3.2.6. *Supergroupe agissant sur une supervariété.* Soit G un supergroupe et M une supervariété. On dit que G agit sur M (sous entendu à gauche) sur M si l'on a un morphisme de supervariétés δ de $G \times M$ dans M qui vérifie :

$$\delta \circ (e \times Id_M) = Id_M,$$
$$\delta \circ (m \times Id_M) = \delta \circ (Id_G \times \delta).$$

Si U est un ouvert G-invariant de M (c'est-à-dire si U_0 est un ouvert G_0-invariant de M_0) alors on a une représentation de G dans $\mathcal{O}_M(U)$. Le morphisme δ de $G \times M$ dans M donne un morphisme δ^* de $\mathcal{O}_M(U)$ dans $\mathcal{O}_G(G)\hat{\otimes}\mathcal{O}_M(U)$ ($\delta^{-1}(U) = G \times U$) qui peut s'exprimer comme un élément de $\mathcal{O}_G(G)\hat{\otimes}(\mathcal{O}_M(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_M(U)^*)$ Les relations ci-dessus assurent que c'est une représentation de G dans $\mathcal{O}_M(U)$.

On dit que G agit à droite sur M si l'on a un morphisme de supervariétés δ_d de $M \times G$ dans M qui vérifie :

$$\delta_d \circ (Id_M \times e) = Id_M,$$
$$\delta_d \circ (Id_M \times m) = \delta_d \circ (\delta_d \times Id_G).$$

On a de la même façon pour tout ouvert G-invariant U de M une représentation à droite de G dans $\mathcal{O}_M(U)$.

Si δ est une action à droite on tire une action à gauche en posant $\delta^g = \delta \circ (Id_M \times i) \circ j$ où i est l'inverse de G et j l'inversion des facteurs de $M \times G$ dans $G \times M$. On peut également remarquer qu'une action à gauche et une action à droite commutent.

Soit M une G-supervariété. On a donc une application δ^* de $\mathcal{O}_M(M)$ dans $\mathcal{O}_G(G) \otimes \mathcal{O}_M(M)$. Soit $X \in \mathfrak{g}$ c'est une dérivation de $\mathcal{O}_G(G)$. On la fait agir sur $\mathcal{O}_G(G) \otimes \mathcal{O}_M(M)$ par produit tensoriel avec la dérivation triviale sur $\mathcal{O}_M(M)$. On identifie M avec $M \times \{e\}$ où e est l'élément neutre de G. On a donc une injection j de M dans $G \times M$ et un morphisme j^* de $\mathcal{O}_G(G) \otimes \mathcal{O}_M(M)$ dans $\mathcal{O}_M(M)$. L'application :

$$j^* \circ X \circ \delta^* : \mathcal{O}_M(M) \longrightarrow \mathcal{O}_M(M),$$

est une dérivation de $\mathcal{O}_M(M)$ que l'on note X_M. L'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{D}er_M(M)$ qui à X associe X_M est un morphisme de superalgèbres de Lie.

Exemple: On a une action naturelle de G sur lui même considéré comme supervariété par multiplication à gauche (resp. à droite), on note δ_g (resp. δ_d) cette action. Ces deux actions commutent et on appelle action (action adjointe) de G sur lui même par automorphismes intérieurs l'action à gauche donnée par :

$$i_G := \delta_g \circ \Big(Id_G \times (\delta_d \circ \delta_i \circ (i \times Id_G))\Big) \circ \Big(\Delta_G \times Id_G\Big) : G \times G \to G$$

où i est l'inverse, Δ est l'application diagonale de G dans $G \times G$ et δ_i l'inversion des facteurs de $G \times G$ dans $G \times G$. Lorsque l'on passe aux points proches, si $g, g_0 \in G_P$ pour une algèbre proche P, on a $(i_G)_P(g_0, g) = g_0.g.g_0^{-1}$. C'est donc pour g_0 fixé un automorphisme intérieur de G_P. Cela se traduit au niveau de G par la relation de commutation suivante (m étant la multiplication de G) :

$$i_G \circ (Id_G \times m) = m \circ (i_G \times i_G) \circ (Id_G \times \delta_i \times Id_G) \circ (\Delta \times Id_G \times Id_G).$$

Exemple: Superfibré équivariant. On appelle superfibré G-équivariant, un superfibré vectoriel $\pi : \mathcal{V} \to M$ tel que G agisse de manière équivariante sur $\mathcal{V}$ et sur M et tel que l'action de G sur $\mathcal{V}$ induise une représentation de G sur le superespace vectoriel $\Gamma_{\mathcal{V}}$ L'équivariance signifie que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ {\scriptstyle Id_G \times \pi}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times M & \longrightarrow & M \end{array}$$

3.2.7. *Stabilisateur.* Soit G un supergroupe et M une G-supervariété. On note δ l'action de G sur M. On note $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{d}$ les foncteurs associés à G, M et δ respectivement. Soit N une sous-supervariété fermée de M et $\mathfrak{N}$ le sous-foncteur de $\mathfrak{M}$ associé. On appelle stabilisateur de N le sous-supergroupe de G représentant le foncteur $\mathfrak{H}$ qui à toute superalgèbre proche P associe le stabilisateur $\mathfrak{H}(P)$ de $\mathfrak{N}(P)$ dans $\mathfrak{G}(P)$.

On dit que N est G-invariante si et seulement si $G_N = G$. Si V est un superespace vectoriel muni d'une représentation de G, on note V^G le sous-superespace vectoriel de ses éléments G-invariants.

Exemple: De même que l'on définit la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$ pour une forme bilinéaire $\mathcal{B}$ supersymétrique ou superantisymétrique, on définit maintenant le supergroupe $OSP(V,\mathcal{B})$. De la représentation standard de $GL(V)$ sur V on déduit une représentation sur $S^2(V^*)$. Or $\mathcal{B}$ est défini par un élément de $S^2(V^*)$ On définit alors $OSP(V,\mathcal{B})$ comme le stabilisateur de $\mathcal{B}$ dans $GL(V)$. De plus on a un isomorphisme entre $OSP(V,\mathcal{B})$ et $OSP(\Pi V,\Pi\mathcal{B})$.

L'algèbre de Lie de $OSP(V,\mathcal{B})$ est $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$.

3.2.8. *Représentations adjointes et coadjointes.* On a une action de G sur lui même par les automorphismes intérieurs. De cette action on déduit une représentation de G dans $\mathcal{D}er_G$ qui laisse stable $\mathfrak{g}$ car sur $\mathfrak{g}$ elle est égale à $m_d \circ i$. On a donc une représentation de G dans $GL(\mathfrak{g})$ que l'on appelle action adjointe et que l'on note Ad. Cette représentation est un morphisme de G dans $GL(\mathfrak{g})$. Il donne un morphisme entre $\mathcal{D}er_G(G)$ et $\mathcal{D}er_{GL(\mathfrak{g})}(GL(\mathfrak{g}))$ qui se restreint en une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ qui est la représentation adjointe introduite plus haut et notée ad.

D'autre part on a vu que à tout endomorphisme ϕ de $\mathfrak{g}$ on associe un endomorphisme ${}^{str}\phi$ de $\mathfrak{g}^*$. On note $*$ le morphisme ainsi obtenu de $End(\mathfrak{g})$ dans $End(\mathfrak{g}^*)$. De la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ on déduit alors une représentation, appelée représentation coadjointe, de G sur $\mathfrak{g}^*$:

$$Ad^* := -* \circ Ad.$$

3.2.9. *Bérézinien.*
Bérézin a introduit la généralisation suivante du déterminant.

Définition 3.3. *Soient $\mathcal{A}$ une superalgèbre supercommutative et*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n,m)_{\mathcal{A}}.$$

Si D est inversible, on pose :

$$Ber(M) = det(A - BD^{-1}C)det(D)^{-1}.$$

On définit ainsi une fonction sur $GL(n,m)$ que l'on note Ber et que l'on appelle le bérézinien.

On définit encore les béréziniens suivants sur $GL(n,m)$ qui sont des généralisations de $|Det|$. Le groupe de Lie $GL(n,m)_0$ est canoniquement isomorphe $GL(n)\times GL(m)$. On a :

$$GL(n,m)/GL(n,m)^0 \simeq GL(n)/GL(n)^0 \times GL(m)/GL(m)^0 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

Il y a 4 morphismes de $GL(n,m)/GL(n,m)^0$ dans $\{-1,1\}$: le morphisme identiquement égal à 1, le morphisme $\sigma_1 : (a,b) \mapsto (-1)^a$ (avec $a \in GL(n)/GL(n)^0, b \in$

$GL(m)/GL(m)^0$), le morphisme $\sigma_2 : (a,b) \mapsto (-1)^b$, et enfin le morphisme $\sigma_0 := \sigma_1\sigma_2$. Soit p la projection canonique de $Gl(n,m)$ sur $GL(n,m)/GL(n,m)^0$. On pose alors $\epsilon_i := \sigma_i \circ p$. On pose alors :

Définition 3.4.

$$\begin{aligned} Ber_{(0,1)} &:= \epsilon_2 Ber, \\ Ber_{(1,0)} &:= \epsilon_1 Ber, \\ Ber_{(1,1)} &:= \epsilon_0 Ber. \end{aligned}$$

On note pour $A = (a_{i,j})_{(i,j)}$, $\widetilde{A}$ la matrice $(\widetilde{a}_{i,j})_{(i,j)}$ où $\widetilde{a}_{i,j} \in \mathbb{R}$ est le projeté canonique de $a_{i,j} \in P$. Si l'on considère une matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(n,m)_P,$$

on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} Ber_{(0,1)}(M) &:= \Big(\frac{|det(\widetilde{D^{-1}})|}{det(\widetilde{D^{-1}})}\Big) det(A - BD^{-1}C) det(D)^{-1}, \\ Ber_{(1,0)} &:= \Big(\frac{|det(\widetilde{A})|}{det(\widetilde{A})}\Big) det(A - BD^{-1}C) det(D)^{-1}, \\ Ber_{(1,1)} &:= \Big(\frac{|det(\widetilde{A}D^{-1})|}{det(\widetilde{A}D^{-1})}\Big) det(A - BD^{-1}C) det(D)^{-1}. \end{aligned}$$

On a pour ces quatre béréziniens la propriété fondamentale (que l'on n'énonce que pour Ber mais elle est vraie aussi pour $Ber_{(0,1)}, Ber_{(1,0)}$ et $Ber_{(1,1)}$) :

Proposition 3.2. *Le bérézinien, $Ber : GL(n,m) \longrightarrow GL(1)$, est un morphisme de supergroupes.*

Démonstration: Voir par exemple [Ber87] ou [BL77b] ♢

Cette propriété implique en particulier que le bérézinien est invariant par automorphismes intérieurs de $GL(n,m)$, et est donc indépendant de la base de $\mathbb{R}^{(n,m)}$ choisie pour la représentation matricielle. On peut donc définir le bérézinien sur $GL(V)$ pour un superespace vectoriel V de dimension finie et sur $GL(V)_P$ pour une superalgèbre proche P. Si on note ϕ l'isomorphisme entre $GL(V)$ et $GL(\Pi V)$ et Ber_V (resp. $Ber_{\Pi V}$) le bérézinien sur $GL(V)$ (resp. $GL(\Pi V)$) alors

$$Ber_{\Pi V} \circ \phi = Ber_V^{-1}.$$

3.3. Superfibrés principaux.

3.3.1. *Définition.*

DÉFINITION 3.5. *Soit M et N deux supervariétés. On appelle fibré de fibre N au dessus de M une supervariété $\mathcal{N}$ muni d'un morphisme de supervariétés $\pi : \mathcal{N} \longrightarrow M$ tel que pour tout $m \in M$, il existe un ouvert U (appelé ouvert de trivialisation) de M contenant m et un isomorphisme $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times N$ vérifiant la condition suivante.*

Pour tout ouvert U le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi_U} & U \times N \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{Id} & U \end{array} .$$

On peut alors poser :

DÉFINITION 3.6. *Soit G un supergroupe de Lie et M une supervariété. On appelle fibré principal de groupe structurel G sur M un fibré $\pi : \mathcal{P} \to M$ de fibre G muni d'une action à droite de G qui soit libre et telle que sur un ouvert de trivialisation de $\mathcal{P}$, soit $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$, l'action de G soit la multiplication à droite par G sur G et triviale sur U. On note :*

$$\delta : \mathcal{P} \times G \to \mathcal{P},$$

l'action de G.

Exemple: Soient M une supervariété et $\mathcal{V}$ un superfibré vectoriel de rang (k, l) au dessus de M. Reprenons les notations de la section **2.2**. On note π la projection de $\mathcal{V}$ sur M et V une fibre de $\mathcal{V}$. Pour tout ouvert de trivialisation U on note ψ_U l'isomorphisme entre $\pi^{-1}(U)$ et $U \times V$ et on pose $\psi_{U,U'} = \psi_U \circ \psi_{U'}^{-1}$ pour deux ouverts de trivialisation U et U'. On pose pour tout ouvert de trivialisation U de $\mathcal{V}$ $\pi_G^{-1}(U) = U \times GL(V)$ et pour deux ouverts de trivialisation U et U' on pose $\phi_{U,U'} = Ad(\psi_{U,U'})$. La donnée des $\pi_G^{-1}(U)$ et des morphismes de transition $\phi_{U,U'}$ définit un superfibré principal de groupe structurel $GL(V)$ que l'on note $GL(\mathcal{V})$.

3.3.2. *Superfibrés vectoriels associés à un fibré principal.*

Comme dans la situation classique, si on a un fibré principal $\mathcal{P}$ de supergroupe structurel G et une représentation ρ de G dans un superespace vectoriel V, on lui associe un superfibré vectoriel $\mathcal{V}$. On considère pour tout ouvert U de M le superespace vectoriel $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(U)) \otimes V$. On a une représentation à droite de G sur $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(U))$, on en déduit de une représentations à gauche. On a de plus une représentation de G sur V. Finalement on a une représentation à gauche (tensorielle) de G sur $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(U)) \otimes V$. On pose alors $\Gamma_{\mathcal{V}}(U) = (\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(U)) \otimes V)^G$ c'est le sous-espace des éléments G-invariants. Cela définit un faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules localement libres, et donc un superfibré vectoriel $\mathcal{V}$ sur M.

3.4. Superconnexion sur un superfibré principal et superconnexion sur un superfibré vectoriel associé. Soient G un supergroupe de Lie de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$, M une supervariété et $\mathcal{P}$ un superfibré principal au dessus de M de groupe structurel G.

On appelle superconnexion sur $\mathcal{P}$ une 1-forme impaire ω sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui soit G-invariante et telle que pour tout X dans $\mathfrak{g}$ on ait :

$$\iota(X_{\mathcal{P}})\omega = X.$$

On appelle courbure de la superconnexion ω la 2-forme Ω sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ nulle sur les champs de vecteurs verticaux et G-invariante (on appelle une telle forme basique) définie par :

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Considérons maintenant un superfibré vectoriel $\pi : \mathcal{V} \to M$ associé à une représentation ρ de G dans V. Soit $\widehat{(\mathcal{P}, V)}$ (resp. $\widehat{\Omega}(\mathcal{P}, \mathcal{V})$) l'espace des formes pseudodifférentielles à valeurs dans V (resp $\mathcal{V}$). On appelle horizontales les formes $\omega \in \widehat{\Omega}(\mathcal{P}, V)$ (resp. $\omega \in \widehat{\Omega}(\mathcal{P}, \mathcal{V})$) telles que pour tout X dans $\mathfrak{g}$ on ait

$$\iota(X_{\mathcal{P}})\omega = 0.$$

On appelle basiques les formes qui sont horizontales et G-invariantes. On note $\widehat{\Omega}(\mathcal{P}, V)_{bas}$ (resp. $\widehat{\Omega}(\mathcal{P}, \mathcal{V})_{bas}$) l'espace des formes basiques. Le diagramme commutatif suivant définit une superconnexion $\mathbb{A}$ sur $\mathcal{V}$ associée à la superconnexion ω sur $\mathcal{P}$:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\Omega}(\mathcal{P}, V)_{bas} \arrow[r, "d+\rho(\omega)"] \arrow[d] & \widehat{\Omega}(\mathcal{P}, V)_{bas} \arrow[d] \\
\widehat{\Omega}(M, \mathcal{V}) \arrow[r, "\mathbb{A}"] & \widehat{\Omega}(M, \mathcal{V}).
\end{tikzcd}$$

La courbure $\mathbb{A}^2$ est alors déterminée par $\rho(\Omega)$.

Exemple: Soit G un supergroupe de Lie. Une G-supervariété est dite homogène s'il existe un sous supergroupe fermé H de G tel que M soit isomorphe à G/H. Le supergroupe G est alors un fibré principal sur G/H de groupe structurel H. La donnée d'une superconnexion G-invariante sur $G \to G/H$ est alors équivalente à la donnée d'un supplémentaire H-invariant $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. On note p la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$ parallèlement à $\mathfrak{r}$. La courbure Ω sur G est alors déterminée par l'application superantisymétrique (cf [BGV92]) :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{h} \\
(X, Y) &\longmapsto p([X, Y]) - [p(X), p(Y)].
\end{aligned}$$

4. Intégration

4.1. Intégration dans les supervariétés.

4.1.1. *Orientation et superstructure euclidienne.*

DÉFINITION 4.1. *On dit que la supervariété M est orientée si M_0 est orientée. On dit que M est globalement orientée si $\widehat{M}$ est orientée, c'est-à-dire si la variété $(TM)_1|_{M_0}$ est orienté. On dit que M est négativement orientée si le fibré de $(TM)_1|_{M_0} \longrightarrow M_0$ est orienté. Enfin on dit que M est totalement orientée si elle est à la fois orientée et globalement orientée. De manière équivalente, M est totalement orientée si les fibrés vectoriels $(T_M)_0|_{M_0} \longrightarrow M_0$ et $(T_M)_1|_{M_0} \longrightarrow M_0$ sont orientées.*

De même si V est un superespace vectoriel, on dit qu'il est orienté (resp. globalement, négativement, totalement) s'il l'est considéré comme une supervariété.

On note $GL(n,m)_{(+,-)}$ (resp. $GL(n,m)_{(-,+)}$, resp. $GL(n,m)_{(-,-)}$) le plus grand sous-supergroupe ouvert de $GL(n,m)$ tel que sur $(GL(n,m)_{(+,-)})_0$ (resp. $\widetilde{Ber_{(0,1)}} >$ 0 resp. $(GL(n,m)_{(-,+)})_0$, resp. $(GL(n,m)_{(-,-)})_0$ $\widetilde{Ber_{(1,0)}} > 0$, resp. $\widetilde{Ber} > 0$). On reprend les notations de la section **3.2.8**. Pour toute superalgèbre proche P, $GL(n,m)_{(+,-)P}$ (resp. $GL(n,m)_{(-,+)P}$, resp. $GL(n,m)_{(-,-)P}$) est le sous-groupe de $GL(n,m)_P$ des matrices telles que $det(\widetilde{A}) > 0$ (resp. $det(\widetilde{D}) > 0$, resp. $det(\widetilde{A}\widetilde{D}) >$ 0). On pose de plus $GL(n,m)_{(+,+)} = GL(n,m)_{(+,-)} \cap GL(n,m)_{(-,+)}$. Dire que M est orientée (resp. négativement, resp. globalement, resp. totalement) c'est dire que le fibré tangent TM peut être associé à un fibré principal de groupe structurel $GL(n,m)_{(+,-)}$ (resp. $GL(n,m)_{(-,+)}$, resp. $GL(n,m)_{(-,-)}$, resp. $GL(n,m)_{(+,+)}$).

- Sur $GL(n,m)_{(+,-)}$, $Ber_{(1,0)}$ et Ber sont égaux ainsi que $Ber_{(0,1)}$ et $Ber_{(1,1)}$.
- Sur $GL(n,m)_{(-,+)}$, $Ber_{(0,1)}$ et Ber sont égaux ainsi que $Ber_{(1,0)}$ et $Ber_{(1,1)}$.
- Sur $GL(n;m)_{(-,-)}$, $Ber_{(1,0)}$ et $Ber_{(0,1)}$ sont égaux ainsi que $Ber_{(1,1)}$ et Ber.
- Sur $GL(n,m)_{(+,+)}$, les quatre béréziniens sont égaux.

On introduit également les notions suivantes :

DÉFINITION 4.2. *On dit que M possède une superstructure euclidienne (resp. une superstructure euclidienne faible) si le faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules $\mathcal{D}er_M$ est muni d'une forme bilinéaire paire à valeurs dans $\mathcal{O}_M$ qui lui donne une superstructure euclidienne (resp. une superstructure euclidienne faible) relativement à tous les morphismes d'évaluation :*

$$\begin{aligned} \phi_x : \mathcal{O}_M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

lorsque x parcourt M_0.

Si M est munie d'une superstructure euclidienne (ou seulement d'une superstructure euclidienne faible) alors M_0 est une variété riemannienne et on appelle "boule" de centre m et de rayon a pour $m \in M_0$ et $a > 0$ l'ouvert de M au dessus de l'ouvert image par l'application exponentielle (entre $(T_m M)_0$ et M_0) de $B(0, a)$, la boule de centre 0 et de rayon a de $T_m M_0$.

4.1.2. *Intégration dans* $\mathbb{R}^{(n,m)}$.

Définition 4.3. *Soit* $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ *les coordonnées canoniques sur* $\mathbb{R}^{(n,m)}$. *Soit* $f = \sum_I f_I \xi_I$ *une fonction sur* $\mathbb{R}^{(n,m)}$. *On définit, lorsque* $f_{\{1,\ldots,m\}}$ *est intégrable au sens de Lebesgue, l'intégrale de* f *par :*

$$\int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} f D(x_i, \xi_j) := \int_{\mathbb{R}^n} f_{\{1,\ldots,m\}} dx_1 \ldots dx_n.$$

Le symbole $D(x_i, \xi_j)$ *rappelle que cette définition dépend du système de coordonnées* $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$.

Remarque: Comme ici on considère des fonctions telles que f_I est $\mathcal{C}^\infty$ pour tout I, on sera amené à considérer deux classes particulières de fonctions intégrables : les fonctions à support compact et les fonctions à décroissance rapide. Une fonction réelle f sur $\mathbb{R}^n$ sera dite à décroissance rapide si pour tout multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et tout multiindice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (avec $|\beta| = \sum_i \beta_i$) la fonction

$$x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f(x)$$

est bornée. Par définition, une fonction sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$ aura l'une de ces deux propriétés si tous les f_I l'ont.

Définition 4.4. *Soit* ϕ *un difféomorphisme de* $\mathbb{R}^{n,m}$. *On pose* $y_i = \phi^*(x_i)$ *et* $\eta_j = \phi^*(\xi_j)$. *On note* $J(\phi)$ *ou* $J(\frac{(y_i,\eta_j)}{(x_i,\xi_j)})$ *la matrice Jacobienne de* ϕ. *C'est la matrice :*

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} & \frac{\partial y_i}{\partial \xi_j} \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} & \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} \end{pmatrix} \in GL(n, m, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n,m}}(\mathbb{R}^{n,m})).$$

Proposition 4.1. *Soit* ϕ *un difféomorphisme de* $\mathbb{R}^{n,m}$. *Soit* f *une fonction à support compact sur* $\mathbb{R}^{n,m}$, *alors on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^{n,m}} \phi^*(f)\ Ber_{(1,0)}(J(\phi))\ D(x_i, \xi_j) = \int_{\mathbb{R}^{n,m}} f\ D(x_i, \xi_j).$$

Démonstration: cf [Ber87] $\diamondsuit$

4.1.3. *Intégration dans les supervariétés.* On considère une supervariété M. On appelle forme volume sur M (resp. forme volume de type $(1,0)$, de type $(0,1)$, de type $(1,1)$) une section du superfibré vectoriel sur M construit à partir du fibré principal $GL(TM)$ et de la représentation Ber (resp. $Ber_{(1,0)}$, $Ber_{(0,1)}$, $Ber_{(1,1)}$) de $GL_{(n,m)}$ de rang $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) si m est pair (resp. impair). Plus précisément, soit U un ouvert de trivialisation de TM. A toute base (sur $\mathcal{O}(U)$) $(\zeta_1,\dots,\zeta_{n+m})$ de $\Gamma_U(TM)$ on associe

$$\nu(\zeta_1,\dots,\zeta_{n+m}) \in \mathcal{O}(U)$$

de sorte que si $(\zeta'_1,\dots\zeta'_{n+m})$ est une autre base de $\Gamma_U(TM)$ avec

$$\zeta'_j = \sum_i \zeta_i \gamma_{i,j},$$

$\gamma = (\gamma_{i,j}) \in GL(n,m,\mathcal{O}(U))$, on ait :

$$\begin{aligned}
\nu(\zeta'_1,\dots,\zeta'_{n+m}) &= Ber(\gamma)\nu(\zeta_1,\dots,\zeta_{n+m})\\
(resp. &= Ber_{(1,0)}(\gamma)\nu(\zeta_1,\dots,\zeta_{n+m}),\\
resp. &= Ber_{(0,1)}(\gamma)\nu(\zeta_1,\dots,\zeta_{n+m}),\\
resp. &= Ber_{(1,1)}(\gamma)\nu(\zeta_1,\dots,\zeta_{n+m}),).
\end{aligned}$$

Exemple: En particulier, on définit sur $\mathbb{R}^{n,m}$ une forme volume de type $(1,0)$ canonique de type que l'on note $D(x_i,\xi_j)$ en posant $D(x_i,\xi_j)(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial \xi_j}) = 1$. On peut définir de même sur $\mathbb{R}^{n,m}$ une forme volume canonique (resp. de type $(0,1)$, de type $(1,1)$).

LEMME 4.1. *Soient M et N deux supervariétés de dimension (n,m) et ϕ : $M \longrightarrow N$ un isomorphisme de supervariétés. Soit D une forme volume de type (i,j) (avec la convention qu'une forme volume de type $(0,0)$ est une forme volume) sur N et $\mathcal{V}_{(i,j)}$ le superfibré vectoriel correspondant. Alors le superfibré vectoriel $\phi^*(\mathcal{V}_{(i,j)})$ au dessus de M est canoniquement isomorphe au superfibré vectoriel construit à partir du superfibré principal $GL(TM)$ et de la représentation $Ber_{(i,j)}$ de $GL_{(n,m)}$, et ϕ^*D est une forme volume de type (i,j) sur M.*

Démonstration: Comme ϕ est un isomorphisme, il induit un isomorphisme entre TM et TN et donc un isomorphisme entre $GL(TM)$ et $GL(TN)$. Ainsi $\phi^*(\mathcal{V}_{(i,j)})$ est canoniquement isomorphe au superfibré vectoriel construit à partir du superfibré principal $GL(TM)$ et de la représentation $Ber_{(i,j)}$ de $GL_{(n,m)}$. Comme ϕ^*D est une section de $\phi^*(\mathcal{V}_{(i,j)})$, c'est donc une forme volume de type (i,j) sur M. $\diamondsuit$

La proposition précédente montre que l'on peut, grâce à une partition de l'unité et si les intégrales considérées convergent, intégrer sur une supervariété les formes volumes de type $(1,0)$ à support compact. En effet, soit ω une forme volume de type $(1,0)$, soit $\sum_{i\in I}\phi_i = 1$ une partition de l'unité telle que, pour tout i, ϕ_i soit nulle en dehors d'un ouvert de coordonnées U_i. On note $\psi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n,m}$ l'isomorphisme entre U_i et un ouvert de $\mathbb{R}^{n,m}$. On note $D(x_i,\xi_j)$ la forme volume canonique sur $\mathbb{R}^{n,m}$. On a donc :

$$(\psi_i^{-1})^*(\phi_i\omega) = h_i D(x_i,\xi_j),$$

où h_i est une fonction sur $\mathbb{R}^{n,m}$ à support inclus dans $\psi_i(U_i)$. On pose alors :

$$\int_M \omega := \sum_{i\in I}\int_{\mathbb{R}^{n,m}} h_i\ D(x_i,\xi_j).$$

La formule de la proposition **4.1** assure, comme ω est une forme de type $(1,0)$, que l'expression de droite est indépendante de la partition de l'unité choisie.

Si de plus M est orientée, comme on a vu que pour tout difféomorphisme d'un ouvert de coordonnées préservant l'orientation $Ber_{(1,0)}(J(\phi)) = Ber(J(\phi))$, les formes volumes sont des formes volumes de type $(1,0)$; on peut donc intégrer sur M des formes volume. Concrètement, avec les notations ci dessus, sur un ouvert de coordonnées U_i on choisi des coordonnées x_i et ξ_j orientées et on calcule :

$$\int_{\mathbb{R}^{n,m}} h_i D(x_i,\xi_j).$$

De même si M est globalement orientée, alors $Ber_{(0,1)}(J(\phi)) = Ber_{(1,0)}(J(\phi))$ et on peut intégrer des formes de type $(0,1)$; si M est négativement orientée, $Ber_{(1,0)}(J(\phi)) = Ber_{(1,1)}(J(\phi))$ et on peut intégrer des formes de type $(1,1)$; enfin si M est totalement orientée, on a $Ber_{(0,1)}(J(\phi)) = Ber_{(1,0)}(J(\phi)) = Ber_{(1,1)}(J(\phi))$ $= Ber(J(\phi))$ et on peut intégrer sur M n'importe quel type de forme volume.

4.2. Intégration des formes pseudo différentielles.

4.2.1. *Forme volume canonique.* Soient M une supervariété et U un ouvert de coordonnées de M. On note $(x_1,\dots,x_n,\ \xi_1,\dots,\xi_m)$ le système de coordonnées choisi. Ce choix équivaut à celui d'un isomorphisme ϕ entre U et un ouvert de $\mathbb{R}^{n,m}$ tel que si $(y_1,\dots,y_n,\eta_1,\dots,\eta_m)$ sont les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^{n,m}$, on ait pour tout i, $x_i = \phi^*(y_i)$, et pour tout j, $\xi_j = \phi^*(\eta_j)$. On note alors $D(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$ ou en abrégé $D(x_i,\xi_j)$ la forme volume de type $(1,0)$ $\phi^*(D(y_i,\eta_j))$.

Proposition 4.2. *Soit M une supervariété. Considérons un ouvert de coordonnées U de M. On note $(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$ les coordonnées sur U et on utilise le système de coordonnées $(x_1,\dots,x_n,d\xi_1,\dots,d\xi_m,dx_1,\dots,dx_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$ sur l'ouvert de coordonnées $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$. La forme volume $D_{(0,0)} = D_{(0,0)}(x_1,\dots,x_n,$*

$d\xi_1, \ldots, d\xi_m, dx_1, \ldots, dx_n, \xi_1, \ldots, \xi_m$) est indépendante du système de coordonnées choisi.

Démonstration: En effet, considérons un isomorphisme ϕ d'un ouvert de coordonnées U de M. Il est entièrement défini par la donnée des $\phi_k(x_i, \xi_j) = \phi^*(y_k)$ et les $\psi_l(x_i, \xi_j) = \phi^*(\eta_l)$. Soit J la jacobienne du changement de coordonnées associé, on a alors :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} & \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_j} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} & \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j} \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier l'écriture on pose :

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On a $Ber(J) = det(A - BD^{-1}C)det(D^{-1})$ (c'est une fonction sur M). La jacobienne du changement de coordonnées induit sur $\widehat{M}$ est de la forme :

$$\widehat{J} := \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ D' & D & C & D" \\ A' & B & A & A" \\ C & 0 & 0 & D \end{pmatrix}.$$

Par conséquent si on pose

$$J' := \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix},$$

on a :

$$Ber(\widehat{J}) = Ber(J)Ber(J') = 1.$$

$\diamondsuit$

On a donc sur $\widehat{M}$ une forme volume canonique que l'on note $D_{(0,0)}$, à savoir la section associée à la fonction constante égale à 1 sur le fibré principal associé à $T\widehat{M}$. Soit ω une forme pseudodifférentielle sur M, on dira que ω est intégrable si ω est à support compact sur M_0 et à décroissance rapide le long des fibres de $\widehat{M}_0 = (TM)_1|_{M_0}$.

Si $\widehat{M}$ est orientée (c'est-à-dire M globalement orientée), et si ω est une forme pseudodifférentielle intégrable on peut intégrer la forme volume ωD sur $\widehat{M}$. On pose alors :

$$\int_M \omega := \int_{\widehat{M}} \omega D_{(0,0)}.$$

Exemple: Considérons une supervariété globalement orientée M et U un ouvert de coordonnées sur M. On note $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ les coordonnées sur U. Alors $\widehat{U}$

est un ouvert de coordonnées de $\widehat{M}$ et $(x_1,\dots,x_n,d\xi_1,\dots,d\xi_m)$ est un système de coordonnées sur $\widehat{U}_0$. On suppose que les coordonnées ont été choisies de sorte que $(x_1,\dots,x_n,d\xi_1,\dots,d\xi_m)$ soit orienté comme $\widehat{M}_0$. Une forme pseudodifférentielle sur M à support dans U s'écrit dans le système de coordonnées choisi :

$$\omega = \sum_{I,J} \omega_{I,J}(x_1,\dots,x_n,d\xi_1,\dots,d\xi_m)dx^I\xi^J,$$

avec $\omega_{I,J} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ et si $I = (i_1,\dots,i_n)$ (resp. $J = (j_1,\dots,j_m)$), $dx^I = dx_1^{i_1}\dots dx_n^{i_n}$ (resp. $d\xi^J = \xi_1^{j_1}\dots\xi_m^{j_m}$). On a alors, en supposant les $\omega_{I,J}$ à décroissance rapide en les $d\xi_j$ et à support compact en les x_i :

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \omega_{max,max}(x_1,\dots,x_n,d\xi_1,\dots,d\xi_m)dx_1\dots dx_n d(d\xi_1)\dots d(d\xi_m).$$

Dans l'intégrale de droite dx_i (resp. $d(d\xi_j)$) est la mesure de Lebesgue par rapport à la variable x_i (resp. $d\xi_j$).

Exemple: En particulier si $M = M_0$ est une variété au sens classique et est orientée, alors l'intégrale d'une forme différentielle définie ci-dessus coïncide avec la définition classique.

4.2.2. *Transformation de Baranov-Schwarz.* On peut penser à l'intégration des formes pseudodifférentielles en deux temps. Tout d'abord on effectue une transformation (de Baranov-Schwarz [BS84] et [Vor91]) qui envoie une forme pseudodifférentielle intégrable (à support compact sur M_0 et à décroissance rapide le long des fibres de $\widehat{M}_0$) sur une forme volume de type $(0,1)$ sur M. Ensuite on intègre cette forme volume. Si p est la projection de $\widehat{M}$ sur M, on note p_* la transformation de Baranov-Schwarz. Il nous suffit de l'expliciter localement, on l'obtient globalement grâce à une partition de l'unité. Si $M = \mathbb{R}^{(n,m)}$ on reprend les notations précédentes. On a, par définition :

$$p_*\omega = (-1)^{nm}\left(\int_{\mathbb{R}^m}\sum_J \omega_{I_{max},J}(x_1,\dots,x_n,d\xi_1,\dots,d\xi_m)\xi^J\mathcal{D}(d\xi_1,\dots,d\xi_m)\right)$$
$$\mathcal{D}(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$$

où $\mathcal{D}(d\xi_1,\dots,d\xi_m)$ représente la mesure de Lebesgue en les variables $(d\xi_1,\dots,d\xi_m)$ et $\mathcal{D}(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$ est la forme volume de type $(0,1)$ sur $\mathbb{R}^{n,m}$. Le fait que cela définit une forme volume de type $(0,1)$ sur M provient de la formule de changement de variables pour l'intégration en les variables $dx_1,\dots,dx_n,d\xi_1,\dots,d\xi_m$.

4.2.3. *Premières propriétés de l'intégration.* On se place dans le cas $\mathbb{R}^{(n,m)}$, on note $(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ le système de coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$. Soit $\zeta \in \mathcal{D}er(\mathbb{R}^{(n,m)})$ une dérivation. Écrivons $\zeta = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} g_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ avec f_i et g_j des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$. On appelle divergence de ζ et on note $div(\zeta)$ la fonction sur $\mathbb{R}^{n,m}$ égale à :

$$div(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{|g_j|} \frac{\partial g_j}{\partial \xi_j}.$$

On a le lemme suivant :

LEMME 4.2. *Soit ζ une dérivation de divergence nulle sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$. Soit f une fonction à support compact sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$, alors on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} (\zeta f) D(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_m) = 0.$$

Si ζ est à coefficients polynomiaux et f à décroissance rapide ainsi que ses dérivées (par rapport aux x_i et aux ξ_j), alors le résultat reste valable.

Démonstration: On pose $D = D(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_m)$. On a alors par la formule de Leibnitz :

$$\int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} (\zeta f) D = \int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_i f) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{|g_j|} \frac{\partial}{\partial \xi_j}(g_j f) \Big) - \int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} div(\zeta) f.$$

Or le terme de degré maximal en les ξ_k de $\frac{\partial}{\partial \xi_j}(g_j f)$ est nul. L'intégrale de ses termes est donc nul. D'autre part les propriétés de l'intégration sur $\mathbb{R}^n$ assurent que, puisque f est supposée à support compact, $\int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_i f) = 0$. Ce qui achève la démonstration. $\diamondsuit$

Soit ζ une dérivation sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$. Les dérivations d et $\iota(\zeta)$ sur $\widehat{\mathbb{R}^{(n,m)}} = \mathbb{R}^{(n+m,n+m)}$ sont à coefficients polynomiaux le long des fibres ($\widehat{\mathbb{R}^{(n,m)}}$ est un fibré au dessus de $\mathbb{R}^{(n,m)}$, d est linéaire dans les fibres et $\iota(z)$ est constante) et de divergence nulle. Donc pour tout forme pseudodifférentielle ω sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$ à support compact sur $\mathbb{R}^{(n,m)}$ et à décroissance rapide dans la direction des fibres de $\widehat{\mathbb{R}^{(n,m)}}$, on a avec $\mathcal{L}(\zeta) = [d, \iota(\zeta)]$:

$$\int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} \iota(\zeta)\omega = \int_{\mathbb{R}^{(n,m)}} \mathcal{L}(\zeta)\omega = 0.$$

Supposons M globalement orientée. Alors si ω est une forme pseudodifférentielle intégrable sur M et ζ une dérivation sur M, comme l'intégration de $d\omega, \iota(\zeta)\omega$ et $\mathcal{L}(\zeta)\omega$ se ramène par une partition de l'unité sur $\widehat{M}$ à l'intégration sur des ouverts de coordonnées, les égalités précédentes restent vraies si l'on remplace $\mathbb{R}^{(n,m)}$ par M.

4.2.4. *Application : image directe des formes pseudodifférentielles.* On définit l'image directe d'une forme pseudodifférentielle pour une fibration vectorielle $\pi : \mathcal{V} \to M$. Définissons tout d'abord la notion d'intégrabilité le long des fibres. Localement, au dessus d'un ouvert U de M "assez petit", on a $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^{(k,l)}$. On a alors $\widehat{(\pi^{-1}U)} \simeq \widehat{U} \times \mathbb{R}^{(k+l,k+l)}$. On dit que $\omega \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ est intégrable le long des fibres si $\omega|_U$ ainsi que ses dérivées sont à décroissance rapide le long de $\mathbb{R}^{(k+l,k+l)}$ pour tout ouvert de trivialisation U de M. Dans ce cas, lorsque de plus M et $\mathcal{V}$ sont globalement orientés (alors en particulier les fibres de $\mathcal{V}$ sont globalement orientées), on définit l'image directe $\widehat{\pi}_*\omega$ de $\omega \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}))$ comme l'unique forme pseudodifférentielle sur M telle que pour toute forme pseudodifférentielle α sur M intégrable on ait :

$$\int_M (\widehat{\pi}_*\omega)\alpha = \int_{\mathcal{V}} \omega(\widehat{\pi}^*\alpha).$$

Soit U un ouvert de M. Soit $\alpha \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ et $\beta \in \widehat{\Omega}_M(M)$ intégrables, alors :

$$\widehat{\pi}_*(\alpha\widehat{\pi}^*(\beta)) = (\widehat{\pi}_*\alpha)\beta.$$

En effet si $\gamma \in \widehat{\Omega}_M(M)$ est intégrable, comme $\widehat{\pi}^* : \widehat{\Omega}_M(M) \to \widehat{\Omega}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ est un morphisme de superalgèbres, on a :

$$\int_{\mathcal{V}} \alpha(\widehat{\pi}^*\beta)(\widehat{\pi}^*\gamma) = \int_{\mathcal{V}} \alpha\widehat{\pi}^*(\beta\gamma) = \int_M (\widehat{\pi}_*\alpha)\beta\gamma.$$

L'application $\widehat{\pi}_* : \widehat{\Omega}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}) \to \widehat{\Omega}_M(M)$ est un morphisme de $\widehat{\Omega}_M(\mathcal{V})$-modules de parité égale à $k + l(mod\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En effet l'intégration sur $\mathcal{V}$ est un opérateur de parité $n + k + n + m(mod\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et l'intégration sur M est de parité $n + m(mod\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ d'où le résultat.

On note $d_{\mathcal{V}}$ (resp. d_M) la différentielle extérieure sur $\mathcal{V}$ (resp. M). Soit $\omega \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ intégrable le long des fibres, alors on a la relation suivante où (k, l) est la dimension des fibres de $\mathcal{V}$:

$$d_M\widehat{\pi}_*\omega = (-1)^{k+l}\widehat{\pi}_*(d_{\mathcal{V}}\omega).$$

5. Cohomologie des supervariétés

Avant de poursuivre l'étude de la cohomologie équivariante proprement dite, précisons ce qui se passe en l'absence d'action de groupes.

5.1. Isomorphisme de Poincaré.

THÉORÈME 5.1. *Soit M une supervariété. On note $\widehat{\Omega}(M)$ l'espace des formes pseudodifférentielles sur M et $\widehat{H}(M)$ la cohomologie associée pour la différentielle extérieure. Alors l'injection canonique $M_0 \longrightarrow M$ induit un isomorphisme :*

$$\widehat{H}(M) \simeq \widehat{H}(M_0) = H(M_0).$$

Démonstration: Comme M est une supervariété il existe (cf. [Bat79]) une structure de superfibré vectoriel de base M_0 (non canonique) donnée par $\pi : M \to M_0$. On note $\mathcal{E}$ le champ de vecteurs sur M tel que sur un ouvert de coordonnées W pour les coordonnées $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m)$ adaptées à la structure de superfibré vectoriel ($dim(M) = (n, m)$) on ait :

$$\mathcal{E} = \sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

On note pour $t \neq 0$ ϕ_t le difféomorphisme de M qui consiste à la multiplication par t le long des fibres de $M \mapsto M_0$. C'est-à-dire , sur un ouvert de coordonnées, on a $\psi_t^*(\xi_j) = t\xi_j$, et $\psi_t^*(x_i) = x_i$. On note j l'injection de M_0 dans M. On a pour toute forme pseudodifférentielle ω :

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\phi_t^*(\omega)dt = \omega - \pi^* j^* \omega.$$

D'autre part on a :

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*(\omega) = \mathcal{L}(\mathcal{E})\phi_t^*(\omega),$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \iota(\mathcal{E})d + d\iota(\mathcal{E})$ représente la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs $\mathcal{E}$. Si de plus ω est fermée alors on a (isomorphisme de Poincaré) :

$$\omega - \pi^* j^* \omega = d\Big(\int_0^1 \iota(\mathcal{E})\phi_t^*(\omega)dt\Big).$$

Cela signifie que π^* et ι^* induisent des isomorphismes réciproques entre les espaces de cohomologie de $\widehat{\Omega}(M)$ et $\widehat{\Omega}(M_0)$. $\diamondsuit$

5.2. Cohomologie des formes pseudodifférentielles intégrables. Soit M une supervariété considérée comme un superfibré vectoriel de rang $(0, m)$ sur la variété M_0 (cf. [Bat79]). On note j l'injection canonique de M_0 dans M à l'aide de la section nulle et π la projection de M sur M_0 donnée par la structure de superfibré vectoriel. On note $\widehat{\Omega}_{\int}(M)$ l'espace des formes pseudodifférentielles intégrables sur M et $\widehat{H}_{\int}(M)$ la cohomologie associée pour la différentielle extérieure.

On considère alors $\widehat{M}$ comme un superfibré vectoriel de rang $(0, n+m)$ au dessus de $(\widehat{M})_0$. On note ϕ la projection de $(\widehat{M})_0$ sur M_0. Localement si $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m, dx_1, \ldots, dx_m, d\xi_1, \ldots, dxi_m)$ est un système de coordonnées sur $\widehat{M}$, on impose que tout changement de coordonnées soit linéaire en les ξ_j, et également (ce qui est toujours le cas) en les dx_i et les $d\xi_j$. Le superfibré $\widehat{M}$ au dessus de $(\widehat{M})_0$ est alors somme des fibrés ϕ^*M et $\phi^*(\widehat{M}_0)$. L'algèbre des fonctions sur $\widehat{M}$ (les formes pseudodifférentielles sur M) est donc munie de la bigraduation sur $\mathbb{Z}$ suivante. Soit ϕ une fonction sur $\widehat{M}$ de degré p les long des fibres de π^*M et de degré q le long des fibres de $\pi^*(\widehat{M}_0)$, alors on définit le bidegré de ω par $(-p, q)$. Dans un ouvert de coordonnées U, une forme de bidegré $(-p, q)$ est une fonction de la forme :

$$\omega := \sum_{I,J} \omega_{I,J}(x_1, \ldots, x_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_m) dx^I \xi^J,$$

où la somme est prise sur les m-uplets $I = (a_1, \ldots, a_m)$ de 0 et de 1 tels que $|I| = \sum a_i = p$ et les n-uplets $J = (b_1, \ldots, b_n)$ de 0 et de 1 tels que $|J| = \sum b_j = q$.

La différentielle d sur $\widehat{\Omega}(M)$ est la somme des différentielles d_x telle que dans un ouvert de coordonnées $d_x = \sum\limits_i dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et d_ξ telle que dans un ouvert de coordonnées $d_\xi = \sum\limits_j d\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$. La différentielle d_x envoie une forme de degré $(-p, q)$ sur une forme de degré $(-p, q+1)$ et d_ξ envoie une forme de degré $(-p, q)$ sur une forme de degré $(-p+1, q)$. Soit ω une forme pseudodifférentielle de bidegré $(-p, q)$, on appelle $r := q - p$ le degré total de ω. Alors $d\omega$ est une forme pseudodifférentielle de degré total $r + 1$. Comme $d^2 = 0$ les différentielles d_x et d_ξ anticommutent :

$$d_x d_\xi = -d_\xi d_x.$$

Soit $\mathcal{B}$ un produit scalaire sur les fibres de $(\widehat{M})_0 \to M_0$. Soit $\phi_{\mathcal{B}}$ la fonction homogène de degré 2 sur le fibré associée. Plus précisément, en coordonnées, si $(\bar{\pi} f_1, \ldots, \bar{\pi} f_m)$ est une base de sections de $(\widehat{M})_0 \to M_0$ et $(d\xi_1, \ldots, d\xi_m)$ sa base duale, on pose

$$\phi_{\mathcal{B}} := \sum_{i,j} \mathcal{B}(\bar{\pi} f_i, \bar{\pi} f_j) d\xi_j d\xi_i.$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction réelle de la variable réelle à support compact telle que $\psi(0) = 1$. On pose :

$$\theta_0 := \psi(\phi_{\mathcal{B}}).$$

C'est une fonction sur $(\widehat{M})_0$. Soit U un ouvert de trivialisation de M. On a $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^{(0,m)}$. On note $(f_1, \ldots, f_m)$ la base canonique de $\Pi\mathbb{R}^{(0,m)}$ et $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^{(0,m)}$. On pose $a_{i,j} := \mathcal{B}(f_i, f_j)$ $(a_{i,j} \in$

$\mathcal{C}^\infty(U)$) Alors on a sur $(\widehat{U})_0$:

$$\theta_0 = \psi(\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j} d\xi_i d\xi_j) \in \mathcal{C}^\infty((\widehat{U})_0).$$

On l'étend à l'aide de la projection de $\widehat{M}$ sur $(\widehat{M})_0$ en une fonction sur $\widehat{M}$. Le fait que $\mathcal{B}$ soit un produit scalaire implique que θ_0 est une fonction à support compact en les $d\xi_j$, c'est-à-dire le long des fibres de $\widehat{M} \to M$.

Comme $j^*\theta_0 = 0$, on a $j^*(d_x\theta_0) = 0$ et (comme $d_x\theta_0$ est de bidegré $(0,1)$) $d_\xi d_x \theta_0 = 0$. Il existe une forme θ_1' de bidegré $(-1,1)$ telle que :

$$d_\xi \theta_1' = -d_x\theta_0.$$

Soit ψ_1 une fonction réelle à support compact et constante égale à 1 sur le support de ψ. On pose alors $\theta_1 := \psi_1(\phi_{\mathcal{B}})\theta_1'$. La forme θ_1 est à support compact le long des fibres de $\widehat{M} \to M$ et égale à θ_1' sur le support de θ_0. On a donc encore :

$$d_\xi\theta_1 = -d_x\theta_0.$$

On a de plus $d_\xi d_x \theta_1 = -d_x d_\xi \theta_1 = d_x(d_x\theta_0) = 0$. On construit ainsi par récurrence pour $1 \leq k \leq m$ des formes θ_k de bidegré $(-k,k)$ à support compact le long des fibres de $\widehat{M} \to M$, telles que pour tout k :

$$d_\xi\theta_k = -d_x\theta_{k-1}.$$

Elles vérifient de plus $d_\xi d_x \theta_k = 0$ La forme $d_x\theta_m$ est donc d_ξ-fermée, or elle est de degré minimal, elle est donc nulle. On pose :

$$\theta := \sum_{k=0}^m \theta_k.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} d\theta &= \sum_{k=0}^m (d_\xi\theta_k + d_x\theta_k) \\ &= -\sum_{k=0}^{m-1} d_x\theta_k + \sum_{k=0}^m d_x\theta_k \\ &= d_x\theta_m \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus θ est une forme à support compact le long des fibres de $\widehat{M} \to M$, telle que $j^*\theta \equiv 1_{M_0}$. On a donc obtenu :

Proposition 5.1. *Soit M une supervariété. Il existe $\theta \in \widehat{\Omega}_\int(M)$ fermée, paire telle que $j^*(\theta) = 1$.*

La forme θ va jouer dans cette situation un rôle analogue à celui de la forme de Thom.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 5.2. *Les applications suivantes induisent des isomorphismes réciproques entre la cohomologie de $\widehat{\Omega}_{\int}(M)$ et celle de $\widehat{\Omega}_{\int}(M_0) = \Omega_{\int}(M_0)$ (ce dernier espace est l'espace des formes différentielles à support compact sur la variété M_0).*

$$\begin{aligned} j^* : \widehat{\Omega}_{\int}(M) &\longrightarrow \widehat{\Omega}_{\int}(M_0) \\ \omega &\longmapsto j^*\omega. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m : \widehat{\Omega}_{\int}(M_0) &\longrightarrow \widehat{\Omega}_{\int}(M) \\ \omega &\longmapsto \theta(\pi^*\omega). \end{aligned}$$

Démonstration: On considère le fibré $M \oplus M = M \times_{M_0} M$ de base M_0. Soit σ l'automorphisme de $M \oplus M$ tel que si $\mathcal{A}$ est une superalgèbre proche et $(v, w) \in (M \oplus M)_{\mathcal{A}}$ alors $\sigma(v, w) = (w, -v)$, et pour $t \in \mathbb{R}$, σ_t l'automorphisme tel que :

$$\sigma_t(v, w) = (\cos(t)v + \sin(t)w, \cos(t)w - \sin(t)v).$$

Alors $\sigma_0 = Id$ et $\sigma_{\frac{\pi}{2}} = \sigma$. On note maintenant $\mathcal{E}$ le champ de vecteurs $\mathcal{E} := \frac{d}{dt}\sigma_t$ sur $M \oplus M$. La dérivée de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ laisse stable le sous-espace $\widehat{\Omega}_{\int}(M \oplus M)$ de $\widehat{\Omega}(M \oplus M)$. On pose pour $\omega \in \widehat{\Omega}_{\int}(M \oplus M)$:

$$H(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma_t^* \iota(\mathcal{E})\omega) dt.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma^*\omega - \omega &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dt}\sigma_t^*(\omega)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L}(\mathcal{E})(s_t^*\omega)dt \\ &= (dH + Hd)\omega. \end{aligned}$$

On en déduit que si ω est fermée la classe de ω dans $\widehat{H}_{\int}(M \oplus M)$ est égale à celle de $\sigma^*\omega$. On note p_1 la projection de $M \oplus M$ sur M assimilé au premier facteur et p_2 la projection sur le second facteur. Soient α et β deux formes pseudodifférentielles homogènes fermées sur M. On note $\overline{\beta}$ la forme $\tau^*\beta$ où τ est le morphisme de M dans M qui envoie $v \in M_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}$ étant une superalgèbre proche) sur $-v$. Alors d'après ce qui précède la classe de $(p_1^*\alpha)(p_2^*\beta)$ est égale à celle de $\sigma^*\Big((p_1^*\alpha)(p_2^*\beta)\Big) = (-1)^{|\beta|}(p_2^*\alpha)(p_1^*\overline{\beta})$. on note j_2 l'injection de M dans $M \oplus M$ par la section nulle relativement à la structure de fibré donnée par p_2 (c'est-à-dire en identifiant M au second facteur). On a :

$$j_2^*\Big((p_1^*\alpha)(p_2^*\beta)\Big) = (p^*j^*\alpha)\beta,$$

et

$$j_2^*\Big((p_2^*\alpha)(p_1^*\beta)\Big) = \alpha(p^*j^*\overline{\beta}) = \alpha(p^*j^*\beta).$$

Si α est une forme pseudodifférentielle fermée sur M, comme $p^*j^*\theta = 1$ et $|\theta| = 0$, la classe de α dans $\widehat{H}_{\int}(M)$ est égale à celle de $(\pi^*j^*\alpha)\theta$. D'où l'isomorphisme annoncé. $\diamondsuit$

Exemple: Considérons le cas où $dim(M) = (0,1)$. On note $\xi \in M^*$ un élément générateur de $\mathcal{O}(M) = \bigwedge M^*$. Soit $\omega \in \widehat{\Omega}(M)$ (resp. $\widehat{\Omega}_{\int}(M)$). On a :

$$\omega = \omega_0(d\xi) + \omega_1(d\xi)\xi,$$

où ω_0 et ω_1 sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (resp. à décroissance rapide) en $d\xi$. Alors

$$d\omega = \omega_1(d\xi)d\xi.$$

On a alors $d\omega = 0$ si et seulement si $\omega_1 = 0$ et une forme pseudodifférentielle fermée (resp. intégrable) est simplement une fonction ω_0 (resp. à décroissance rapide) en $d\xi$. De plus une telle fonction est exacte si et seulement si $\omega_0(0) = 0$. Un générateur de $\widehat{H}(M) \simeq \mathbb{R}$ est alors donné par exemple par la classe de $\omega \equiv 1$ et un générateur de $\widehat{H}_{\int}(M) \simeq \mathbb{R}$ est donné par exemple par la classe de $\exp(-(d\xi)^2)$.

On va montrer maintenant, en détaillant un argument donné dans [Vor91, VZ88], que si M est négativement orientée (c'est-à-dire $(TM)_1|_{M_0} \to M_0$ orienté), alors la forme $(2\pi)^{-m}\pi_*\theta$ est un représentant de la classe d'Euler du fibré vectoriel (ordinaire) $(TM)_1|_{M_0}$ au dessus de M_0. Mais pour cela nous avons besoin de la notion de transformée de Fourier et de ses propriétés.

Soit $\mathcal{V}$ un superespace vectoriel négativement orienté de dimension (n,m). On définit sur $\mathcal{V}$ la transformée de Fourier de la façon suivante. Soit $(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$ une base de $\mathcal{V}^*$, et $(y_1,\dots,y_n,\eta_1,\dots,\eta_m)$ sa base duale. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$ intégrable. On appelle transformée de Fourier de f la fonction $\mathcal{F}(f)$ sur $\mathcal{V}^*$ définie par :

$$\mathcal{F}(f) := \int_{\mathcal{V}} f \exp(-i\sum_k y_k x_k - i\sum_l \xi_l\eta_l)D(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m),$$

où $D(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$ est une forme volume de type $(1,0)$ sur $\mathcal{V}$.

On a comme dans la situation classique les relations suivantes :

$$\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_k} f) = -iy_k \mathcal{F}(f),$$
$$\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial \xi_l} f) = -i\eta_l \mathcal{F}(f),$$
$$\mathcal{F}(x_k f) = i\frac{\partial}{\partial y_k} \mathcal{F}(f),$$
$$\mathcal{F}(\xi_l f) = i\frac{\partial}{\partial \eta_l} \mathcal{F}(f).$$

On remarque que si f est homogène de degré l en les ξ_j alors $\mathcal{F}(f)$ est homogène de degré $m-l$ en les η_j. En particulier, on a, si j est l'injection de $\{0\}$ dans $\mathcal{V}$ –resp. $\mathcal{V}^*$– (j^* est donc l'évaluation en 0), comme dans la situation classique (formule d'inversion de Fourier) :

$$\int_{\mathcal{V}} fD(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) = j^* \mathcal{F}(f),$$

et

$$j^* f = (2\pi)^{-n}(-i)^m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \int_{\mathcal{V}^*} \mathcal{F}(f) D(y_1, \ldots, y_n, \eta_1, \ldots, \eta_m).$$

Considérons maintenant le superespace vectoriel $\widehat{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \oplus \Pi\mathcal{V}$ que l'on suppose négativement orienté (c'est-à-dire $\mathcal{V}$ globalement orienté). L'algèbre des fonctions sur $\widehat{\mathcal{V}}$ est l'algèbre des formes pseudodifférentielles sur $\mathcal{V}$. On note $d_{\mathcal{V}}$ la différentielle extérieure sur cette algèbre. On pose $N := \Pi\mathcal{V}^*$, alors $\widehat{N}$ est canoniquement isomorphe à $(\widehat{\mathcal{V}})^*$. On note d_N la différentielle extérieure sur $\widehat{\Omega}(N)$. Soit $\omega \in \widehat{\mathcal{V}}$, alors $\mathcal{F}(\omega) \in \widehat{\Omega}(N)$. De plus les relations précédentes montrent que l'on a :

$$\mathcal{F}(d_{\mathcal{V}}\omega) = d_N \mathcal{F}(\omega),$$

et si $j_{\mathcal{V}}$ est l'injection de $\{0\}$ dans $\mathcal{V}$ (resp. j_N l'injection de $\{0\}$ dans N) :

$$\int_N \mathcal{F}(\omega) = (2i\pi)^{n+m}(-1)^{\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}} j_{\mathcal{V}}^* \omega,$$
$$j_N^* \mathcal{F}(\omega) = \int_{\mathcal{V}} \omega.$$

De plus, si $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ est un système de coordonnées globalement orienté sur $\mathcal{V}$, la forme volume

$$D(x_1, \ldots, x_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_m, \xi_1, \ldots, \xi_m, dx_1, \ldots, dx_n)$$

de type $(1,0)$ sur $\widehat{\mathcal{V}}$ est indépendante du système de coordonnées choisi. On en déduit que la définition de la transformée de Fourier d'une forme pseudodifférentielle sur $\mathcal{V}$ est indépendante su système de coordonnées choisi sur $\mathcal{V}$. Tout ce qui précède (sur la transformée de Fourier des formes pseudodifférentielles) reste donc valable si $\mathcal{V}$ est un superfibré vectoriel de base M. Dans ce cas $j_{\mathcal{V}}$ (resp. j_N) est l'injection de M dans $\mathcal{V}$ (resp. N) via la section nulle et l'intégration sur $\mathcal{V}$ (resp N) est l'intégration le long des fibres, c'est-à-dire l'application $(\pi_{\mathcal{V}})_*$ (resp. $(\pi_N)_*$) où $\pi_{\mathcal{V}}$ (resp. $\pi_{\mathcal{V}}$) est la projection de $\mathcal{V}$ (resp. N) sur M.

On a donc obtenu la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2. *Soit M une supervariété et $\mathcal{V}$ un superfibré vectoriel globalement orienté de base M. Alors la transformée de Fourier :*

$$\Big(\widehat{\Omega}_{\int}(\mathcal{V}), d_{\mathcal{V}}\Big) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Big(\widehat{\Omega}_{\int}(\Pi\mathcal{V}^*), -d_{\Pi\mathcal{V}^*}\Big),$$

réalise un isomorphisme entre ces deux superalgèbres différentielles.

Considérons maintenant une supervariété M négativement orientée et θ la forme pseudodifférentielle définie dans le théorème précédent. Dans cette situation, le fibré ΠM^* est isomorphe au fibré (ordinaire) $(TM)_1$. Alors $\mathcal{F}(\theta)$ est une forme différentielle fermée sur le fibré vectoriel (ordinaire) $\pi_{(TM)_1} : (TM)_1 \simeq \Pi M^* \to M_0$ qui vérifie de plus :

$$(\pi_{(TM)_1})_*\theta = (2i\pi)^m(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} 1_{M_0},$$

(1_{M_0} étant la fonction constante égale à 1 sur M_0). La forme pseudodifférentielle $(2i\pi)^{-m}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\mathcal{F}(\theta)$ est donc une forme de Thom sur $(TM)_1$. Ainsi, la forme $(2i\pi)^{-m}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} j^*_{(TM)_1}\mathcal{F}(\theta) = (2i\pi)^{-m}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}(\pi_{(TM)_1})_*\theta$ est un représentant de la classe d'Euler de $(TM)_1$. On a donc, puisque $\mathcal{E}_{(TM)_1}$ est nulle si m est impair, la proposition suivante :

PROPOSITION 5.3. *Soient M et θ comme précédemment avec M négativement orienté (c'est-à-dire $(TM)_1|_{M_0} \to M_0$ orienté). Alors, la forme pseudodifférentielle $(2\pi)^{-m}\pi_*\theta$ est un représentant de la classe d'Euler du fibré vectoriel (ordinaire) $(TM)_1$ au dessus de M_0.*

On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.1. *Soit M une supervariété de dimension (n, m) totalement orientée et $\alpha \in \widehat{\Omega}_{\int}(M)$ une forme pseudodifférentielle intégrable fermée sur M. On note j l'injection canonique de M_0 dans Met $\mathcal{E}_{(TM)_1}$ la classe d'Euler du fibré vectoriel orienté $(TM)_1|_{M_0} \to M_0$. On a alors :*

$$\int_M \alpha = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}(2i\pi)^m \int_{M_0} (j^*\alpha)\mathcal{E}_{(TM)_1}.$$

Démonstration: L'intégrale de α ne dépend que de sa classe de cohomologie dans $\widehat{H}_{\int}(M)$. Or, la classe de α dans $\widehat{H}_{\int}(M)$ est égale à celle de $\pi^*(j^*\alpha)\theta$. Le résultat s'ensuit alors immédiatement grâce à la proposition précédente. ♢

Remarque: On en déduit en particulier que si $m > n$ alors pour toute forme intégrable fermée, $\int_M \alpha = 0$. En effet $\mathcal{E}_{(TM)_1} = 0$ dans ce cas.

Soit M une supervariété négativement orientée. Supposons maintenant qu'il existe pour le superfibré $\pi : M \to M_0$ une forme de Thom, c'est-à-dire une forme pseudo-différentielle θ' fermée intégrable dans les fibres telle que $\pi_*\theta' = 1_M$. Dans ce cas, comme la classe de θ' est égale à celle de $\Big(\pi^*(j^*\theta')\Big)\theta$, on doit avoir :

$$1_{M_0} = \pi_*(\theta') \equiv (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}(2i\pi)^m(-1)^{m|\theta'|}j^*(\theta')\pi_*(\theta) = (-1)^{m|\theta'|}j^*(\theta')\mathcal{E}_{(TM)_1}.$$

Autrement dit $(-1)^{m|\theta'|}j^*(\theta')$ doit être un inverse de la classe d'Euler de $(TM)_1$. Or un tel inverse n'existe pas si $m > 0$. Il n'existe donc pas de forme de Thom pour $M \to M_0$. Nous verrons, par contre, dans la partie **III** que dans la situation équivariante on peut , sous certaines conditions, construire une telle forme.

PARTIE II

Superalgèbres de Clifford

1. Définitions

Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre supercommutative. Soit V un $\mathcal{A}$-module muni d'une forme bilinéaire Q superantisymétrique à valeurs dans $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de $T(V)$ (l'algèbre tensorielle munie de sa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation naturelle) engendré par les éléments de la forme :

$$v \otimes w - (-1)^{|v||w|} w \otimes v + 2Q(v, w),$$

pour v et w homogènes. On pose alors :

$$\mathcal{C}(V, Q) = T(V)/\mathcal{I}.$$

On appelle $\mathcal{C}(V, Q)$ l'algèbre de Clifford de (V, Q). On la notera (sauf s'il y a risque de confusion) $\mathcal{C}(V)$.

On appelle module de Clifford, un $\mathcal{C}(V)$-module. Un exemple naturel de module de Clifford est $S(V)$ avec l'action suivante. On note pour $v \in V$, $\epsilon(v)$ la multiplication à gauche par v dans $S(V)$ et $\iota(v)$ la contraction telle que pour tout $w \in V$ $\iota(v)w = Q(v, w)$ et prolongée en une dérivation de $S(V)$. On pose, pour tout $\alpha \in S(V)$ et tout $v \in V$:

$$c(v)\alpha := \epsilon(v)\alpha - \iota(v)\alpha.$$

Il suffit, pour assurer que l'on a bien une action de Clifford, de remarquer que :

$$\epsilon(v)\iota(w) - (-1)^{|v||w|}\iota(w)\epsilon(v) = Q(v, w).$$

Définition 1.1. *On appelle application symbole, l'application :*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{C}(V) &\longrightarrow S(V) \\ a &\longmapsto \sigma(a) = c(a).1 \end{aligned}$$

On note $(e_1, \dots e_n, f_1, \dots , f_m)$une base homogène de V, et $c_i,\ d_i$ les éléments de $C(V)$ correspondant aux e_i et aux f_j respectivement. On pose $\mathcal{C}^i(V) = \sigma^{-1}(S^i(V))$, et $\mathcal{C}_i(V) = \oplus_{k=1}^{i} \mathcal{C}^k(V)$.

Proposition 1.1. *L'application symbole a pour inverse :*

$$\begin{array}{rcl} \sigma^{-1} : S(V) & \longrightarrow & \mathcal{C}(V) \\ e_{i_1} \dots e_{i_k} f_{j_1} \dots f_{j_l} & \longmapsto & \sigma^{-1}(e_{i_1} \dots e_{i_k} f_{j_1} \dots f_{j_l}) = \\ & & \frac{1}{k!}\Big(\sum\limits_{\alpha \in \mathcal{S}_k} c_{i_{\alpha(1)}} \dots c_{i_{\alpha(k)}}\Big) + \frac{1}{l!}\Big(\sum\limits_{\alpha \in \mathcal{S}_l} (-1)^{|\alpha|} d_{j_{\alpha(1)}} \dots d_{j_{\alpha(l)}}\Big). \end{array}$$

où $\mathcal{S}_k$ est le groupe des permutations à k éléments et où $|\alpha| \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ désigne la parité de la permutation $\alpha \in \mathcal{S}_l$ (c'est-à-dire la parité du nombre de permutations élémentaires nécessaires à son écriture). L'application σ est un isomorphisme de superespace vectoriels et de $OSP(V, Q)$-modules.

Démonstration: cf. [BGV92] ♢

On a de plus pour $v \in V$ et $a \in C(V)$ la relation suivante :

$$\sigma([v, a]) = -2\iota(v)\sigma(a).$$

On note encore ι l'application de V dans les dérivations de $S(V^*)$ telle que pour tout v dans V, $\iota(v)$ est la contraction définie pour tout w dans V^* par $\iota(v)(w) =< v, w >$ et prolongée en une dérivation de $S(V^*)$.

Considérons l'application σ^* égale à σ composée avec le morphisme, noté ψ, contravariant (c'est-à-dire que pour tout a et tout b homogènes, on a $\psi(ab) = (-1)^{|a||b|}\psi(b)\psi(a)$) de $\mathcal{A}$-algèbres de $S(V)$ dans $S(V^*)$ qui envoie le vecteur v sur le covecteur $-Q(v, .)$. Alors on a si $v \in V$ et $a \in C(V)$:

$$\sigma^*([v, a]) = -2\iota(v)\sigma^*(a).$$

L'application σ^* n'est bijective que si Q est non dégénérée (et induit dans ce cas un isomorphisme entre $S(V)$ et $S(V^*)$).

Dans le cas où Q est non dégénérée, on a la proposition suivante :

Proposition 1.2. *L'espace $C^2(V) = \sigma^{-1}\Big(S^2(V)\Big)$ est une sous superalgèbre de Lie de $C(V)$ muni du crochet de supercommutation dans $C(V)$. Cette superalgèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{osp}(V, Q)$. L'isomorphisme est donné par l'application*

$$\tau^{-1} : C^2(V) \longrightarrow \mathfrak{osp}(V, Q),$$

qui fait agir $a \in C^2(V)$ sur $V \simeq C^1(V)$ par l'action adjointe dans $C(V)$:

$$\tau^{-1}(a).v = [a, v].$$

Démonstration: Il est bien clair que $\tau^{-1}(a)$ préserve bien $C^1(V)$. On a donc un morphisme de $C^2(V)$ dans $\mathfrak{gl}(V)$. De plus on a :

$$Q\Big(\tau^{-1}(a).v,w\Big)+(-1)^{|a||v|}Q\Big(v,\tau^{-1}(a).w\Big) \\ = -\frac{1}{2}[[a,v],w]-(-1)^{|a||v|}\frac{1}{2}[v,[a,w]].$$

Comme $[[v,w],a]=0$, super-Jacobi montre que cela est nul. Finalement on a un morphisme de $C^2(V)$ dans $\mathfrak{osp}(V,Q)$. Comme de plus, si Q est non-dégénérée, τ^{-1} est injective et les deux espaces ont même dimension, c'est bien une application bijective. ♢

On peut expliciter cet isomorphisme. On choisit une base homogène $(e_1,\dots,e_n, f_1,\dots,f_m)$ $(|e_i|=0,|f_j|=1)$ de V. On note $(e_1^*,\dots,e_n^*,f_1^*,\dots,f_m^*)$ la base duale de $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_m)$ dans V^*. Soit A un élément de $\mathfrak{osp}(V,Q)$. On a alors :

$$\begin{aligned} 2\sigma^*\circ\tau(A) = & \sum_{1\le i<j\le n} Q(Ae_i,e_j)e_i^*e_j^* + \frac{1}{2}\sum_{1\le j\le n} Q(Ae_j,e_j)e_j^{*2} \\ & + \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} Q(Ae_i,f_j)e_i^*f_j^* \\ & + \sum_{1\le i<j\le m} Q(Af_i,f_j)f_i^*f_j^* \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{P}$ une superalgèbre proche et $A\in\mathfrak{osp}(V,Q)_{\mathcal{P}}$. Le polynôme $2\sigma^*\circ\tau(A)$ sur $V_{\mathcal{P}}$ est homogène de degré 2 et pour tout v dans $V_{\mathcal{P}}$ on a

$$2\sigma^*\circ\tau(A)(v) = \frac{1}{2}Q(Av,v).$$

2. Représentations irréductibles des algèbres de Clifford "Classiques"

On s'intéresse maintenant à une algèbre de Clifford au sens classique : on considère $\mathcal{C}(V,\mathcal{B})$ où $V=V_1$ est un superespace vectoriel de dimension $(0,m)$ et $\mathcal{B}$ un produit scalaire sur l'espace vectoriel V_1. Dans la suite pour simplifier les écritures on pose $\mathcal{C}:=\mathcal{C}(V,\mathcal{B})$.

Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre supercommutative. On peut définir l'application exponentielle de $\mathcal{C}(V,\mathcal{B})_{\mathcal{A}}$ dans elle-même. On veut alors comparer $\sigma(\exp_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(a))$ et $\exp_{S(V)_{\mathcal{A}}}(\sigma(a))$. On le fait tout d'abord pour $a\in(\mathbb{R}\oplus V)_{\mathcal{A}}=\Big((\mathbb{R}\oplus V)\otimes\mathcal{A}\Big)_0=\mathcal{A}_0\oplus V\otimes\mathcal{A}_1$.

Proposition 2.1. *Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre supercommutative. Soit $a \in (\mathbb{R} \oplus V)_{\mathcal{A}}$. Alors on a :*

$$\sigma(\exp_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(a)) = \exp_{S(V)_{\mathcal{A}}}(\sigma(a)).$$

Démonstration: Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormale de V. Alors on a :

$$a = z + \sum_{i=1}^{m} e_i \theta_i,$$

avec $z \in \mathcal{A}_0$ et $\theta_i \in \mathcal{A}_1$, et pour tout i et tout j :

$$e_i \theta_i \theta_j e_j \theta_j = e_j \theta_j e_i \theta_i.$$

On en déduit aussitôt,

$$\begin{aligned} \exp_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(a) &= e^z \prod_{i=1}^{m} e^{e_i \theta_i} \\ &= e^z \prod_{i=1}^{m} (1 + e_i \theta_i), \end{aligned}$$

car $\theta_i^2 = 0$. Or comme $(e_1, \dots, e_m)$ est orthonormée, on a $\sigma(e_i e_j) = \sigma(e_i)\sigma(e_j)$ pour $i \neq j$. Donc on a :

$$\sigma(\exp_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(a)) = e^z \prod_{i=1}^{m} (1 + \sigma(e_i)\theta_i).$$

D'autre part on a aussi :

$$\begin{aligned} \exp_{S(V)_{\mathcal{A}}}(\sigma(a)) &= e^z \prod_{i=1}^{m} e^{\sigma(e_i)\theta_i} \\ &= e^z \prod_{i=1}^{m} (1 + \sigma(e_i)\theta_i). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Remarque: ceci est encore vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.1. *On a comme fonction sur $\mathbb{R} \oplus V$ (c'est-à-dire comme élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \otimes \bigwedge V_1^* \otimes \bigwedge V_1$) :*

$$\sigma \circ \exp_{\mathcal{C}} = \exp_{S(V)} \circ \sigma.$$

Démonstration: Si on note x l'application identique de $\mathcal{C}$, x est un élément de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}(\mathcal{C})} = (\mathcal{C} \otimes \mathcal{O}(\mathcal{C}))_0$ et $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ est une superalgèbre supercommutative. De plus on a $\exp_{\mathcal{C}} = \exp_{\mathcal{C}_{\mathcal{O}(\mathcal{C})}}(x)$, et $\exp_{S(V)} \circ \sigma = \exp_{S(V)_{\mathcal{O}(\mathcal{C})}}(\sigma(x))$, d'où le résultat. $\diamondsuit$

Il existe (cf. [BGV92] **Proposition 3.13** p.108) une formule analogue pour $a \in C_2(V)$. Pour cela nous introduisons les notions suivantes :

Définition 2.1. *Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre supercommutative. Soit $X \in \mathfrak{so}(V)_{\mathcal{A}}$, alors on pose :*

$$J_V(X) = \frac{\sinh(X/2)}{X/2}.$$

Cela définit une fonction sur $\mathfrak{so}(V)$ à valeurs dans elle-même. On pose de plus si X assez proche de 0 :

$$j^{\frac{1}{2}} = \sqrt{Det \circ J_V}.$$

On pose enfin :

$$H_V(X) = \frac{X/2}{\tanh(X/2).}$$

Lemme 2.1. *Il existe au voisinage de 0 dans $\mathfrak{so}(V)$ une racine carrée de H_V bien définie.*

Démonstration: Cf. [BGV92]. $\diamondsuit$

On a alors :

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre supercommutative. Soit $a \in \mathcal{C}^2(V)_{\mathcal{A}}$ proche de 0. Alors on a :*

$$\sigma(\exp_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(a)) = j^{\frac{1}{2}}(a) Det(H_V^{\frac{1}{2}}(a))\Big(H_V^{\frac{-1}{2}}(a)\ .\exp_{S(V)_{\mathcal{A}}}(\sigma(a))\Big).$$

Comme précédemment on peut aussi écrire cette égalité comme une égalité de fonctions sur $C_2(V)$ à valeurs dans $S(V) = \bigwedge V_1$

$$\sigma \circ \exp_C = j^{\frac{1}{2}}\ Det \circ H_V^{\frac{1}{2}}\Big(H_V^{\frac{-1}{2}}\ .\exp_{S(V)} \circ \sigma\Big).$$

Démonstration: Cf [BGV92] **Proposition 3.13** p.108. $\diamondsuit$

On s'intéresse maintenant aux représentations irréductibles complexes de $\mathcal{C}(V)$, c'est-à-dire aux représentations irréductibles de $\mathcal{C}(V) \otimes \mathbb{C} = \mathcal{C}(V \otimes \mathbb{C})$. On sait qu'une telle représentation est unique, au changement de parité Π près. Plus précisément, lorsque $m = 2d$ est pair $\mathcal{C}(V \otimes \mathbb{C}) \simeq End(S)$ où S est l'espace des spineurs (non gradué). Si de plus V est orienté (ce que l'on suppose à présent) on pose, si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base orthonormée orientée de V,

$$\Gamma := i^d e_1 \ldots e_m.$$

On a $\Gamma^2 = 1$. On fixe alors une graduation $S = S_0 \oplus S_1$ en posant :

$$\begin{aligned} S_0 =& \{s \in S, \Gamma s = s\}, \\ S_1 =& \{s \in S, \Gamma s = -s\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas les deux $\mathcal{C}(V)$-supermodules S et ΠS sont isomorphes via un isomorphisme impair.

Lorsque m est impair, on pose $V' = V \oplus \mathbb{R}e$. On étend $\mathcal{B}$ à V' en posant $\mathcal{B}(V, e) = 0$ et $\mathcal{B}(e, e) = 1$. On note S l'espace des spineurs de $\mathcal{C}(V', \mathcal{B})$. On lui donne une structure de supermodule comme précédemment. Comme $\mathcal{C}(V, \mathcal{B}) \subset \mathcal{C}(V', \mathcal{B})$, on a une représentation de $\mathcal{C}(V, \mathcal{B})$ sur S. Cette dernière représentation est isomorphe à la représentation ΠS.

La donnée de Γ (avec la même formule que si m est pair mais où l'on a remplacé d par $\frac{m+1}{2}$) est équivalente à la donnée d'une orientation de V et Γ induit un isomorphisme de S_0 sur S_1 vérifiant $\Gamma^2 = Id$. On pose :

$$Q(S) = \{X \in End(S) / \Gamma X = X\Gamma\}.$$

On a alors $\mathcal{C}(V, \mathcal{B}) \simeq Q(S)$.

On a dans tous les cas (m pair et m impair) $dim(S) = (2^{[\frac{m+1}{2}]}, 2^{[\frac{m+1}{2}]})$ où $[.]$ désigne la partie entière.

On suppose que m est pair. Si $\mathcal{A}$ est une superalgèbre supercommutative, l'exponentielle dans $\mathcal{C}(V \otimes \mathbb{C})_{\mathcal{A}}$ est égale à celle dans $End(S)_{\mathcal{A}}$ puisque l'isomorphisme entre $End(S)$ et $\mathcal{C}(V \otimes \mathbb{C})$ est un isomorphisme d'algèbres. La supertrace sur $End(S)$ se transpose naturellement à $\mathcal{C}(V \otimes \mathbb{C})$. Une fois la graduation $S = S_0 \oplus S_1$ déterminée par l'orientation de V, la supertrace ainsi définie sur $\mathcal{C}(V \otimes \mathbb{C})$ ne dépend pas de l'isomorphisme pair avec $End(S)$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Si m est pair ($m = 2d$), alors la supertrace est, à un coefficient multiplicateur près, l'unique forme linéaire sur $\mathcal{C}(V)$ nulle sur les commutateurs. On a de plus pour tout a dans $\mathcal{C}(V)$ l'égalité :*

$$Str(a) = (-2i)^d \int_{V^*} \sigma(a) D(e_1, \ldots, e_m),$$

où $D(e_1, \ldots, e_m)$ est la forme volume sur V^* déterminée par la base orthonormée orientée $(e_1, \ldots, e_m)$ de V.

Démonstration: Cf [BGV92] **Proposition. 3.21** p. 111. ♢

Remarques: Cette égalité reste vraie pour $a \in \mathcal{C}(V)_A$.

Le choix d'une autre base orthonormée orientée ne modifie pas la forme volume et donc l'intégrale ne dépend pas d'un tel choix.

Dans le cas où $m = 2d - 1$ est impair on pose pour toute superalgèbre proche $\mathcal{P}$ et pour tout $X \in Q(S)_{\mathcal{P}}$:

$$Qtr(X) = Str(\Gamma X).$$

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. *Si $m = 2d-1$, Il n'y a, à un coefficient multiplicateur près, qu'une seule forme linéaire sur $\mathcal{C}(V)$ nulle sur les commutateurs. On a de plus pour tout a de $\mathcal{C}(V)$:*

$$Qtr(a) = (-2i)^d \int_{V^*} \sigma(a) D(e_1, \dots, e_m),$$

l'intégrale étant prise par rapport à une base orthonormée de V.

Démonstration: La proportionnalité entre une forme linéaire s'annulant sur les commutateurs et $\int_{V^*} \sigma D(e_1, \dots, e_n)$, se démontre comme dans la proposition précédente. Pour calculer le coefficient de proportionnalité, remarque que pour toute superalgèbre proche $\mathcal{P}$ et tout $a \in \mathcal{P}$, $Qtr(\Gamma) = 2^d a$ et $\int_{V^*} \sigma(a\Gamma) = i^d a$. ♢

On en déduit alors le corollaire suivant qui nous sera utile par la suite :

COROLLAIRE 2.2. *Soit $a \in (\mathbb{R} \oplus V)_A$, alors si $m = 2d$:*

$$Str(\exp_{\mathcal{C}_A}(a)) = (-2i)^d \int_{V^*} \exp_{S(V)_A}(\sigma(a)) D(e_1, \dots, e_m),$$

et si $m = 2d - 1$:

$$Qtr(\exp_{\mathcal{C}_A}(a)) = (-2i)^d \int_{V^*} \exp_{S(V)_A}(\sigma(a)) D(e_1, \dots, e_m).$$

De même si $a \in C_2(V)_A$, on a si $m = 2d$:

$$Str(\exp_{\mathcal{C}_A}(a)) = (-2i)^d j^{\frac{1}{2}}(a) \int_{V^*} \exp_{S(V)_A}(\sigma(a)) D(e_1, \dots, e_m),$$

et si $m = 2d - 1$:

$$Qtr(\exp_{\mathcal{C}_A}(a)) = (-2i)^d j^{\frac{1}{2}}(a) \int_{V^*} \exp_{S(V)_A}(\sigma(a)) D(e_1, \dots, e_m).$$

Démonstration: C'est une application immédiate de ce qui précède et des propositions **II.3.4** et **II.3.5**. ♢

Remarque: Les égalités ci-dessus auraient également pu s'exprimer en termes de fonctions sur $\mathcal{C}(V)$.

PARTIE III

Superpfaffien

1. Construction du superpfaffien

Soit V un superespace vectoriel réel globalement orienté de dimension (n,m) muni d'une forme bilinéaire superantisymétrique $\mathcal{B}$ non dégénérée. On veut construire sur $\mathfrak{osp}(V)$ un équivalent du pfaffien. On choisit une base homogène $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m)$ de V. On suppose que :

- $|e_i| = 0$, $|f_j| = 1$,
- $(e_1, \dots, e_n)$ est un base symplectique de V_0,

c'est-à-dire $\mathcal{B}(e_{2i-1}, e_j) = \delta_{2i,j}$ et $\mathcal{B}(e_j, e_{2i}) = \delta_{2i-1,j}$. En particulier, la forme symplectique induite par $\mathcal{B}$ sur V_0 induit une orientation de V_0 et donc une orientation de V_1 et une orientation totale de V. On suppose de plus que :

- $(f_1, \dots, f_m)$ est une base orthonormée orientée de V_1.

On appelle une telle base une base orthosymplectique orientée. On note $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m)$ la base duale de V^*. Soit ϵ l'élément suivant de $V \otimes S(V^*)$:

$$\epsilon = \sum_i e_i x_i + \sum_j f_j \xi_j.$$

On pose pour tout X dans $\mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})$:

$$\mu(X) = \frac{1}{2}\mathcal{B}(X\epsilon, \epsilon).$$

Pour tout X, $\mu(X) \in S^2(V^*)$. On appelle (comme dans la situation symplectique classique) $\mu \in S^2(V^* \otimes \mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})^*)_0 \subset \mathcal{O}(\mathfrak{osp}(V, \mathcal{B}) \times V)_0$ l'application moment de l'action de $OSP(V,\mathcal{B})$ dans V. On a en coordonnées :

$$\mu(X) = \sum_{i<j} \mathcal{B}(Xe_i, e_j)x_jx_i + \frac{1}{2}\sum_i \mathcal{B}(Xe_i, e_i){x_i}^2 + \sum_{i,k} \mathcal{B}(Xe_i, f_k)\xi_k x_i + \sum_{k<l} \mathcal{B}(Xf_k, f_l)\xi_l\xi_k.$$

Remarque: On a, avec les notations de la section **II.1** :

$$\mu = 2\sigma^* \circ \tau.$$

Pour tout couple d'entiers (p,q) vérifiant $p+q=n$, on note $U_{p,q}$ l'ouvert de $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$ au dessus de l'ouvert des éléments X de $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$ tels que la restriction de $\mu(X)$ à V_0 soit une forme quadratique de signature (p,q). On pose $U := \underset{p+q=n}{\cup} U_{p,q}$. C'est l'ouvert de $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$ au dessus de l'ouvert des éléments de $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$ dont l'action sur V_0 (via la représentation standard) est inversible. Posons encore une définition.

Définition 1.1. *Soit W un superespace vectoriel et W_0 sa partie paire. On note $\mathcal{C}^{-\infty}(W_0)$ l'espace des fonction généralisées sur W_0. C'est le dual continu des densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur W_0. On appelle fonction généralisée sur W un élément de $\mathcal{C}^{-\infty}(W_0)\otimes \bigwedge W_1^*$.*

On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Soit $\mathcal{D}$ la forme volume $D(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_m)$. L'intégrale sur V de $\exp(\mu)\mathcal{D}$ est une fonction généralisée sur $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$. Plus précisément :*

$$\int_V \exp(i\mu)\mathcal{D} \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{sp}(V_0))\otimes S(\mathfrak{so}(V_1)^*\oplus \mathfrak{osp}(V)_1^*).$$

($\mathfrak{osp}(V)_0 = \mathfrak{sp}(V_0)\times\mathfrak{so}(V_1)$.)

Démonstration: On pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$. On note $a_{k,l}$ (resp. $b_{k,l}$ resp $c_{k,l}$) la fonction sur $\mathfrak{g}$ telle que pour toute superalgèbre proche P et tout A dans $\mathfrak{g}_P$ $a_{k,l}(A) = \mathcal{B}(Ae_k, e_l)$ (resp. $b_{k,l}(A) = \mathcal{B}(Ae_k, f_l)$, resp. $c_{k,l}(A) = \mathcal{B}(Af_k, f_l)$). Le système de fonctions $(a_{k,l})_{k\le l}\cup(b_{k,l})_{(k,l)}\cup(c_{k,l})_{k<l}$ forme un système de coordonnées sur $\mathfrak{g}$. On a :

$$\exp(i\mu) = Q\exp(i\sum_{k<l} a_{k,l}x_kx_l + \frac{i}{2}\sum_k a_{k,k}x_k^2),$$

où Q est un polynôme en les $x_k, \xi_l, b_{k,l}$ et les $c_{k,l}$. Il nous faut étudier la dépendance en les x_i d'intégrales de la forme

$$\int_{\mathfrak{sp}(V_0)} \exp(i\mu)\phi D = \int_{\mathfrak{g}} Q\exp(i\sum_{k<l} a_{k,l}x_kx_l + \frac{i}{2}\sum_k a_{k,k}x_k^2)\ \phi\ \prod_{k,l} da_{k,l},$$

où ϕ est une fonction à support compact sur $\mathfrak{sp}(V_0)$ et $da_{k,l}$ est la mesure de Lebesgue par rapport à la variable $a_{k,l}$. On note $\widehat{\phi}$ la transformée de Fourier de ϕ par rapport aux $a_{k,l}$. On a alors :

$$\int_{\mathfrak{sp}(V_0)} \exp(i\mu)\phi D = Q\ \widehat{\phi}(\frac{x_k x_l}{1+\delta_{k,l}}),$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker. Or $\widehat{\phi}$ est à décroissance rapide et $\sum\limits_{k\leq l} |\frac{x_k x_l}{1+\delta_{k,l}}| \geq \frac{1}{2}\sum\limits_{k} x_k^2$. Cette fonction est donc à décroissance rapide sur V. Ainsi, l'intégrale

$$\int_V \exp(i\mu) D(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$$

définit un élément de $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{sp}(V_0))\otimes S(\mathfrak{so}(V_1)^* \oplus \mathfrak{osp}(V)_1^*)$. C'est en particulier une fonction généralisée sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$. $\diamondsuit$

On pose alors

DÉFINITION 1.2. *On appelle superpfaffien la fonction généralisée sur* $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$ *définie par :*

$$Spf := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_V \exp(i\mu) D(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m).$$

2. Premières propriétés et front d'onde

On s'intéresse maintenant au front d'onde et au calcul du superpfaffien en dehors de ses singularités. Pour ce qui est du front d'onde, on remarque que le problème ne dépend que de V_0 et de $\mathfrak{g}_0^0$ la sous algèbre de Lie (isomorphe à $\mathfrak{sp}(V_0)$) des éléments de $\mathfrak{g}_0$ dont l'action sur V_1 est nulle. En effet, le superpfaffien est polynomial dans la direction de $\mathfrak{g}_0^1 \oplus \mathfrak{g}_1$ ($\mathfrak{g}_0^1$ étant la sous algèbre de Lie des éléments de $\mathfrak{g}_0$ dont l'action sur V_0 est nulle, $\mathfrak{g}_0^1 \simeq \mathfrak{so}(V_1)$). On suppose donc à présent que $V = V_0$ est un espace vectoriel symplectique (on note encore $\mathcal{B}$ la forme symplectique) et que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(V,\mathcal{B})$.

Sur le cône ouvert $U_{n,0}$ la fonction

$$\int_V \exp(-\mu)\mathcal{D}$$

est bien définie et est analytique. Il en découle que $\int_V \exp(i\mu)$ est une fonction analytique sur le cône ouvert $\mathfrak{sp}(V,\mathcal{B}) \times iU_{n,0}$ de $\mathfrak{sp}(V,\mathcal{B})\otimes\mathbb{C}$. De plus, il existe une constante C telle que pour tout $(x,iu) \in \mathfrak{sp}(V,\mathcal{B}) \times iU_{n,0}$ on ait si $\mathcal{D}$ est la mesure de Lebesgue sur V par rapport à un système de coordonnées symplectique :

$$\left|\Big(\int_V \exp(i\mu)\mathcal{D}\Big)(x+iu)\right| \leq C||u||^{\frac{-n}{2}}.$$

(Si $U_{n,0}$ est non vide n est pair et $||.||$ désigne une norme sur $\mathfrak{sp}(V,\mathcal{B})$.)

Alors la limite de $\int_V \exp(i\mu)(.,u)$ lorsque u tend vers 0 dans $U_{n,0}$ existe comme fonction généralisée sur $\mathfrak{sp}(V,\mathcal{B})$ W (cf [Hör83, Theorem 3.1.15]). Notons F_0 la fonction généralisée sur $\mathfrak{sp}(V,\mathcal{B})$ ainsi définie. On a :

LEMME 2.1. *$F_0 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} Spf$.*

Démonstration: Il faut constater que F_0 et Spf appliqués à une même densité $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $\phi\mathcal{D}$ sur $\mathfrak{g}$ donnent la même valeur. On a vu plus haut que $\int_{\mathfrak{g}} \exp(i\mu)\phi\mathcal{D}$ est à décroissance rapide sur V. Ces fonctions sont donc toutes dans $L^1(V)$. Il en est de même pour tout $u \in U_{n,0}$ de la fonction sur V :

$$\int_{\mathfrak{g}} \exp(i\mu)(x+iu)\phi(x)\mathcal{D}(x).$$

où $x \in \mathfrak{g}$ et $\mathcal{D}(x)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ par rapport au système de coordonnées $(a_{i,j})$ défini plus haut.

Comme ϕ est à support compact, $\exp(i\mu)(x+iu)(f)\phi(x)$ converge uniformément vers $\exp(2i\sigma^* \circ \tau)(x)(f)\phi(x)$ pour tout f dans V lorsque u tend vers 0 dans $U_{n,0}$. On a donc pour tout f dans V :

$$\lim_{u\to 0,\ u\in U_{n,0}} \Big(\int_{\mathfrak{g}} \exp(i\mu)(x+iu)\phi(x)\mathcal{D}x\Big)(f) = \Big(\int_{\mathfrak{g}} \exp(i\mu)(x)\phi(x)\mathcal{D}x\Big)(f)$$

De plus, on a pour tout u dans $U_{n,0}$ et tout f dans V :

$$\begin{aligned} \Big|\Big(\int_{\mathfrak{g}} \exp(i\mu)(x+iu)\phi(x)\mathcal{D}x\Big)(f)\Big| &= \Big|\exp(-\mu(u))\Big| \\ &\qquad \Big|\Big(\int_{\mathfrak{g}} \exp(i\mu)(x)\phi(x)\mathcal{D}x\Big)(f)\Big| \\ &\leq \Big|\Big(\int_{\mathfrak{g}} \exp(i\mu)(x)\phi(x)\mathcal{D}x\Big)(f)\Big|. \end{aligned}$$

Or cette dernière fonction est dans $L^1(V)$. Le théorème de convergence dominée nous permet alors d'affirmer que l'on a pour toute fonction ϕ, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact :

$$F_0(\phi\mathcal{D}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} Spf(\phi\mathcal{D}).$$

$\diamondsuit$

Remarque: La même proposition est valable avec $V \neq V_0$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$.

On a pour le superpfaffien la propriété suivante :

PROPOSITION 2.1. *Soit U l'ouvert des éléments de $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$, dont l'action sur V_0 est inversible (si $X \in \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$ alors X laisse stable V_0). Alors la restriction de Spf à U est égale comme fonction généralisée sur U à un élément de $\mathcal{O}(U)$.*

On a de plus sur U :

$$Spf^2 = (-1)^{\frac{n+m}{2}} Ber^{-1}.$$

Remarque: Si m est impair, Spf est nul ainsi que Ber^{-1}. On peut donc supposer que m est pair pour les raisonnements.

Soit $\mathcal{P}$ une superalgèbre proche. Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_{\mathcal{P}}.$$

Alors on a (cf. [Ber87]) :

$$Ber^{-1}_{(1,0)}(M) = (\frac{det(\widetilde{A})}{|det(\widetilde{A})|})det(A)^{-1}det(CA^{-1}B - D),$$

et

$$Ber^{-1}(M) = det(A)^{-1}det(CA^{-1}B - D),$$

C'est polynomial en B, C et D.

La fonction Spf est dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})) \otimes \mathbb{C}$. La conjugaison est le produit tensoriel de l'identité sur $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B}))$ et de la conjugaison sur $\mathbb{C}$.

Démonstration: La fonction μ est à valeurs dans les polynômes de degré 2 sur V. On décompose $i\mu$ suivant le degré sur V_0 en trois termes : α_0, α_1 et α_2. Puisque ces trois termes sont pairs, on a

$$\exp(i\mu) = \exp(i\alpha_0)\exp(i\alpha_1)\exp(i\alpha_2).$$

On peut expliciter ces termes :

$$\alpha_0 = \sum_{i\leq j} \alpha^0_{i,j} x_i x_j,$$
$$\alpha_1 = \sum_{i,j} \alpha^1_{i,j} x_i \xi_j,$$
$$\alpha_2 = \sum_{i<j} \alpha^2_{i,j} \xi_i \xi_j,$$

où $\alpha^0_{i,j}$ et $\alpha^2_{i,j}$ sont des fonctions paires sur $\mathfrak{osp}(V)$, et les $\alpha^1_{i,j}$ des fonctions impaires.

Calculons la restriction de Spf à U_0. La restriction de α_1 à U_0 est nulle car α_1 est impaire. On a donc pour la restriction de $\exp(i\mu)$ à U_0.

$$\begin{aligned}\int_V \exp(i\mu) &= \int_V \exp(\alpha_0)\exp(\alpha_2)D(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m)\\ &= \int_{V_0}\exp(i\alpha_0)D(x_1,\dots,x_n)\int_{V_1}\exp(i\alpha_2)D(\xi_1,\dots,\xi_m).\end{aligned}$$

La seconde intégrale donne, à $i^{\frac{m}{2}}$ près, le pfaffien classique sur $\mathfrak{so}(V_1,\mathcal{B}|_{V_1}) \subset \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$. Comme $(2\pi)^{\frac{n}{2}}Spf = F_0$, on a (avec les notation de la proposition ci-dessus) pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ϕ sur U_0 si $\mathcal{D}X$ est la mesure de Lebesgue associée au système de coordonnées $a_{i,j}$ sur U_0 :

$$\begin{aligned}&\int_{V_0}\Big(\int_{U_0}\exp(i\alpha_0)\phi\mathcal{D}X\Big)D(x_1,\dots,x_n)\\ &\qquad= \lim_{u\to 0, u\in U_{n,0}}\int_{V_0}\Big(\int_{U_0}\exp(i\alpha_0(X+iu))\phi\mathcal{D}X\Big)D(e_1^*,\dots,e_n^*)\end{aligned}$$

Or cette dernière limite est égale à (cf [Hör83, Section 3.4]) :

$$\int_{U_0}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\exp\Big(\frac{i(p-q)\pi}{4}\Big)\Big|det(X)\Big|^{\frac{-1}{2}}\phi\mathcal{D}X,$$

où le déterminant de X est pris pour la représentation standard. La restriction de Spf à U_0 est donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et son carré est bien égal à

$$(-1)^{\frac{n+m}{2}-q}Ber_{(1,0)}^{-1}.$$

De plus comme Spf est $OSP(V)$-invariante (U est $OSP(V)$-invariant ainsi que μ), et que l'on a $Spf^2|_{U_0} = Ber_{(1,0)}|_{U_0}$, cette dernière égalité est vraie partout (car $OSP(V).(U_{p,q})_0 = U_{p,q}$). C'est-à-dire que l'on a comme fonction généralisée sur $U_{(p,q)}$:

$$Spf^2 = (-1)^{\frac{n+m}{2}-q}Ber_{(1,0)}^{-1}.$$

Or sur $U_{(p,q)}$, On a $Ber = (-1)^q Ber_{(1,0)}$. On en déduit sur U

$$Spf^2 = (-1)^{\frac{n+m}{2}}Ber^{-1}.$$

Ce qui termine la preuve. $\diamondsuit$

Remarques: Le choix de l'orientation opposée pour V change Spf en $-Spf$. Il y a d'autre part dans la définition le choix d'une racine carrée de -1 (on aurait pu considérer l'intégrale de $\exp(-i\mu)$). Ce choix change Spf en son conjugué.

On note $WF(Spf)$ le front d'onde du superpfaffien. On va le majorer.

Tout d'abord la propriété précédente montre que l'ensemble des singularités du superpfaffien, que l'on note $\Sigma(Spf)$ est égal au complémentaire de la réunion des

$U_{p,n-p}$ lorsque p varie entre 0 et n. En effet sur $\bigcup_p U_{p,n-p}$, Spf est analytique (donc $\mathcal{C}^\infty$). De plus, si $x \in \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0 \setminus \bigcup_p U_{p,n-p}$ et V est un voisinage de x, Spf est non borné sur $V \cap \bigcup_p U_{p,n-p}$. Donc x est une singularité. Finalement on a bien :

$$\Sigma(Spf) = \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0 \setminus \bigcup_{p=0}^{n} U_{p,n-p}.$$

Soit $U^0_{n,0}$ l'ensemble des f de $\mathfrak{sp}(V,\mathcal{B})^* \subset \mathfrak{osp}(V_0,\mathcal{B}|_{V_0})^*$ (l'inclusion se fait grâce à la décomposition $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B}) = \mathfrak{sp}(V_0,\mathcal{B}|_{V_0}) \oplus (\mathfrak{so}(V_1,\mathcal{B}|_{V_1}) \oplus \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_1))$ tels que $f(U_{n,0}) \geq 0$. On a d'après [Hör83, Theorem 8.1.6] :

$$WF(Spf) \subset \Sigma(Spf) \times U^0_{n,0}.$$

On peut préciser le front d'onde en 0 (On le note $WF(Spf)_0$) :

THÉORÈME 2.1. *On a :*

$$WF(Spf)_0 = U^0_{n,0}.$$

Démonstration: Comme le problème ne dépend que de V_0, on suppose pour alléger la démonstration que $V = V_0$. Tout d'abord on remarque que si Δ est une droite de $\mathfrak{sp}(V,\mathcal{B})$ dont l'intersection avec $U_{m,0}$ est vide alors il existe f dans $U^0_{n,0}$ tel que $f(\Delta) = 0$. Il suffit alors, pour montrer le théorème, de montrer que la restriction à une droite Δ d'intersection vide avec $U_{n,0}$ n'a pas de sens dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\Delta)$.

Soit j l'injection d'une telle droite Δ dans $\mathfrak{sp}(V,\mathcal{B})$. Soit v un vecteur non nul de Δ. Par hypothèse, la forme quadratique $\mu(X)$ sur V est de signature (p,q) avec $p < n$. Il existe une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de V dans laquelle on ait :

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2.$$

On a donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\exp(i\mu(\theta X)) = \exp\Big(i\theta\Big(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2\Big)\Big)$$

Soit maintenant $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Delta)$. On peut considérer ϕ comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de θ. La restriction de Spf à Δ n'a un sens que si la fonction

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(i\theta\Big(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2\Big)\Big)\phi(\theta)d\theta$$

est intégrable sur V. Or cette fonction est égale à

$$\widehat{\phi}\big(\big(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2\big)\big),$$

où $\widehat{\phi}$ désigne la transformée de Fourier de ϕ.

Si ϕ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive non nulle à support compact sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{\phi}(0) \neq 0$. Or l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de $\frac{1}{x}$ diverge. Donc l'intégrale de $\widehat{\phi}(x^2 - y^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ diverge. Donc si $q > 0$ la restriction de Spf à Δ n'existe pas.

Si $q = 0$ et $p < n$, il existe une direction de V dans laquelle la fonction ci-dessus est constante. Elle n'est donc pas intégrable.

Finalement la restriction de Spf à Δ n'existe pas. $\diamondsuit$

Le théorème s'énonce de la même façon pour un superespace vectoriel V muni d'une forme bilinéaire superantisymétrique paire non-dégénérée et $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})$. On a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *Soit* $\mathfrak{h}$ *un sous espace vectoriel de* $\mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})$, *alors si* $\mathfrak{h} \cap U_{n,0} \neq \emptyset$, Spf *admet une restriction à* $\mathfrak{h}$.

On peut légèrement étendre le domaine de définition du superpfaffien de la façon suivante. Tout d'abord si z est un complexe tel que $\mathcal{R}e(z) \geq 0$ on note $Arg(z)$ la détermination de son argument comprise entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et on pose $\sqrt{z} = \sqrt{|z| e^{\frac{Arg(z)}{2}}}$. On a avec ces notations l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{z}}.$$

On peut alors étendre la définition du superpfaffien au sous ensemble de $\mathfrak{osp}(V) \otimes \mathbb{C}$ des matrices telles que leur partie imaginaire Z soit telle que la matrice symétrique $(\mathcal{B}(Ze_k, e_l))_{(k,l)}$ soit négative (pas forcément définie) et telles que les matrices $(\mathcal{B}(Ze_k, e_l))_{(k,l)}$ et $(\mathcal{B}(Xe_k, e_l))_{(k,l)}$ commutent (dans ce cas elles sont alors simultanément diagonalisables). Cet ensemble contient l'ouvert U de $\mathfrak{osp}(V)$, puisque dans ce cas $Z = 0$.

3. Exemple : $\mathfrak{osp}(2,2)$

Considérons maintenant plus en détail le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2,2)$. Soit $\mathcal{P}$ une superalgèbre proche. L'algèbre $\mathfrak{osp}(2,2)_{\mathcal{P}}$ est formée des matrices de la forme :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -a & \alpha & \beta \\ a & 0 & \gamma & \delta \\ \hline \beta & \delta & b & c \\ -\alpha & -\gamma & d & -b \end{array}\right)$$

où $a, b, c, d \in \mathcal{P}_0$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{P}_1$. Ici $V = \Pi\mathbb{R}^{2,2}$ munie du superproduit scalaire donné dans la base canonique (e_1, e_2, f_1, f_2) ($|f_i| = 1$ et $|e_i| = 0$) par $\mathcal{B}(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, $\mathcal{B}(f_1, f_2) = -\mathcal{B}(f_2, f_1) = 1$, $\mathcal{B}(f_1, f_1) = \mathcal{B}(f_2, f_2) = 0$ et $\mathcal{B}(e_i, f_j) = \mathcal{B}(f_j, e_i) = 0$. On note par les mêmes lettres $(a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ les fonctions coordonnées correspondantes sur $\mathfrak{osp}(2,2)$. On note ξ, η, x, y les fonctions coordonnées sur $\Pi\mathbb{R}^{(2,2)}$. On a alors :

$$\mu = a\eta\xi + \alpha\xi x + \beta\xi y + \gamma\eta x + \delta\eta y - \frac{d}{2}x^2 + bxy + \frac{c}{2}y^2.$$

D'où :

$$\int_{(\Pi\mathbb{R}^{(2,2)})} \exp(i\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(-ia + \big(\alpha\gamma x^2 + \beta\delta y^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)xy\big)\Big) \exp i(-\frac{d}{2}x^2 + bxy + \frac{c}{2}y^2)\ dx\ dy,$$

Où dx (resp. dy) représente la mesure de Lebesgue en x (resp. y). Comme $-dx^2 + 2bxy + cy^2 = -d(x - \frac{b}{d}y)^2 + (c + \frac{b^2}{d})y^2$ sur l'intersection de U et de l'ouvert de $\mathfrak{osp}(2,2)$ où $d \neq 0$, on a, comme égalité de fonctions généralisées, sur l'intersection de cet ouvert et de $U_{(2,0)}$:

$$\int_{\Pi\mathbb{R}^{(2,2)}} \exp(i\mu) = \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp(ix^2)\Big)^2 \Big(\frac{-2ia}{\sqrt{-(cd+b^2)}} + \frac{2i\big(-c\alpha\gamma + d\beta\delta + b(\alpha\delta + \beta\gamma)\big)}{\big(-(cd+b^2)\big)^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

Autrement dit, comme sur $U_{(2,0)}$ $-(cd+b^2)$ est positif, on a :

$$Spf|_{U_{(2,0)}} = \Big(\frac{a}{\sqrt{-(cd+b^2)}} - \frac{-c\alpha\gamma + d\beta\delta + b(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\big(-(cd+b^2)\big)^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

De même on obtient sur $U_{(0,2)}$:

$$Spf|_{U_{(0,2)}} = -\Big(\frac{a}{\sqrt{-(cd+b^2)}} - \frac{-c\alpha\gamma + d\beta\delta + b(\alpha\delta+\beta\gamma)}{\big(-(cd+b^2)\big)^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

Et sur $U_{(1,1)}$:

$$Spf|_{U_{(1,1)}} = -2i\pi\Big(\frac{a}{\sqrt{(cd+b^2)}} - \frac{-c\alpha\gamma + d\beta\delta + b(\alpha\delta+\beta\gamma)}{(cd+b^2)^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

On en déduit immédiatement sur $U_{(2,0)}$:

$$Spf^2|_{U_{(2,0)}} = \Big(\frac{a^2}{|cd+b^2|} - \frac{2a(\beta\gamma b + \beta\delta d - \alpha\gamma c + \alpha\delta b)}{|cd+b^2|^2} + 2\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{|cd+b^2|^2}\Big);$$

c'est-à-dire

$$Spf^2|_{U_{(2,0)}} = Ber^{-1}_{(1,0)}|_{U_{(2,0)}}.$$

On a de même :

$$Spf^2|_{U_{(0,2)}} = Ber^{-1}_{(1,0)}|_{U_{(0,2)}},$$

et

$$Spf^2|_{U_{(1,1)}} = -Ber^{-1}_{(1,0)}|_{U_{(1,1)}}.$$

4. Superpfaffien et Transformée de Fourier d'une orbite coadjointe

L'application moment μ peut être vue comme un polynôme de degré 2 sur V à valeurs dans $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})^*$. On note $\mu(V_0)$ l'image de V_0 dans $\mathfrak{sp}(V_0)^*$ par μ. C'est la réunion d'une orbite d'un élément nilpotent et de $\{0\}$, l'orbite nulle. La restriction du superpfaffien à $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$ est alors égal à la transformée de Fourier de cette orbite multipliée par le pfaffien classique sur $\mathfrak{so}(V_1)$. En particulier, le superpfaffien restreint à $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$ est une fonction localement intégrable.

Cependant, le superpfaffien n'est pas en général une fonction localement intégrable sur $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$ comme on peut le voir sur l'exemple $\mathfrak{osp}(2,2)$ ci-dessus. En effet, considérons le coefficient de $\alpha\delta$ sur $U_{(1,1)}$:

$$\frac{2i\pi}{\sqrt{cd+b^2}}\frac{b}{cd+b^2}$$

Au voisinage d'un point du cône des éléments nilpotents et où $d \neq 0$ et $b \neq 0$, on fait le changement de variables :

$$\begin{aligned} b' &= b \\ c' &= cd + b^2 \\ d' &= d. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{2i\pi b'}{c'^{\frac{3}{2}}},$$

Ce n'est donc pas une fonction localement intégrable.

PARTIE IV

Cohomologie équivariante

1. Définitions et premières propriétés

1.1. Définitions. On se donne une supervariété M munie d'une action d'un supergroupe G de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère l'algèbre $\widehat{\Omega}(U, M)$ des fonctions sur un ouvert U de $\mathfrak{g}$, à valeurs dans les formes pseudodifférentielles complexes sur M. On a :

$$\widehat{\Omega}(U, M) = \mathcal{O}(U \times \widehat{M}) \otimes \mathbb{C} = \mathcal{O}(U) \widehat{\otimes} \widehat{\Omega}(M) \otimes \mathbb{C}.$$

On a une action de G sur M, donc une action naturelle de G sur $\widehat{\Omega}(M) \otimes \mathbb{C}$. Si U est un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$, il y a également une action naturelle de G sur $\mathcal{O}(U)$. On a donc une action de G dans $\widehat{\Omega}(U, M)$ égale au produit tensoriel des deux actions précédentes. On peut donc considérer la sous algèbre des éléments G-invariants. On la note :

$$\widehat{\Omega}_G(U, M) = \left(\widehat{\Omega}(U, M)\right)^G.$$

On appelle les éléments de cette algèbre, les formes pseudodifférentielles équivariantes ou plus simplement les formes équivariantes sur M.

On étend par $\mathcal{O}(U)$-linéarité la différentielle extérieure sur $\widehat{\Omega}(M)$ à $\widehat{\Omega}(U, M)$. On définit également sur $\widehat{\Omega}(U, M)$ un second opérateur différentiel, l'opérateur de contraction, noté ι. Soient (x_i, ξ_j) des coordonnées locales sur M. Considérons $(Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_m)$ une base homogène de $\mathfrak{g}$. On note $(y_1, \ldots, y_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ sa base duale. Aux Y_k et aux Z_l on associe des champs de vecteurs sur M que l'on note encore Y_k et Z_l. On pose :

$$\iota = \sum_k \iota(Y_k)\ y_k\ + \sum_l \iota(Z_l)\ \zeta_l,$$

où $\iota(Y_k)$ (resp. $\iota(Z_l)$) est la dérivation de $\widehat{\Omega}_M$ associée à Y_k (resp. Z_l) définie plus haut (section **I.2.3.2.**). On a ainsi défini un champ de vecteurs sur $U \times \widehat{M}$ qui vérifie $\iota^2 = 0$.

On définit sur $\widehat{\Omega}(U, M)$ la dérivation $d_{\mathfrak{g}} = d - i\iota$. On a :

$$d_{\mathfrak{g}}^2 = -i\mathcal{L},$$

avec $\mathcal{L} := \sum_k \mathcal{L}(Y_k)\, y_k + \sum_l \mathcal{L}(Z_l)\, \zeta_l$, où $\mathcal{L}(Y_k)$ (resp. $\mathcal{L}(Z_l)$) est la dérivée de Lie sur $\widehat{\Omega}_M$ par rapport à Y_k (resp. Z_l). On constate que d et ι commutent à l'action de G, et donc laissent stable $\widehat{\Omega}_G(U, M)$. Donc $d_{\mathfrak{g}}$ induit une dérivation de $\widehat{\Omega}_G(U, M)$. De plus sur $\widehat{\Omega}_G(U, M)$, on a $d_{\mathfrak{g}}^2 = 0$. On définit alors la cohomologie équivariante comme la cohomologie de $\left(\widehat{\Omega}_G(U, M), d_{\mathfrak{g}}\right)$ et on la note : $\widehat{H}_G(U, M)$.

On peut modifier cette définition dans deux directions. Tout d'abord, si l'on veut intégrer de telles formes on peut considérer les formes équivariantes à valeurs dans les formes pseudodifférentielles intégrables, c'est-à-dire telles que leur restriction au fibré $(\widehat{M})_0 = (\Pi TM)_0$ soit à décroissance rapide le long des fibres et à support compact sur M_0. Ensuite, au lieu de se contenter des formes à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, on peut considérer des formes dont les coefficients sont des fonctions généralisées sur $\mathfrak{g}$. Nous serons ainsi amené à considérer plus particulièrement les deux espaces suivants :

- L'espace $\widehat{\Omega}_{G,\int}(U, M)$ des formes équivariantes intégrables.
- L'espace $\widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(U, M)$ des formes équivariantes intégrables à coefficients généralisés.

Ce dernier espace se définit comme le sous-espace de $\widehat{\Omega}^{-\infty}_G(U, M)$ des formes α telles que pour toute forme volume $\mathcal{C}^\infty$, ϕ, de type $(1, 0)$ sur $\mathfrak{g}$ à support compact inclus dans U, $\alpha(\phi)$ soit une forme pseudodifférentielle intégrable.

La différentielle $d_{\mathfrak{g}}$ s'étend bien à ces espaces et on peut définir les espaces de cohomologie correspondant. Si M est munie d'une orientation globale, l'intégrale d'une forme équivariante intégrable (à coefficients généralisés) $d_{\mathfrak{g}}$-exacte est nulle (cf section **I.4.2.2**). La cohomologie équivariante non-super à coefficients généralisés est étudiée dans [KV93].

1.2. Premières propriétés fonctorielles. Les résultats sur les formes pseudodifférentielles nous permettent d'énoncer :

PROPOSITION 1.1. *Soit G un supergroupe et deux G-supervariétés M et N. Soit $\pi : N \longrightarrow M$ un morphisme équivariant de G-supervariétés. On étend π^* aux formes équivariantes. On a la relation :*

$$\pi^* d_{\mathfrak{g}} = d_{\mathfrak{g}} \pi^*.$$

Donc π^* *induit une application en cohomologie équivariante.*

Si de plus π *définit un superfibré vectoriel équivariant dont les fibres sont munies d'une orientation globale* G*-invariante, on a une application* π_* *entre les espaces de formes équivariantes intégrables qui vérifie, si les fibres de* N *sont de dimension* (k, l) *:*

$$d_{\mathfrak{g}}\pi_* = (-1)^{(k+l)}\pi_* d_{\mathfrak{g}}.$$

En particulier si M est un point, $\widehat{H}_G(U, M) = \mathcal{O}(U)^G$ et ainsi $\widehat{H}_G(N)$ est une $\mathcal{O}(U)^G$-algèbre.

2. Superconnexions équivariantes

Soit G un supergroupe, M une G-supervariété et $\mathcal{V}$ un superfibré vectoriel équivariant au dessus de M. On a une action naturelle de G sur l'espace des formes pseudodifférentielles sur M ainsi que sur l'espace des formes pseudodifférentielles à valeurs dans $\mathcal{V}$ (soit $\widehat{\Omega}(M, \mathcal{V})$). On note $\mathcal{L}^{\mathcal{V}}$ la dérivée de Lie sur $\widehat{\Omega}(M, \mathcal{V})$ liée à l'action de G sur $\widehat{\Omega}(M, \mathcal{V})$, c'est un morphisme de superalgèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans les opérateurs différentiels du premier ordre sur $\widehat{\Omega}(M, \mathcal{V})$.

Soit $\mathbb{A}$ une superconnexion. Si $\mathbb{A}$ commute avec l'action de G on dit que $\mathbb{A}$ est une superconnexion G-invariante et on a pour tout X dans $\mathfrak{g}$:

$$[\mathbb{A}, \mathcal{L}^{\mathcal{V}}(X)] = 0.$$

On peut considérer les formes équivariantes sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathcal{V}$, soit

$$\widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g}, (M, \mathcal{V})) := \Big(\mathcal{O}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\widehat{\Omega}(M, \mathcal{V}) \otimes \mathbb{C}\Big)^G.$$

Si $\mathbb{A}$ est une superconnexion G-invariante, on note $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ la superconnexion équivariante associée, soit :

$$\mathbb{A}_{\mathfrak{g}} := \mathbb{A} - i\iota.$$

On a alors pour $\alpha \in \widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g}, M)$ homogène et $\omega \in \widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g}, (M, \mathcal{V}))$:

$$\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(\alpha\omega) = (d_{\mathfrak{g}}\alpha)\omega + (-1)^{|\alpha|}\alpha\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}\omega.$$

C'est un opérateur différentiel qui laisse stable $\widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g}, (M, \mathcal{V}))$. On fait agir $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ sur $\widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g}, (M, End(\mathcal{V})))$ par le crochet de supercommutation de la superalgèbre des endomorphismes de $\widehat{\Omega}_G(G, (M, \mathcal{V}))$. On note η l'application qui envoie une forme θ sur la multiplication à gauche par θ. On définit alors la courbure équivariante $F_{\mathfrak{g}}$ de $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ comme l'élément de $\widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g}, (M, End(\mathcal{V})))$ vérifiant :

$$\eta(F_{\mathfrak{g}}) = \mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^2 + i\mathcal{L}^{\mathcal{V}}.$$

On a alors l'identité de Bianchi qui se prouve comme dans la situation classique (cf [BGV92] proposition 7.4 p.210) :

$$\mathbb{A}_{\mathfrak{g}} F_{\mathfrak{g}} = 0.$$

On définit le moment équivariant (relativement à la superconnexion G-invariante $\mathbb{A}$) par

$$\mu := \mathcal{L}^{\mathcal{V}} - [\iota, \mathbb{A}].$$

C'est un élément de $\left(\mathfrak{g}^* \otimes \Gamma(M, End(\mathcal{V}))\right)_0 \subset \widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g}, (M, End(\mathcal{V})))$ qui vérifie :

$$F_{\mathfrak{g}} = \mathbb{A}^2 + i\mu.$$

3. Superforme de Thom équivariante

Soit $\pi : \mathcal{V} \to M$, un superfibré vectoriel, on a vu dans la section **I.5** que l'on a pas en général de forme pseudodifférentielle fermée telle que $\pi_*\theta = 1_M$. Si on rajoute une action équivariante d'un supergroupe G, on peut construire un forme équivariante vérifiant cette propriété. C'est ce que l'on fait maintenant. Mais on ne peut le faire que si l'on suppose que θ est à coefficients généralisés. En effet, considérons comme en **I.5** M comme un superfibré vectoriel de rang $(0, m)$ au dessus de M_0 ($\pi : M \to M_0$). Soit G un groupe compact (non super). Alors il existe sur le fibré vectoriel (non super) $\pi' : (TM)_1^* \to M_0$ une forme équivariante θ' à coefficients polynomiaux sur $\mathfrak{g}$ telle que $\pi'_*(\theta') = 1_{M_0}$ (c'est une forme de Thom équivariante pour le fibré $(TM)_1^*$). Si on applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ définie en **I.5** on obtient une forme $\mathcal{F}(\theta')$ qui vérifie $j^*\mathcal{F}(\theta') = 1_{M_0}$ et $\pi_*(\mathcal{F}(\theta')) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}(2i\pi)^m \mathcal{E}_{\mathfrak{g}}$ la forme d'Euler équivariante de $(TM)_1^*$. Si θ est une forme équivariante telle que $\pi_*\theta = 1_{M_0}$, alors comme en **I.5** on obtient :

$$(-1)^{m|\theta|} j^*(\theta)\mathcal{E}_{\mathfrak{g}} = 1_M.$$

Alors $j^*(\theta)$ est un inverse de la forme d'Euler équivariante $\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}$. Si $m > 0$ la forme d'Euler n'est pas inversible pour $X = 0 \in \mathfrak{g}$, elle est donc nécessairement à coefficients généralisés sur $\mathfrak{g}$.

3.1. Construction d'une superforme de Thom équivariante. Soit G un supergroupe de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit M une G-supervariété. Soit $\mathcal{V}$ un superfibré vectoriel équivariant sur M. On suppose que les fibres sont orientées (c'est-à-dire $\mathcal{V}_0$ orienté) et que VC est muni d'une superstructure euclidienne, on la note $\mathcal{B}(.,.)$, toute ces structures étant G-invariantes. On note π la projection $\pi : \mathcal{V} \to M$. On appelle forme de Thom équivariante sur $\mathcal{V}$ une forme $\theta \in \widehat{\Omega}_G^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})$ équivariante fermée, intégrable le long des fibres, telle que $\pi_*\theta = 1_{\widehat{\Omega}_G^{-\infty}(\mathfrak{g}, M)}$. On va construire une telle forme de Thom, cette forme sera à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ au dessus d'un ouvert de $\mathfrak{g}$ que l'on précisera plus tard. La construction est due dans la situation classique à Mathai-Quillen ([MQ86]). On la trouve également exposée dans [BGV92] et dans [DV88].

On note $\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})$ le fibré de Clifford sur M associé à $\Pi\mathcal{V}$ et la superforme symplectique $\Pi\mathcal{B}$. On note comme dans la partie précédente, τ l'isomorphisme entre $\mathfrak{osp}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{C}^2(\Pi\mathcal{V})$ et σ^* l'injection (de $\mathcal{O}(M)$-supermodules) de $\mathcal{C}^2(\Pi\mathcal{V})$ dans $\mathcal{O}(\Pi\mathcal{V})$. On suppose que $\mathcal{V}$ possède une superconnexion G-invariante $\mathbb{A}$ qui laisse invariante la superstructure euclidienne. Cela implique que $\mathbb{A}^2$ est à valeurs dans $\mathfrak{osp}(\mathcal{V})$.

La courbure $\mathbb{A}^2$ est une forme pseudodifférentielle sur M (c'est-à-dire une fonction sur $\widehat{M}$) à valeurs dans $\mathfrak{osp}(\mathcal{V})$. L'application $\sigma^* \circ \tau$ envoie $\mathfrak{osp}(\mathcal{V})$ sur $S^2(\Pi\mathcal{V}^*)$. L'application $\sigma^* \circ \tau(\mathbb{A}^2)$ est donc une fonction sur $\widehat{M}$ à valeurs dans $S^2(\Pi\mathcal{V}^*)$. De plus sa restriction à M est une section de $S^2(\Pi\mathcal{V}^*)$. Finalement, $\sigma^* \circ \tau$ est une fonction homogène de degré 2 sur le fibré $\widehat{M} \times_M \Pi\mathcal{V}$. Alors $\widetilde{\sigma^* \circ \tau}(\mathbb{A}^2)$ est une fonction sur $(\widehat{M} \times_M \Pi\mathcal{V})_0 = T_1M_0 \times_{M_0} (\Pi\mathcal{V})_0$, où T_1M_0 dénote la partie impaire du fibré tangent de M restreinte à M_0 et où on a oublié la parité, et $(\Pi\mathcal{V})_0$ dénote la variété sous jacente à $\Pi\mathcal{V}$ (c'est-à-dire $\mathcal{V}_1$ sans sa parité restreint à M_0).

On suppose alors que $\widetilde{\sigma^* \circ \tau}(\mathbb{A}^2)$ est négative. On note cette condition $(*)$.

Autrement dit, si v est une section de $\mathcal{V}_1$ (considéré comme fibré vectoriel), $\mathcal{B}(\mathbb{A}^2 v, v)$ est une forme pseudodifférentielle sur M, c'est-à-dire une fonction sur $\widehat{M}$. La condition $(*)$ veut dire que la restriction de cette fonction à la variété sous jacente, c'est-à-dire $T_1M|_{M_0}$ (où l'on a oublié la parité), est négative.

On note $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ la superconnexion équivariante associée à $\mathbb{A}$. On note $\pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})$ le fibré de base $\mathcal{V}$ image réciproque de $\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})$ par π. On a une injection naturelle de $\pi^*\Pi\mathcal{V}$ dans $\pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})$. La section tautologique avec changement de parité de $\pi^*\Pi\mathcal{V}$ au dessus de $\mathcal{V}$ se prolonge en une section ϵ de $\pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})$.

Précisons ϵ sur un ouvert de coordonnées U de M trivialisant $\mathcal{V}$. Soit V la fibre générique de $\mathcal{V}$. Au dessus de U, $\pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})$ est isomorphe à $U \times V \times \mathcal{C}(\Pi V)$. On note $(e'_1, \ldots, e'_n, f'_1, \ldots, f'_m)$ une base homogène de V, $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ sa base duale et $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ la base de ΠV telle que, pour tout i, $e_i = \bar{\pi}e'_i$ et, pour tout j, $f_i = \bar{\pi}f'_j$. On considère les éléments de cette dernière base comme des éléments de $\mathcal{C}(\Pi V)$. On a alors :

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i + \sum_{j=1}^{m} f_j \xi_j \in \Pi V \otimes V^* \subset \mathcal{O}(U \times V) \otimes \mathcal{C}(\Pi V).$$

On étend $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ et $\mathcal{L}^{\mathcal{V}}$ en des opérateurs différentiels sur $\widehat{\Omega}_G^{-\infty}(\mathfrak{g}, (M, \pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})))$ et en des opérateurs $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^*$ et $(\mathcal{L}^{\mathcal{V}})^*$ sur $\widehat{\Omega}_G^{-\infty}(\mathfrak{g}, (M, \pi^*S(\Pi\mathcal{V}^*)))$. Par abus de notation, on écrit encore $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ et $\mathcal{L}^{\mathcal{V}}$ pour les opérateurs différentiels $\pi^*(\mathbb{A}_{\mathfrak{g}})$ et $\pi^*(\mathcal{L}^{\mathcal{V}})$) sur

$\widehat{\Omega}_G^{-\infty}(\mathfrak{g},(\mathcal{V},\pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})))$. On pose :

$$\omega_{\mathcal{V}} := \frac{\epsilon^2}{2} + i\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}.\epsilon + \tau(F_{\mathfrak{g}}) \in \widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g},(\mathcal{V},\pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V}))).$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.1. *On a sous les hypothèses précédentes :*

$$\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}.\omega_{\mathcal{V}} + \frac{i}{2}[\epsilon,\omega_{\mathcal{V}}] = 0.$$

On note σ^* l'isomorphisme (de superfibrés vectoriels) entre les espaces $\pi^*(\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V}))$ et $\pi^*(S(\Pi\mathcal{V}^*))$ ($\pi^*(S(\Pi\mathcal{V}^*))$ étant plongé dans $\pi^*(\mathcal{O}(\Pi\mathcal{V}))$), et on note encore ϵ la section $\sigma(\epsilon)$ de $\pi^*(\Pi\mathcal{V})$. On a :

$$(\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^* - i\iota(\epsilon))\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}) = 0,$$

où $\iota(\epsilon)$ est la dérivation de $\pi^*(\mathcal{O}(\Pi\mathcal{V}^*))$ associée à $\sigma(\epsilon)$ et étendue à l'espace $\widehat{\Omega}_G^{-\infty}(\mathfrak{g},(\mathcal{V},\pi^*(\Pi\mathcal{V})))$. Si f est fonction entière de la variable complexe, on a :

$$(\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^* - i\iota(\epsilon))f(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})) = 0.$$

Démonstration: Par la règle de Leibnitz, on a $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}.\epsilon^2 = [\epsilon,\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}.\epsilon]$. D'autre part on a $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^2.\epsilon + \frac{1}{2}[\epsilon,\tau(F_{\mathfrak{g}})] = -i\mathcal{L}^{\mathcal{V}}\epsilon = 0$ et par l'identité de Bianchi, $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}.F_{\mathfrak{g}} = 0$. Enfin $[\epsilon,\epsilon^2] = 0$.

Or pour tout ω on a $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^*\sigma^*(\omega) = \sigma^*(\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}\omega)$ et $2\iota(\epsilon)\sigma^*(\omega) = -\sigma^*([\epsilon,\omega])$ (Cf. **II.1**). On en tire $(\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^* - i\iota(\epsilon))\sigma^*(\omega) = 0$. La dernière égalité s'en déduit immédiatement, $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^* - i\iota(\epsilon)$ étant une dérivation de $\widehat{\Omega}_G^{-\infty}(\mathfrak{g},(\mathcal{V},\pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})))$. ♢

Remarque: L'application $\mathbb{A}^*+\frac{i}{2}[\epsilon,.]$ définit une superconnexion sur le fibré $\pi^*\mathcal{C}(\Pi\mathcal{V})$ au dessus de $\mathcal{V}$. En effet il suffit de constater que $|\epsilon| = 1$ et si $\alpha \in \widehat{\Omega}(\mathcal{V})$ et $\omega \in \widehat{\Omega}(\mathcal{V},\pi^*\mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{V}))$, on a :

$$[\epsilon,\alpha\omega] = (-1)^{|\alpha|}\alpha[\epsilon,\omega].$$

Alors, $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}} + \frac{i}{2}[\epsilon,.]$ est la connexion équivariante associée. Et on a :

$$\omega_{\mathcal{V}} = \tau\Big((\mathbb{A}_{\mathfrak{g}} + \frac{i}{2}[\epsilon,.])^2 + i\mathcal{L}^{\mathcal{V}})\Big).$$

Autrement dit, $\tau^{-1}(\omega_{\mathcal{V}})$ est la courbure équivariante associée.

De même, $\mathbb{A}^* - i\iota(\epsilon)$ définit une superconnexion sur le fibré $\pi^*\mathcal{O}(\Pi\mathcal{V})$ au dessus de $\mathcal{V}$ et $\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})$ est la courbure équivariante associée.

La proposition ci-dessus n'est alors rien d'autre que l'identité de Bianchi équivariante pour ces deux superconnexions

Soit $\pi : \mathcal{N} \to N$ un superfibré vectoriel de rang (n, m) et $\mathbb{A}$ une superconnexion sur $\mathcal{N}$. Alors $\mathbb{A}$ détermine une superconnexion sur $\mathcal{N}^*$ qui s'étend en une dérivation de $S(\widehat{\Omega}(N, \mathcal{N}^*)) = \widehat{\Omega}(N, S(\mathcal{N}^*))$ qui s'étend par continuité à $\widehat{\Omega}(N, \mathcal{O}(\mathcal{N}))$. Soit $\mathcal{V}ol_{(1,0)}(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}$ le superfibré des formes volumes de type $(1, 0)$ sur les fibres de $\mathcal{N}$. C'est le superfibré vectoriel correspondant à la représentation $Ber_{(1,0)}$ du superfibré $GL(n, m)$-principal associée. La superconnexion $\mathbb{A}$ détermine une superconnexion sur $\mathcal{V}ol_{(1,0)}(\mathcal{N})$. Elle est définie de la manière suivante. Soit U un ouvert de trivialisation de $\mathcal{N}$ ($\mathcal{N}|_U \simeq U \times \mathbb{R}^{(n,m)}$). Sur U, on a $\mathbb{A} = d + \omega$ où d est la différentielle extérieure sur U et ω est une forme pseudodifférentielle sur N à valeurs dans $End(\mathbb{R}^{(n,m)})$ impaire. Sur $\mathcal{V}ol_{(1,0)}(\mathcal{N})|_U$, on a $\mathbb{A} = d + str(\omega)$ ($str = d(Ber_{(1,0)})$). On a, pour toute forme ϕ dans $\widehat{\Omega}(N, \mathcal{O}(\mathcal{N})) = \widehat{\Omega}(N) \underset{\mathcal{O}(N)}{\otimes} \mathcal{O}(\mathcal{N})$ et toute forme volume $\mathcal{D}$ sur les fibres, en notant $\int_{\mathcal{N}/N}$ l'intégration le long des fibres et en supposant que $(\mathbb{A}\phi)\mathcal{D}$, $\mathbb{A}(\phi\mathcal{D})$ et $\phi(\mathbb{A}\mathcal{D})$ sont intégrables :

$$\int_{\mathcal{N}/N} (\mathbb{A}\phi)\mathcal{D} = \int_{\mathcal{N}/N} \mathbb{A}(\phi\mathcal{D}) - (-1)^{|\phi|} \int_{\mathcal{N}/N} \phi(\mathbb{A}\mathcal{D}).$$

Comme localement $\mathbb{A}$ est somme de d et d'une dérivation de $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ à coefficients constants le long des fibres, on a :

$$\int_{\mathcal{N}/N} \mathbb{A}(\phi\mathcal{D}) = (-1)^m d \int_{\mathcal{N}/N} \phi\mathcal{D}.$$

Si on suppose de plus que $\mathbb{A}\mathcal{D} = 0$ alors on a :

$$\int_{\mathcal{N}/N} (\mathbb{A}\phi)\mathcal{D} = (-1)^m d \int_{\mathcal{N}/N} \phi\mathcal{D}.$$

LEMME 3.1. *Soit $\mathcal{N} \to N$ un superfibré vectoriel muni d'une superstructure euclidienne (resp. symplectique et d'une orientation des fibres de $\mathcal{N}_1$). Soit $\mathbb{A}$ une superconnexion sur $\mathcal{N}$ laissant la superstructure euclidienne (resp. symplectique) invariante. La superstructure euclidienne (resp. symplectique et l'orientation) détermine une forme volume de type $(1, 0)$ sur les fibres de $\mathcal{N}$. On note T l'intégration le long des fibres de $\mathcal{N}$ associée. On a, pour tout α dans $\widehat{\Omega}(N, \mathcal{O}(\mathcal{N}))$, à décroissance rapide le long des fibres,*

$$T(\mathbb{A}\alpha) = (-1)^m dT(\alpha).$$

Démonstration: Le problème étant local, on peut se placer sur un ouvert de trivialisation U de $\mathcal{N}$. On a $\mathcal{N}|_U \simeq U \times V$, où V est une fibre générique de $\mathcal{N}$. On peut choisir la trivialisation de sorte que la superstructure euclidienne $\mathcal{B}$ soit constante. Il suffit de prendre au dessus de U une base de sections de $\mathcal{V}_0$ que l'on transforme en une base orthonormée par la procédé de Gram-Schmidt. Pour $\mathcal{V}_1$, on considère une section f_1 partout non nulle sur U. Comme $\mathcal{B}$ est non dégénérée on peut trouver une section partout non nulle f_2 telle que $\mathcal{B}(f_1, f_2) = 1$. Alors f_1 et f_2 engendrent un plan symplectique. L'orthogonal est un supplémentaire de dimension strictement inférieure. On recommence ainsi jusqu'à obtenir une base symplectique de sections de $\mathcal{V}_1$ au dessus de U. On pose sur U : $\mathbb{A} = d+\omega$ avec $\omega \in \widehat{\Omega}(U, \mathfrak{osp}(V))$. Soit $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ une base orthosymplectique de V (resp. symplectique de V_0 et orthogonale orientée de V_0) et $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ sa base duale. Dans une telle base la forme volume choisie est $D(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$. Elle est donc à coefficients constants sur U. On a donc $\mathbb{A}.D(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) = str(\omega).D(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$. Or sur $\mathfrak{osp}(V)$ la supertrace est nulle. On en déduit que $\mathbb{A}.D(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) = 0$. Le résultat s'ensuit donc de ce qui a été dit précédemment. $\diamondsuit$

Ce lemme s'étend naturellement à la situation équivariante.

Soit f une fonction entière de la variable complexe, $f(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))$ est une fonction sur le fibré $p^*\pi^*\Pi\mathcal{V} = \widehat{\mathcal{V}} \times_M \Pi\mathcal{V}$ de base $\widehat{\mathcal{V}}$ (p étant la projection canonique $p : \widehat{\mathcal{V}} \to \mathcal{V}$) à coefficients dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})$. De plus, comme il y a sur $\mathcal{V}$ un super produit scalaire G-invariant et une orientation G-invariante, on a une orientation totale G-invariante car $\mathcal{B}|_{\mathcal{V}_1}$ est une forme symplectique et induit donc une orientation de $\mathcal{V}_1$. Le choix de $\mathcal{B}$ et d'une orientation induit une forme volume de type $(1, 0)$ canonique le long des fibres de $p^*\pi^*\Pi\mathcal{V} \to \widehat{\mathcal{V}}$. On peut donc intégrer le long des fibres de $p^*\pi^*\Pi\mathcal{V} \to \widehat{\mathcal{V}}$. On note T cette intégration. On a alors pourvu que tout soit intégrable :

$$T\Big((\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^* - i\iota(\epsilon))f(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))\Big) = (-1)^m d_{\mathfrak{g}} T\Big((f(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))\Big),$$

où (k, l) est la dimension des fibres de $\mathcal{V}$. Cela provient du lemme précédent et de ce que l'on a sur un ouvert de coordonnées en notant $(e_1^*, \ldots, e_n^*, f_1^*, \ldots, f_m^*)$ la base duale de $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$:

$$\iota(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial e_i^*} + \sum_{j=1}^{m} \xi_j \frac{\partial}{\partial f_j^*}.$$

Or on a vu que $(\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^* - 2i\iota(\epsilon))f(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})) = 0$. Donc on a l'égalité suivante pour toute fonction entière de la variable complexe, f, telle que $f(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))$ soit intégrable le long des fibres

$$d_{\mathfrak{g}} T\Big(f\Big(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})\Big)\Big) = 0.$$

La forme $T\Big(f\Big(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})\Big)\Big)$ est donc une forme équivariante fermée sur $\mathcal{V}$. Il suffit pour trouver une forme de Thom de trouver une "bonne" fonction f. En fait le choix $f = \exp$ donne, à une constante près, une forme de Thom sur $\mathcal{V}$. Avant d'énoncer une proposition nous avons besoin de préciser une notation. Soit μ le moment équivariant de $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$. On a $\mu \in \widehat{\Omega}_G(\mathfrak{g}, (M, \mathfrak{osp}(\mathcal{V}))$, l'espace des formes équivariantes sur M à valeurs dans $\mathfrak{osp}(\mathcal{V})$. On peut considérer, pour tout couple d'entiers (p, q) avec $p + q = m$, l'ouvert $U^{\mathcal{V}}_{p,q}$ de $\mathfrak{osp}(\mathcal{V})$ tel que $(U^{\mathcal{V}}_{p,q})_0$ soit l'ouvert des éléments X de $\mathfrak{osp}(\mathcal{V})_0$ tels que $\sigma^* \circ \tau(X)|_{\Pi(\mathcal{V}_1)}$ soit une forme quadratique de signature (p, q). On pose alors $U_{p,q} = \mu^{-1}\Big(\widehat{\Omega}(M, U^{\mathcal{V}}_{p,q})\Big)$. Plus généralement, si W est un ouvert de M on pose $U_{p,q}(W) = \mu^{-1}\Big(\widehat{\Omega}(W, U^{\mathcal{V}}_{p,q})\Big)$. En particulier on a :

$$(U_{n,0}(W))_0 = \{X \in \mathfrak{g}_0, (\forall v \in \mathcal{O}(W, \mathcal{V}_1)/\forall m \in W, \widetilde{v}(m) \neq 0), \widetilde{\mathcal{B}}(\mu(X)v, v) > 0\}$$

On a le lemme suivant :

Lemme 3.2. *L'espace* $\mu^{-1}\left(\widehat{\Omega}(M, U^{\mathcal{V}}_{p,q})\right)$ *est ouvert.*

Démonstration: Comme $U^{\mathcal{V}}_{p,q}$ est ouvert, $\widehat{\Omega}(M, U^{\mathcal{V}}_{p,q}) = \mathcal{O}(\widehat{M}, U^{\mathcal{V}}_{p,q})$ est ouvert pour la topologie définie à la section **2.1.9**. Or μ est continue donc $\mu^{-1}\left(\widehat{\Omega}(M, U^{\mathcal{V}}_{p,q})\right)$ est ouvert. ♢

Notation : On note $P_{\mathcal{B}}$ le polynôme sur $\mathcal{V}$ défini de la façon suivante.

Soit $(e'_1, \dots, e'_n, f'_1, \dots, f'_m)$ une base homogène de V telle que $(e'_1, \dots, e'_n)$ soit une base orthonormée orientée de V_0, et $(f'_1, \dots, f'_m)$ une base symplectique de V_1. On note $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_{2m})$ les coordonnées associées sur V. On pose :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}} &:= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j \mathcal{B}(e'_j, e'_i) + \sum_{1\leq i,j\leq m} \xi_i \xi_j \mathcal{B}(f'_j, f'_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \xi_{2j-1}\xi_{2j}. \end{aligned}$$

Soit B_0 la boule unité ouverte de $\mathcal{V}_0$ pour le produit scalaire $\mathcal{B}|_{\mathcal{V}_0}$. On pose $B = B_0 \times_M \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$. C'est un ouvert relativement compact de $\mathcal{V}$. On note h l'isomorphisme de supervariétés de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{V}$ défini de la façon suivante. D'une part, il induit l'identité sur M. D'autre part soit U un ouvert de trivialisation $\mathcal{V}|_U \simeq U \times V$, soient $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m)$ un système de coordonnées sur V, on pose pour tout j, $h^*\xi_j = \frac{\xi_j}{\sqrt{1-P_{\mathcal{B}}}}$ et pour tout i, $h^*(x_i) = \frac{x_i}{\sqrt{1-P_{\mathcal{B}}}}$.

Considérons maintenant une fonction ψ sur $\mathcal{V}$ à décroissance rapide sur les fibres. Alors $h^*\psi$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur B que l'on peut étendre par la fonction nulle en une fonction $\mathcal{C}^\infty$, notée encore $h^*\psi$, sur $\mathcal{V}$ qui est alors à support compact. Plus précisément, au dessus d'un ouvert de trivialisation U, on a :

$$h^*\psi = \sum_I a_I(x_1, \dots, x_n)\xi^I,$$

où les a_I sont des fonction $\mathcal{C}^\infty$ en les x_i à coefficients dans les fonctions sur U. Comme ψ est à décroissance rapide, les a_I ainsi que toutes leurs dérivées en les x_i tendent vers 0 au voisinage de la sphère unité de V_0. On peut donc les étendre en des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur V_0 nulles sur $V \setminus B_0$. La fonction $h^*\psi$ définie localement à l'aide des a_I ainsi étendus est bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{V}$ à support compact.

On pose alors :

$$\theta' = h^*T\Big(\exp(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))\Big),$$

et

$$\theta = \frac{\theta'}{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^n (2\pi)^{\frac{n}{2}+m}}.$$

Proposition 3.2. *On suppose :*

(∗) $\widetilde{\sigma^* \circ \tau}(\mathbb{A}^2)$ *négative.*

(∗∗) *Il existe un recouvrement de M par des ouverts W tels que $U_{m,0}(W) \neq \emptyset$.*

La forme équivariante θ, définie ci-dessus, est intégrable le long des fibres et définit une forme de Thom sur $\mathfrak{g}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \bigcup_{p+q=m} U_{p,q}$.

Démonstration: Au support compact près, il suffit de vérifier que la forme $T\Big(\exp(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))\Big)$ a les bonnes propriétés. On sait déjà que c'est une forme équivariante fermée, il suffit donc de vérifier que $T\Big(\exp(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))\Big)$ est intégrable le long des fibres, et de calculer son intégrale. On note $\mathcal{B}$ le superproduit scalaire sur les fibres et (n, m) la dimension des fibres. On se place au dessus d'un ouvert de trivialisation W de $\mathcal{V}$. On a alors $\pi^{-1}(W) \simeq W \times V$, où V est une fibre générique de $\mathcal{V}$. On peut de plus supposer comme précédemment que la superstructure euclidienne sur les fibres est constante.

On désigne à présent par ϵ la “section” tautologique du fibré $\pi^*(\Pi\mathcal{V})$ au dessus de $\mathcal{V}$. C'est une fonction sur le fibré $\pi^*(\Pi\mathcal{V})$. Soit $\epsilon^* = \sigma^*\epsilon$ la section $-\Pi\mathcal{B}(\epsilon, .)$ de $\pi^*(\Pi\mathcal{V}^*)$. On note $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m)$ la base de ΠV déduite par changement de parité ($e_i = \bar{\pi}e'_i$ et $f_j = \bar{\pi}f'_j$), et $(e_1^*, \dots, e_n^*, f_1^*, \dots, f_m^*)$ la base duale de $(\Pi\mathcal{V})^*$. On a donc en coordonnées :

$$\begin{aligned}\epsilon^* &= -\sum_{1\le i,j\le n} \mathcal{B}(e'_i, e'_j) x_i e_j^* + \sum_{1\le i,j\le m} \mathcal{B}(f'_i, f'_j)\xi_i f_j^* \\ &= -\sum_{i=j}^{n} x_i e_i^* + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \xi_{2j-1} f_{2j}^* - \xi_{2j} f_{2j-1}^*.\end{aligned}$$

Dans ce cas $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}} = d_{\mathfrak{g}} + \omega$, et $F_{\mathfrak{g}} = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] + i\mu$ où ω est une forme pseudo-différentielle impaire $\mathfrak{g}$-invariante sur U à valeurs dans $\mathfrak{osp}(V)$ et μ est le moment équivariant (c'est un élément de $\Omega_G(\mathfrak{g}, (M, \mathfrak{osp}(\mathcal{V}))))$. Comme $\mathfrak{osp}(V) = \mathfrak{osp}(\Pi V)$,

ω est également une forme pseudodifférentielle à valeurs dans $\mathfrak{osp}(\Pi V)$. On note ω^* la forme à valeurs dans $\mathfrak{osp}(\Pi V^*)$ telle que pour tout vecteur $v \in V$ on ait $\omega^*(\sigma^* v) = \sigma^*(\omega v)$. On a alors :

$$\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}) = -\frac{1}{2}P_{\mathcal{B}} + id_{\mathfrak{g}}\epsilon^* + i\omega^*\epsilon^* + i\sigma^* \circ \tau(\mu) + \sigma^* \circ \tau(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]).$$

On pose en coordonnées :

$$\omega^*\epsilon^* = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x, \xi)e_i^* + \sum_{j=1}^{m} \omega_j'(x, \xi)f_j^*,$$

où les ω_i et les ω_j' sont linéaires en les x_i et les ξ_j et à coefficients dans les formes pseudodifférentielles sur M. Et en posant $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$, on obtient (cf. section **II.1**) :

$$\begin{aligned} 2\sigma^* \circ \tau(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = &\sum_{i<j} \mathcal{B}(\Omega e_i', e_j)e_i^* e_j^* + \sum_{i,k} \mathcal{B}(\Omega e_i', f_k')e_i^* f_k^* \\ &+ \sum_{k<l} \mathcal{B}(\Omega f_k', f_l')f_k^* f_l^* + \frac{1}{2}\sum_k \mathcal{B}(\Omega f_k', f_k')f_k^{*2}, \end{aligned}$$

On a alors pour $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})(X) = &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \xi_{2j-1}\xi_{2j} + i\Big(-\sum_{i=j}^{n} dx_i e_i^* + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} d\xi_{2j-1}f_{2j}^* - d\xi_{2j}f_{2j-1}^*\Big) \\ &+ i\Big(\sum_i \omega_i(x, \xi)e_i^* + \sum_{j=1}^{m} \omega_j'(x, \xi)f_j^*\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\sum_{i<j} \mathcal{B}((\Omega + i\mu(X))e_i', e_j')e_i^* e_j^* + \sum_{i,k} \mathcal{B}((\Omega + i\mu(X))e_i', f_k')e_i^* f_k^* \\ &+ \sum_{k<l} \mathcal{B}((\Omega + i\mu(X))f_k', f_l')f_k^* f_l^* + \frac{1}{2}\sum_k \mathcal{B}(((\Omega + i\mu(X))f_k', f_k')f_k^{*2}\Big). \end{aligned}$$

On écrit alors $\exp\Big(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})\Big)(X)$ à l'aide de la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}\exp\Big(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})\Big)(X) =& P(X,\xi_j,dx_i,e_i^*,f_k^*,\omega_i)\\ &\exp\Bigg(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + i\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}}\Big((d\xi_{2j-1}+\omega'_{2j}(x,\xi))f_{2j}^*\\ &\qquad - (d\xi_{2j}+\omega'_{2j-1}(x,\xi))f_{2j-1}^*\Big)\\ &+\Big(\sum_{k<l}\mathcal{B}((\Omega+i\mu(X))f'_k,f'_l)f_k^*f_l^*\\ &\qquad +\frac{1}{2}\sum_k\mathcal{B}((\Omega+i\mu(X))f'_k,f'_k)f_k^{*2}\Big)\Bigg),\end{aligned}$$

où P est un polynôme à coefficients dans les formes pseudodifférentielles sur M qui est linéaire en chacun des f_k. L'intégration T consiste à intégrer par rapport aux e_i^* et aux f_k^*.

Vérifions que $T(\exp\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))$ définit une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$. Soit ϕ une fonction à support compact sur $\mathfrak{g}$, il faut vérifier que l'intégrale le long des fibres de $\pi^*\Pi\mathcal{V}$ de $\int_{\mathfrak{g}}\exp(\sigma^*\omega_{\mathcal{V}})\phi D$ (où D est une forme volume de type $(0,1)$ sur $\mathfrak{g}$) converge. Il nous faut de plus vérifier que le résultat de cette dernière intégration est à valeurs dans les formes intégrables sur les fibres de $\mathcal{V}$. On ne change pas le problème en supposant que $V = V_1$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$. On est alors amené à étudier la dépendance en f_j^* d'une intégrale de la forme :

$$\int_{\mathfrak{g}}\exp\frac{1}{2}\Big(\sum_{k<l}\mathcal{B}(i\mu(X)f'_k,f'_l)f_k^*f_l^* + \frac{1}{2}\sum_k\mathcal{B}(i\mu(X)f'_k,f'_k)f_k^{*2}\Big)\phi(X)dX$$

où ϕ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathfrak{g}$ (chaque monôme en X provenant de P pouvant être inclus dans ϕ), dX une mesure sur $\mathfrak{g}$, et μ est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_{\mathcal{A}}$. L'intégration sur $\mathfrak{g}_1$ fait apparaître des termes polynomiaux en les f_j^* multipliés par une intégrale sur $\mathfrak{g}_0$ du type :

$$\int_{\mathfrak{g}_0}\exp\frac{i}{2}\Big(\sum_{k<l}\mathcal{B}(\mu(X)f'_k,f'_l)f_k^*f_l^* + \frac{1}{2}\sum_k\mathcal{B}(\mu(X)f'_k,f'_k)f_k^{*2})\Big)\phi(X)dX.$$

(Ce n'est pas le même ϕ.)

L'hypothèse $(**)$ assure que $\mu^{-1}(U_{(m,0)})_0$ est non vide. Comme $\mu^{-1}(U_{(m,0)})_0$ est ouvert, il existe une base $(E_1,\dots,E_r)$ de $\mathfrak{g}_0$ constituée d'éléments de $\mu^{-1}(U_{(m,0)})_0$. Soit $(y_1,\dots,y_r)$ sa base duale. On a $\mu = \sum_{i=1}^{r}\mu(E_i)y_i$. On note $\widehat{\phi}$ la transformée de

Fourier de ϕ. Alors on a :

$$\int_{\mathfrak{g}_0} \exp \frac{i}{4}\Big(\sum_{1\leq k,l\leq m} \mathcal{B}(\mu(X)f'_k, f'_l)f^*_k f^*_l \Big)\phi(X)dX =$$
$$\widehat{\phi}(-\frac{1}{4}\sum_{1\leq k,l\leq m} \mathcal{B}(\mu(E_1)f'_k, f'_l)f^*_k f^*_l, \dots, -\frac{1}{4}\sum_{1\leq k,l\leq m} \mathcal{B}(\mu(E_1)f'_k, f'_l)f^*_k f^*_l).$$

Or $\widehat{\phi}$ est à décroissance rapide et comme E_i sont dans $\mu^{-1}(U_{(0,m)})_0$ les formes quadratiques $-\frac{1}{4}\sum\limits_{1\leq k,l\leq m} \mathcal{B}(\mu(E_1)f'_k, f'_l)f^*_k f^*_l$ sont définies négatives. L'intégrale est donc à décroissance rapide en les variables f^*_j.

Revenons maintenant au problème général. L'hypothèse $(*)$ assure que comme $\widetilde{\sigma^* \circ \tau}(\Omega)$ est supposée négative, on a :

$$\exp\Big(\sum_{k<l} \widetilde{\mathcal{B}}(\widetilde{\Omega} f'_k, f'_l)f^*_k f^*_l + \frac{1}{2}\sum_{k} \widetilde{\mathcal{B}}(\widetilde{\Omega} f'_k, f'_k)f^{*2}_k\Big)$$

est une fonction bornée en les f^*_j. Donc,

$$\exp\Big(\sum_{k<l} \mathcal{B}(\Omega f'_k, f'_l)f^*_k f^*_l + \frac{1}{2}\sum_{k} \mathcal{B}(\Omega f'_k, f'_k)f^{*2}_k\Big)$$

est à croissance au plus polynomiale en les f^*_j. Enfin, il en est clairement de même pour

$$\exp(i\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \Big((d\xi_{2j-1} + \omega'_{2j}(x,\xi))f^*_{2j} - (d\xi_{2j} + \omega'_{2j-1}(x,\xi))f^*_{2j-1}\Big)).$$

Finalement, $\int_{\mathfrak{g}} \exp(\sigma^*\omega_{\mathcal{V}})\phi D$ est à décroissance rapide en les f^*_j et donc intégrable. Ainsi, $T(\exp(\sigma^*\omega_{\mathcal{V}}))$ définit bien une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans les formes pseudodifférentielles sur $\mathcal{V}$.

Il nous faut maintenant considérer la dépendance en les $d\xi_j$ de cette fonction généralisée. Les $d\xi_j$ n'apparaissent dans $\omega_{\mathcal{V}}$ que dans la somme $\sum\limits_{j=1}^{\frac{m}{2}} d\xi_{2j-1}f^*_{2j} - d\xi_{2j}f^*_{2j-1}$. On pose :

$$\exp(i\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})) = \exp(-i\sum_{i=j}^{n} dx_i e^*_i + i\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} d\xi_{2j-1}f^*_{2j} - d\xi_{2j}f^*_{2j-1})\psi.$$

où $\psi \in \mathcal{O}(\mathfrak{g} \times \pi^*\Pi\mathcal{V})$. Or

$$T(\exp(i\sigma^*\omega_{\mathcal{V}})) =$$
$$\int_{\Pi V} \exp(-i\sum_{i=j}^{n} dx_i e_i^* + i\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} d\xi_{2j-1} f_{2j}^* - d\xi_{2j} f_{2j-1}^*)\psi D(e_1^*, \ldots, e_n^*, f_1^*, \ldots, f_n^*)$$

est égale à $\widehat{\psi}(dx_1, \ldots, dx_n, d\xi_2, -d\xi_1, \ldots, d\xi_m, -d\xi_{m-1})$ où $\widehat{\psi}$ est la transformée de fourier de ψ. C'est donc une fonction à décroissance rapide en les $d\xi_j$. C'est-à-dire que pour toute fonction ϕ, $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur $\mathfrak{g}$, si D est une forme volume sur $\mathfrak{g}$, la fonction $T(\int_{\mathfrak{g}} \exp(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}}))\phi D)$ est une fonction à décroissance rapide en les $d\xi_j$.

D'autre part, le terme $\exp(-\sum_i x_i^2)$ peut se mettre en facteur et sortir de l'intégrale qui ne dépend alors plus des x_i que par $\exp(i\sum_j \omega'_j(x,\xi)f_j^*)$ et des termes polynomiaux provenant de P (les ω_j étant linéaires en les x_i). La fonction généralisée $T(\exp(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})))$ est donc à valeurs dans les formes pseudodifférentielles dont les coefficients sont à décroissance rapide sur les fibres de $\mathcal{V}$. Le fait d'appliquer h^* permet de la rendre à support compact sur ces mêmes fibres. Ainsi $h^*T(\exp(\sigma^*(\omega_{\mathcal{V}})))$ est une forme équivariante intégrable à coefficients généralisés.

Pour vérifier que cela définit à une constante près une forme de Thom sur $\mathcal{V}$, il faut maintenant vérifier que son intégrale est une fonction généralisée constante sur $\mathfrak{g}$.

Pour calculer l'intégrale, il faut exhiber le terme de plus haut degré en les variables impaires c'est-à-dire les dx_i et les ξ_j.

Tout d'abord, on remarque que les dx_i proviennent exclusivement de la somme $\sum_i dx_i e_i^*$. Par conséquent le terme de degré maximal en les dx_i l'est aussi en les e_i^* et tous les autres termes contenant des e_i^* ne participent pas à l'intégrale. En particulier les termes de P provenant de $\exp(\sum_{i,k} \mathcal{B}((\omega + i\mu(X))e'_i, f'_k)e_i^* f_k^*)$ ne participent pas à l'intégrale.

D'autre part les termes $\omega'_j(x,\xi)f_j^* = (\omega'_j(x,0) + \omega'_j(0,\xi))f_j^*$ font apparaître $\exp(\sum_j \omega'_j(0,\xi)f_j^*) = \prod_j (1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\omega'_j(0,\xi)^k}{k!}(f_j^*))^k$. On pose :

$$\psi' = \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2 + i\sum_{j=1}^{m} \omega'_j(x,0))f_j^* + \frac{1}{4}\sum_{1\leq k,l\leq m} \mathcal{B}((\Omega + i\mu(X))f'_k, f'_l)f_k^* f_l^*\Big)$$

Or on a :

$$\int_{\Pi V}(f_{2j}^*)\exp(-i\sum_{i=j}^{n}dx_ie_i^* + i\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}}d\xi_{2j-1}f_{2j}^* - d\xi_{2j}f_{2j-1}^*)$$
$$\psi' D(e_1^*,\ldots,e_n^*,f_1^*,\ldots,f_n^*) =$$
$$\frac{i\partial}{\partial(d\xi_{2j-1})}\int_{\Pi V}\exp(-i\sum_{i=j}^{n}dx_ie_i^* + i\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}}d\xi_{2j-1}f_{2j}^* - d\xi_{2j}f_{2j-1}^*)$$
$$\psi' D(e_1^*,\ldots,e_n^*,f_1^*,\ldots,f_n^*).$$

Plus succinctement :

$$\Big(\widehat{(f_{2j}^*)\psi'}\Big)(dx_1,\ldots,dx_n,d\xi_2,-d\xi_1,\ldots,d\xi_m,-d\xi_{m-1}) =$$
$$\frac{i\partial}{\partial(d\xi_{2j-1})}\widehat{\psi}'(dx_1,\ldots,dx_n,d\xi_2,-d\xi_1,\ldots,d\xi_m,-d\xi_{m-1}).$$

De même on a :

$$\Big(\widehat{(f_{2j-1}^*)\psi'}\Big)(dx_1,\ldots,dx_n,d\xi_2,-d\xi_1,\ldots,d\xi_m,-d\xi_{m-1}) =$$
$$\frac{-i\partial}{\partial(d\xi_{2j})}\widehat{\psi}'(dx_1,\ldots,dx_n,d\xi_2,-d\xi_1,\ldots,d\xi_m,-d\xi_{m-1}).$$

On pose

$$P(X,\xi_j,dx_i,e_i^*,f_k^*,\omega_i(x,\xi))\prod_j(1+\sum_k\frac{\omega_j'(0,\xi)^k}{k!}(f_j^*)^k)$$
$$= Q_0(X,\xi_j,dx_i,e_i^*,\omega_i(x,\xi)) + Q_1(X,\xi_j,dx_i,e_i^*,f_k^*,\omega_i(x,\xi)),$$

où Q_0 ne dépend pas des f_j^* et Q_1 s'annule pour $f_1^* = \cdots = f_m^* = 0$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^m} T\Bigg(Q_1(X,\xi_j,dx_i,e_i^*,f_k^*,\omega_i(x,\xi))$$
$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2 + i\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}}\Big((d\xi_{2j-1}+\omega_{2j}'(x,0))f_{2j}^* - (d\xi_{2j}+\omega_{2j-1}'(x,0))f_{2j-1}^*\Big)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{1\le k,l\le m}\mathcal{B}((\Omega+i\mu(X))f_k',f_l')f_k^*f_l^*\Big)\Bigg)df_1^*\ldots df_m^* = 0.$$

On a donc à calculer l'intégrale le long des fibres de $\mathcal{V}$ de :

$$T\Bigg(Q_0(X, \xi_j, dx_i, e_i^*, f_k^*, \omega_i(x,\xi)) \\ \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2 + i\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}}\Big((d\xi_{2j-1} + \omega'_{2j}(x,0))f_{2j}^* - (d\xi_{2j} + \omega'_{2j-1}(x,0))f_{2j-1}^*\Big) \\ + \frac{1}{4}\sum_{1\leq k,l\leq m}\mathcal{B}((\Omega + i\mu(X))f'_k, f'_l)f_k^* f_l^*\Big)\Bigg).$$

Il faut exhiber dans Q_0 le terme de degré maximal en les variables e_i^*, dx_i et ξ_j. Il est égal à :

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^n \xi_1 \ldots \xi_m dx_1 \ldots dx_n e_1^* \ldots e_n^*.$$

On fait le changement de variables $u_{2j} = d\xi_{2j-1} + \omega'_{2j}(x,0)$ et $u_{2j-1} = -d\xi_{2j} + \omega'_{2j}(x,0)$ puis on intègre par rapport aux x_i. On obtient sur l'ouvert de coordonnées considéré (π est la projection de $\mathcal{V}$ sur M) :

$$\pi_*\theta' = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^n (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \exp\Big(i\sum_{j=1}^{m} u_j f_j^*\Big) \\ \exp\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{k<l}\mathcal{B}((\Omega + i\mu(X))f'_k, f'_l)f_k^* f_l^* \\ + \frac{1}{4}\sum_k \mathcal{B}((\Omega + i\mu(X))f'_k, f'_k)f_k^{*2}\Bigg) D(u_j, f_j^*),$$

où $D(u_j, f_j)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2m}$ par rapport aux variables u_j et f_j. (*Remarque :* lorsque n est pair, alors $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^n = 1$.) La formule d'inversion de Fourier nous donne alors :

$$\pi_*\theta' = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^n (2\pi)^{\frac{n}{2}+m}.$$

Par conséquent,

$$\theta = \frac{\theta'}{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^n (2\pi)^{\frac{n}{2}+m}},$$

est une forme de Thom sur $\mathfrak{g}$. De plus cette forme est $\mathcal{C}^\infty$ sur U. ◇

Remarque: Si $V = V_1$, les hypothèses impliquent que l'application moment μ est propre. Le fait que $\int_{\mathfrak{g}_0} \exp(\sigma^* \circ \tau)(X)\phi(X)$ définit, pour toute fonction ϕ $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathfrak{g}_1$, une fonction intégrable sur l'espace vectoriel V_1 est un cas particulier du Lemme 12 de [Ver97].

Exemple: Considérons le cas où M est réduite à un point, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{(0,2)}$ et $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X$ où

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note z l'élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $z(X) = 1$. On note (ξ, η) la base duale de la base canonique de $(\mathbb{R}^{(0,2)})^*$ et comme précédemment (f_1^*, f_2^*) la base de ΠV_1^* obtenue à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^{(0,2)}$. On a alors :

$$\sigma^*\omega_{\mathcal{V}} = \xi\eta + i(d\xi f_1^* - d\eta f_2^*) + \frac{i}{2}z\Big((f_1^*)^2 + (f_2^*)^2\Big).$$

Calculons explicitement θ sur l'ouvert U. On a

$$\begin{aligned}
\theta &= \int_{\Pi\mathbb{R}^{(0,2)}} \exp(\sigma^*\omega_{\mathcal{V}}) df_1^* df_2^* \\
&= (1+\xi\eta)\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i}{2}z\Big((f_1^* + \frac{d\xi}{z})^2 + (f_2^* - \frac{d\eta}{z})^2\Big) - \frac{i}{2}\Big(\frac{d\xi^2}{z} + \frac{d\eta^2}{z}\Big)\right) df_1^* df_2^* \\
&= \frac{2\pi}{iz}(1+\xi\eta)\exp\left(-\frac{i}{2}\Big(\frac{d\xi^2}{z} + \frac{d\eta^2}{z}\Big)\right).
\end{aligned}$$

Il apparaît que θ' n'est à décroissance rapide sur $\widehat{\mathbb{R}^{(0,2)}}$ uniquement en tant que fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$. C'est-à-dire que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact et nulle en 0 :

$$\int_{\mathbb{R}} \theta'(z)\phi(z)dz = \widehat{\left(z\phi\Big(\frac{1}{z}\Big)\right)}\Big(\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{2}\Big),$$

où $\widehat{\left(z\phi\big(\frac{1}{z}\big)\right)}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction $z \mapsto z\phi\big(\frac{1}{z}\big)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Comme ϕ est à support compact, cette intégrale est bien à décroissance rapide en $d\xi$ et $d\eta$.

3.2. Une relation entre classes de cohomologie. Soit G un supergroupe de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\pi : \mathcal{V} \mapsto M$ un superfibré vectoriel orienté équivariant. On suppose les hypothèses générales du début de la section vérifiées. En particulier, les hypothèses $(*)$ et $(**)$. Soit θ la forme de Thom définie précédemment.

Lemme 3.3. *Soit U un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. Soit θ la forme de Thom définie précédemment. Soit $\alpha \in \widehat{H}^\infty_{G,\int}(U, M)$, alors :*

$$\theta(\pi^*\alpha) \in \widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(U, \mathcal{V}).$$

Remarque: Le produit existe bien puisque α est supposée à coefficients $\mathcal{C}^\infty$.
Démonstration: Il faut montrer que ce produit définit bien une fonction généralisée à valeurs dans les formes intégrables. En fait il suffit de vérifier localement que l'on peut intégrer le long des fibres de $\mathcal{V} \to M$, puis, après intégration le long des fibres, de vérifier que la forme ainsi obtenue est bien intégrable sur M. Or le long des fibres $\pi^*(\alpha)$ est constante, donc l'intégrabilité provient simplement de celle de θ. On a alors $\pi_*(\theta\ \pi^*(\alpha)) = \pi_*(\theta)\alpha = \alpha$. La forme obtenue après intégration le long des fibres est donc α qui est intégrable par hypothèse. $\diamondsuit$

On peut maintenant énoncer le théorème :

Théorème 3.1. *Soit U un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. Soit $\alpha \in \widehat{\Omega}^{\infty}_{G,\int}(U,M)$, alors on a l'égalité suivante entre classes de cohomologie dans $\widehat{H}^{-\infty}_{G,\int}(U,M)$:*

$$\alpha \equiv \theta\pi^*(\pi_*\alpha).$$

Démonstration: La preuve de la situation paire (cf. [KV93]) peut être reprise ici. On considère le superfibré $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ au dessus de M. On note pour $t \in \mathbb{R}$, σ_t la transformation linéaire sur les fibres de $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ définie pour toutes sections x et y de $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ par :

$$\sigma_t(x,y) = \Big((\cos t)x + (\sin t)y, -(\sin t)x + (\cos t)y\Big).$$

On a l'identité pour $t = 0$ (i.e. $\sigma_0 = Id$), et pour $t = \frac{\pi}{2}$ on a l'application σ définie par $\sigma(x,y) = (y,-x)$. On pose :

$$S = \frac{d}{dt}\sigma_t.$$

Comme pour tout t, σ_t commute avec l'action de G, $\mathcal{L}(S)$ et $\iota(S)$ préservent $\widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}$. On a alors la relation (entre dérivations sur $\widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(\mathfrak{g}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{V})$) :

$$\mathcal{L}(S) = d_{\mathfrak{g}}\iota(S) + \iota(S)d_{\mathfrak{g}},$$

(S est un champ de vecteurs pair et donc $[\iota, \iota(S)] = \iota\iota(S) + \iota(S)\iota = 0$).

On définit une application $H : \widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(\mathfrak{g}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{V}) \to \widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(\mathfrak{g}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{V})$ en posant pour $\nu \in \widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(\mathfrak{g}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{V})$:

$$H\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_t^*(\iota(S)\nu)dt.$$

On obtient alors pour tout $\nu \in \widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(\mathfrak{g}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{V})$:

$$\sigma^*\nu - \nu = (d_{\mathfrak{g}}H - Hd_{\mathfrak{g}})\nu.$$

On note $p_i : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $i = 1$ (resp. 2), les projections sur le premier (resp. le second) facteur. Soit α une forme équivariante fermée intégrable sur $\mathcal{V}$. Alors (pour des raisons analogues à celles utilisées au lemme précédent) $(p_1^*\theta)(p_2^*\alpha)$ est un élément bien défini de $\widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(\mathfrak{g}, \mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$. C'est une forme fermée car α et θ sont fermées et donc, d'après la relation précédente, elle est dans la même classe de cohomologie que $\sigma^*((p_1^*\theta)(p_2^*\alpha))$. On note $\overline{\beta}$ la forme $\tau^*\beta$ où $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $v \mapsto -v$. On a alors $\sigma^*((p_1^*\theta)(p_2^*\alpha)) = (p_2^*\theta)(\ p_1^*\overline{\alpha})$. On intègre le long des fibres de p_2 ces deux formes équivalentes en cohomologie. On a $(|\pi_*| = |\theta| = n + m(mod 2))$:

$$\begin{aligned}
(p_2)_*(p_1^*\theta\ p_2^*\alpha) &= \pi^*(\pi_*\theta)\alpha, \\
(p_2)_*(p_2^*\theta p_1^*\overline{\alpha}) &= (-1)^{(n+m)|\theta|}\theta\pi^*(\pi_*\overline{\alpha}), \\
&= (-1)^{(n+m)(|\theta|+1)}\theta\pi^*(\pi_*\alpha), \\
&= \theta\pi^*(\pi_*\alpha).
\end{aligned}$$

On obtient l'égalité en cohomologie :

$$\theta\pi^*(\pi_*\alpha) \equiv \pi^*(\pi_*\theta)\alpha \equiv \pi^*(\pi_*\theta)\alpha = \alpha.$$

Ce qui est bien l'égalité cherchée. ◊

4. Superforme d'Euler équivariante

On reste sous les mêmes hypothèses et les mêmes notations que dans les deux paragraphes précédents.

DÉFINITION 4.1. *Soit G un supergroupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit M une G-supervariété. Soit $\mathcal{V}$ un superfibré vectoriel équivariant supereuclidien orienté au dessus de M, toutes ces structures étant G-invariantes. Soit j l'injection de M dans $\mathcal{V}$ à l'aide de la section nulle. Soit θ une forme de Thom équivariante sur $\mathcal{V}$. On appelle superforme d'Euler (équivariante) de $\mathcal{V}$ la forme équivariante sur M :*

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{g}} = j^*\theta.$$

Soit $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ une superconnexion équivariante sur $\mathcal{V}$, et $F_{\mathfrak{g}} = \mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^2 + \mathcal{L}^{\mathcal{V}} = \mathbb{A}^2 + i\mu$ sa courbure équivariante. Cette dernière est une forme équivariante à valeurs dans $\mathfrak{osp}(\mathcal{V})$. On garde pour σ^* et τ les mêmes significations qu'aux sections précédentes. On suppose que $\widetilde{\sigma^* \circ \tau}(\mathbb{A}^2)$ est négative sur $(\Pi\mathcal{V}^*)_0$ (c'est l'hypothèse $(*)$). L'hypothèse $(**)$ assure alors que l'expression $Spf(-iF_{\mathfrak{g}})$ a un sens.

PROPOSITION 4.1. *On a l'égalité suivante entre classes de cohomologie :*

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{g}} \equiv (2\pi)^{\frac{n+m}{2}} Spf(-iF_{\mathfrak{g}}),$$

où (n, m) est la dimension des fibres de $\mathcal{V}$.

Démonstration: Il suffit de montrer que c'est une égalité pour la forme d'Euler particulière obtenue à partir de la forme de Thom construite plus haut. L'égalité provient de :

$$\begin{aligned} j^*\theta' = j^*\Big(T(\sigma^*(\omega^{\mathcal{V}}))\Big) &= T\Big(\exp(\sigma^* \circ \tau(F_{\mathfrak{g}}))\Big) \\ &= (2\pi)^{\frac{m}{2}} Spf(-iF_{\mathfrak{g}}) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} Spf(-iF_{\mathfrak{g}}), \end{aligned}$$

et de ce que si n est impair, $Spf(-iF_{\mathfrak{g}})$ est nul et si n est pair, $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^n = 1$. $\diamondsuit$

5. Premières formules de localisation

5.1. Cas linéaire. Soit G un supergroupe de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et V un superespace vectoriel de dimension (n, m) muni d'une représentation de G (notée μ). On suppose que V est globalement orienté et muni d'une structure euclidienne G-invariante, notée $\mathcal{B}$. En particulier m est pair. On utilise la forme de Thom pour calculer l'intégrale d'une forme équivariante fermée intégrable sur V. On note U l'ouvert des éléments de $\mathfrak{g}$ inversibles pour la représentation μ. On suppose que U est non vide ce qui implique en particulier que n est pair.

PROPOSITION 5.1. *Soit $\alpha \in \widehat{\Omega}^{\infty}_{G,\int}(U, V)$ une forme pseudodifférentielle fermée sur V. On note j l'injection canonique de $\{0\}$ dans V. On a la formule :*

$$\int_V \alpha = (2\pi)^{\frac{n+m}{2}} \frac{(j^*\alpha)}{Spf \circ \mu} \in \mathcal{C}^{\infty}(U)$$

Démonstration: D'après le théorème **II.3.1** la classe de α dans $\widehat{H}^{\infty}_{G,\int}(U, V)$ est égale à celle de $\theta(\int_V \alpha)$ où θ est une superforme de Thom équivariante sur V (θ est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur U). Sur U, la fonction $Spf \circ \mu$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ et inversible.

Il suffit donc de calculer $j^*\theta$. Reprenons les notations de la section **IV.3** en remplaçant $\mathcal{V}$ par V et en remarquant que dans ce cas, on peut prendre $\mathbb{A} = d$ et donc $\omega = \Omega = 0$. Le moment équivariant est la représentation μ de $\mathfrak{g}$ dans V ($\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{osp}(V)$) et $-iF_{\mathfrak{g}} = \mu$. On obtient :

$$j^*\theta' = j^*\Big(T(\sigma(\omega^V))\Big) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} Spf \circ \mu.$$

D'où la formule annoncée $\diamondsuit$

5.2. Cas fibré. On peut généraliser la formule précédente au cas d'un superfibré supereuclidien orienté G-équivariant. Avec les notations de la section **IV.3**, on note μ le moment équivariant de l'action de G sur $\mathcal{V}$ et $U^{\mathcal{V}}$ l'ouvert des éléments inversibles de $\mathfrak{osp}(\mathcal{V},\mathcal{B})$. On obtient :

Proposition 5.2. *Soit G un supergroupe et M une supervariété. Soit $\mathcal{V}$ un superfibré euclidien orienté G-équivariant de base M. On suppose également donnée une superconnexion vérifiant la condition $(*)$. On fait l'hypothèse que l'ouvert $U = \mu^{-1}(\widehat{\Omega}(M, U^{\mathcal{V}} \cap U^{\mathcal{V}}_{0,m}))$ est non vide, ce qui implique la condition $(**)$. On suppose également donnée une superconnexion vérifiant la condition $(*)$. (cf. Proposition 3.2 section **IV.3** pour les conditions $(*)$ et $(**)$.)*

Soit $\alpha \in \widehat{\Omega}^{\infty}_{G,\int}(U)$ une forme équivariante intégrable à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ définie sur U. On note j l'injection de M dans $\mathcal{V}$ à l'aide de la section nulle, et $\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}$ une forme d'Euler équivariante associée. Alors on a la formule :

$$\int_{\mathcal{V}} \alpha = \int_M \frac{j^*\alpha}{\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}}.$$

(Sur U, $\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et inversible.)

Démonstration: Exactement la même que dans le cas où M est réduite à un point. ♢

6. Inversion de la superforme d'Euler pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$

Pour étendre la validité des formules de localisation précédentes à $\mathfrak{g}$ tout entier (et non plus seulement sur l'ouvert des éléments inversibles), il faut avoir une fonction généralisée qui soit un inverse du superpfaffien (resp. de la forme d'Euler équivariante) sur $\mathfrak{g}$. Dans cette section on construit un tel inverse sur certaines sous algèbres de Lie de $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$, où V est un superespace vectoriel et $\mathcal{B}$ un superproduit scalaire sur V. On s'attachera ultérieurement à étendre cette construction à $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})$.

Soit V ($dim(V) = (n,m)$) un superespace vectoriel muni d'un superproduit scalaire que l'on note $\mathcal{B}$. Comme V_1 a une forme symplectique m est pair. On suppose que V est orienté. Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$ une algèbre de Lie. On suppose que $\mathfrak{g}$ vérifie la condition $(**)$, c'est-à-dire que l'intersection de $\mathfrak{g}$ et de l'ouvert $U_{(m,0)}$ de $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$ est non vide (l'ouvert $U_{(m,0)}$ a été défini à la section **III.1**) de sorte que la restriction du superpfaffien à $\mathfrak{g}$ existe. On suppose qu'il existe des éléments dans $\mathfrak{g}_0$ tels que leur action sur V_0 soit inversible (sinon le superpfaffien est identiquement nul sur $\mathfrak{g}$). Cette condition implique que n est pair.

On construit sur $\mathfrak{g}$ une fonction généralisée $\mathcal{I}Spf$ qui est un inverse du superpfaffien dans le sens suivant. Le produit de fonctions généralisées $Spf.\mathcal{I}Spf$ existe et est égal comme fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$ à la fonction identiquement égale à 1.

On considère $\mathcal{B}$ comme une superstructure euclidienne constante sur V. On note β la forme équivariante sur V (pour l'action canonique de G) définie par l'élément suivant de $\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0^* \otimes \widehat{\Omega}(V)$ restreint à $\mathfrak{g}$

$$X \mapsto \mathcal{B}(X_V, .).$$

La forme équivariante $\iota\beta$ est définie par l'élément suivant de $S^2(\mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0^*)$ restreint à $\mathfrak{g}$:

$$X \mapsto \mathcal{B}(X_V, X_V).$$

C'est une forme équivariante à valeurs dans les fonctions sur V.

Proposition 6.1. *Soit V un superespace vectoriel symplectique orienté muni d'une superstructure euclidienne $\mathcal{B}$. Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$ une algèbre de Lie telle que $\mathfrak{g} \cap U_{m,0} \neq \emptyset$ et telle qu'il existe dans $\mathfrak{g}$ des éléments tels que leur restriction à V_0 soit inversible.*

Le superproduit scalaire sur V ($dim(V) = (n,m)$) et son orientation déterminent une forme volume canonique D sur V. L'intégrale

$$\int_V \exp(-\iota\beta) Spf D$$

définit une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$. C'est-à-dire que pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ϕ sur $\mathfrak{g}$ et toute densité $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathfrak{g}$ l'intégrale suivante sur V converge :

$$\int_V < Spf, \exp(-\iota\beta)\phi D' > D,$$

où $< .,. >$ désigne la dualité entre les fonctions généralisées et les densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathfrak{g}$.

Soit U l'ouvert des éléments inversibles de $\mathfrak{g}$ (pour la représentation standard de $\mathfrak{g}$ sur V définie par l'inclusion $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(V,\mathcal{B})_0$). Sur U, on a :

$$\int_V \exp(-\iota\beta) Spf D = (-\pi)^{\frac{m}{2}} 2^{\frac{m}{2}} Spf^{-1}.$$

Démonstration: Montrons tout d'abord que cela définit une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$. Il s'agit de montrer que si ϕ est une fonction à support compact sur $\mathfrak{g}$ et D' une densité $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathfrak{g}$,

$$\int_{\mathfrak{g}} \exp(-\iota\beta) Spf \phi D'$$

est intégrable sur V. Comme Spf est une fonction généralisée il faut faire attention à ce que signifie l'intégrale ci-dessus. On note $< .,. >$ la dualité entre les fonctions généralisées et les densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathfrak{g}$. Alors on a par définition :

$$\int_{\mathfrak{g}} \exp(-\iota\beta) Spf \phi D' =< Spf, \exp(-\iota\beta)\phi D' > .$$

On a :

$$\exp(-\iota\beta) = \exp(-\iota\beta|_{V_0}) \exp(-\iota\beta|_{V_1}).$$

De plus $\iota\beta|_{V_0}$ est constante sur $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{sp}(V_1)$ et $\iota\beta|_{V_1}$ est constante sur $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}(V_0)$. De même, on a :

$$Spf|_{\mathfrak{g}} = Spf|_{\mathfrak{g}\cap\mathfrak{so}(V_0)}.Spf|_{\mathfrak{g}\cap\mathfrak{sp}(V_1)}.$$

On peut donc se contenter de considérer les cas où $V = V_0$ et $V = V_1$.

Supposons dans un premier temps que $V = V_0$. Alors $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(V_0)$ et contient des éléments inversibles pour la représentation standard sur V_0.

A présent, comme $\mathcal{B}|_{V_0}$ est un produit scalaire, d'une part on pose $(v, w) = \mathcal{B}(v, w)$, pour $v, w \in V_0$.

Soit $\mathcal{S}$ la sphère unité de V_0 et $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels strictement positifs. On a un isomorphisme de variétés

$$\begin{aligned} \psi : V_0 \setminus \{0\} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \\ v &\longmapsto (\rho, y) = \left(\sqrt{(v,v)}, \frac{v}{\sqrt{(v,v)}} \right). \end{aligned}$$

On a alors si $\psi(v) = (\rho, y)$:

$$(Xv, Xv) = \rho^2 (Xy, Xy).$$

Il existe une mesure dy sur $\mathcal{S}$ telle que $dx_1 \ldots dx_n = \rho^{n-1} d\rho dy$ où dv est une mesure sur V, $d\rho$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ et $n = dim(V)$.

On est donc amené à étudier le comportement en ρ indépendamment de y de :

$$\rho^{n-1} \int_{\mathfrak{g}} \exp(-\rho^2 (Xy, Xy)) Spf \phi dX.$$

On fixe maintenant $y_0 \in \mathcal{S}$, et on travaille au voisinage de y_0. Soit $\mathfrak{g}^0$ le noyau dans $\mathfrak{g}$ de

$$X \mapsto X.y_0,$$

et $\mathfrak{g}^1$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}^0$ dans $\mathfrak{g}$. On a $dim(\mathfrak{g}^1) = 1$. On suppose que pour tout X non nul dans $\mathfrak{g}^1$ l'action de X sur V est inversible. Il est toujours possible de choisir un tel $\mathfrak{g}^1$ puisqu'il existe dans $\mathfrak{g}$ des éléments dont l'action sur V_0 (ici

$V = V_0$) est inversible. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$ on pose $X = X^0 + X^1$ avec $X^i \in \mathfrak{g}^i$. On a alors :

$$(Xy, Xy) = (X^0y, X^0y) + 2(X^0y, X^1y) + (X^1y, X^1y).$$

On pose

$$f_{X^0}(X^1, y) = 2(X^0y, X^1y) + (X^1y, X^1y).$$

On a alors :

$$\int_{\mathfrak{g}} \exp\Big(-(Xv, Xv)\Big)Spf(X)\phi(X)dX = \int_{\mathfrak{g}^0} \exp\Big(-\rho^2(X^0y, X^0y)\Big)$$
$$\Big(\int_{\mathfrak{g}^1} \exp\Big(-\rho^2 f_{X^0}(X^1, y)\Big)Spf(X^0)X^1)\phi(X^0 + X^1)dX^1\Big)dX^0.$$

Pour tout X dans $\mathfrak{g}^1$, on identifie $\mathfrak{g}^1$ avec l'espace tangent à $\mathfrak{g}^1$ en X. On note d_1 la différentielle le long de $\mathfrak{g}^1$. On a pour X^0 dans $\mathfrak{g}^0$, X^1, Ξ dans $\mathfrak{g}^1$ et y dans $\mathcal{S}$:

$$d_1 f_{X^0}(X^1, y)(\Xi) = 2\Big((X^0y, \Xi y) + (X^1y, \Xi y)\Big).$$

On a donc $d_1 f_{X^0}(0, y_0) = 0$.

On note H_{X^0} la Hessienne par rapport à la variable X^1 de f_{X^0}. On a alors pour Ξ, H dans $\mathfrak{g}^1$:

$$H_{X^0}(X^1, y)(\Xi, \mathrm{H}) = 2(\Xi y, \mathrm{H}y).$$

Elle est donc inversible en $(0, y_0)$. Le théorème de la fonction implicite assure qu'il existe au voisinage de y_0 une solution de l'équation $d_1 f_{X^0}(X^1, y) = 0$ vérifiant $X^1(0) = 0$ que l'on note $X^1(y)$ ($X^1(y)$ dépend de X^0).

On a les égalités :

$$f_{X_0}(X^1(y), y) = 2(X^1(y)y, X^0y) + (X^1(y)y, X^1(y)y) = (X^0y, X^1(y)y),$$

$$H_{X_0}(X^1(y), y)(X^1 - X^1(y), X^1 - X^1(y)) = 2\Big((X^1 - X^1(y))y, (X^1 - X^1(y))y\Big),$$

et

$$X^1(y)y = -X^0y.$$

On en déduit :

$$f_{X_0}(X^1, y) = f_{X_0}(X^1(y), y) + H_{X_0}(X^1(y), y)(X^1 - X^1(y), X^1 - X^1(y)).$$

De plus, comme $y \in V_0$, l'égalité $(X^1(Y) + X^0)y = 0$ implique $p(X^1(Y) + X^0)y = 0$ et donc $Spf\Big(p(X^0) + X^1(y)\Big) = 0$.

De plus, Spf (qui est ici simplement le pfaffien sur $\mathfrak{so}(V_0)$ associé à l'orientation choisie sur V multiplié par $i^{\frac{n}{2}}$) est un polynôme homogène de degré $\frac{n}{2}$ sur $\mathfrak{g}$, et comme les éléments non nuls de $\mathfrak{g}^1$ sont inversibles, sa restriction à $\mathfrak{g}^1$ également.

Le théorème **7.7.6** de [Hör83] nous assure alors qu'il existe une fonction $C_{X^0,\phi}$ de X^0 (dépendant de ϕ) telle que sur un voisinage W de y_0 dans $\mathcal{S}$:

$$\left| \int_{\mathfrak{g}^1} \exp\Big(-\rho^2 f_{X^0}(X^1, y)\Big) Spf(X^0 + X^1)\phi(X^0 + X^1) dX^1 \right| \leq \frac{C_{X^0,\psi_l}}{\rho^{n+1}}.$$

Soit K un compact de $\mathfrak{g}^0$ tel que $\psi_l(X^0, X^1, y) \equiv 0$ pour $X^0 \notin K$. Alors $C_{X^0,\phi}$ est nulle pour $X^0 \notin K$ et on a :

$$\left|\rho^{n-1} \int_{\mathfrak{g}} \exp(-\rho^2(Xy, Xy)) Spf(X)\phi(X) dX\right| \leq \frac{1}{\rho^2} \int_{\mathfrak{g}^0} C_{X^0,\phi} dX^0.$$

Or le membre de droite est une fonction intégrable en ρ et cela indépendamment de y dans W. Or ceci peut être fait au voisinage de tout y_0 dans $\mathcal{S}$ qui est compacte. Par conséquent, l'intégrale suivante définit bien une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$:

$$\int_V \exp(-\mathcal{B}(Xv, Xv)) Spf(X)\phi(X) dv.$$

Il nous faut maintenant voir que sur U cette intégrale est égale à $\pi^{\frac{n}{2}} Spf\ Ber_{(1,0)}^{-1}$ (ici $m = 0$).

On note $\Phi_{\mathcal{B}}$ le polynôme homogène de degré 2 sur V associé à $\mathcal{B}$. Plus précisément, soit $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m)$ une base de V et $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m)$ sa base duale alors on a :

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \mathcal{B}(e_j, e_i) + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \xi_i \xi_j \mathcal{B}(f_j, f_i).$$

Soit $X \in U$, on note Ψ_X l'endomorphisme X de V (via la représentation standard) considéré comme un endomorphisme de superespace vectoriel. Pour tout v et tout w dans V on pose

$$\mathcal{B}_X(v, w) = \mathcal{B}(Xv, Xw).$$

Alors $\mathcal{B}_X$ est une forme bilinéaire supersymétrique sur V telle que sa restriction à V_0 soit un produit scalaire. Avec cette notation on a $\iota\beta = \Phi_{\mathcal{B}_X}$ et :

$$\Psi_X^*(\Phi_{\mathcal{B}}) = \iota\beta.$$

La jacobienne de Ψ_X est égale à X. Par conséquent, la formule du changement de variables nous donne sur U :

$$\int_V \exp(-\iota\beta(X)) |Det(X)| D = \int_V \exp(-\Phi_{\mathcal{B}}) D,$$

ou encore :

$$\int_V \exp(-\iota\beta(X)) D = \int_V \exp(-\Phi_{\mathcal{B}}) |Det(X)|^{-1} D,$$

On en déduit que sur U on a (comme $V = V_0$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(V)$, $Ber = |Det|$) :

$$\int_V \exp(-\beta) Spf D = \pi^{\frac{n}{2}} Spf Ber^{-1}.$$

Or $Spf^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} Ber$, on a donc bien le résultat annoncé sur U.

Dans le cas $V = V_1$ on constate que

$$\int_V \exp(\iota\beta) D = (-2)\frac{m}{2} Det.$$

Les affirmations du lemme sont alors triviales en tenant compte de l'égalité $Spf^2 = (-1)^{\frac{m}{2}} Ber$. $\diamondsuit$

Exemple : On considère le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$ On note (x, y) les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est constituée des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\iota\beta) Spf\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\theta^2(x^2+y^2))(2i\theta) dxdy.$$

Sur $\mathfrak{g} \setminus \{0\}$, on a alors bien :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\iota\beta) Spf\, dxdy = \frac{2i\pi}{\theta}.$$

C'est donc une distribution homogène de degré -1. Une telle distribution est unique.

On peut maintenant énoncer :

Proposition 6.2. *L'intégrale,*

$$\frac{1}{(-2\pi)^{\frac{n+m}{2}}} \int_V \exp\Big(i(\iota\beta + d\beta)\Big),$$

a un sens comme fonction généralisée sur $\mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})_0$. De plus cette fonction généralisée est un inverse du pfaffien dans le sens donné plus haut.

Démonstration: Tout d'abord on remarque que $\iota\beta$ est constante le long des fibres de $\pi : \widehat{V} \longrightarrow V$ et que $d\beta$ est constante le long des fibres de $\widehat{V} \simeq \Pi V \oplus V \longrightarrow \Pi V$. On a donc

$$\pi_*\Big(\exp(id_{\mathfrak{g}}\beta)\Big) = \exp(-\iota\beta)\pi_*\Big(\exp(id\beta))\Big) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} Spf. \exp(-\iota\beta) D.$$

La fonction généralisée ci dessus est donc celle considérée au lemme précédent.

Le lemme précédent montre que l'ensemble des singularités de la fonction généralisée ainsi définie est inclue dans l'ensemble des éléments de $\mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})_0$ tels que leur restriction à V_0 ne soit pas inversible. Autrement dit, si $X \in \mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})_0$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

l'ensemble des singularités est inclus dans l'ensemble des X tels que A ne soit pas inversible. De plus, le front d'onde en une singularité est inclue dans l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or les singularités du superpfaffien sont concentrées sur l'ensemble des éléments tels que leur restriction à V_1 soit non inversible (c'est-à-dire tels que D ne soit pas inversible) et le font d'onde en une singularité est inclus dans l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les fronts d'onde de la fonction généralisée définie ci-dessus et du superpfaffien sont d'intersection vide. On peut donc en calculer leur produit.

Soit $Y \in \mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})_0$ tel que pour $t > 0$, on ait $X + tY$ inversible. On montre grâce au théorème de convergence dominée que (comme fonction généralisée) :

$$\begin{aligned} \Big(\int_V \exp(id_{\mathfrak{g}}\beta) Spf\Big)(X) &= \lim_{t\to 0} \Big(\int_V \exp(id_{\mathfrak{g}}\beta) Spf\Big)(X + tY) \\ &= \pi^{\frac{n}{2}}(-2)^{\frac{m}{2}} \lim_{t\to 0} \Big(Spf^2 Ber_{(1,0)}\Big)(X + tY)\Big). \end{aligned}$$

Or $Spf^2 = (2\pi)^m(-1)^{\frac{n+m}{2}-q} Ber_{(0,1)}$ sur $U_{(p,q)}$. De plus, $(-1)^q Ber_{(1,0)} = Ber_{(1,1)}$ sur $U_{(p,q)}$. Enfin, sur $\mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})$, $Ber_{(0,1)} = Ber_{(1,1)}$ si $\mathcal{B}$ est un superproduit scalaire. On en déduit que (comme m est pair)

$$\frac{1}{(-2\pi)^{\frac{n+m}{2}}} \int_V \exp(id_{\mathfrak{g}}\beta)$$

est bien un inverse du superpfaffien dans l'ensemble des fonctions généralisées sur $\mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})$. $\diamondsuit$

On généralise immédiatement cette proposition au cas d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})_0$ vérifiant les hypothèses de la proposition 5.1.

DÉFINITION 6.1. *Soit* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(V, \mathcal{B})_0$ *vérifiant les hypothèses de la Proposition 5.1. On appelle inverse du superpfaffien et on note* $\mathcal{I}Spf$ *la fonction généralisée sur* $\mathfrak{g}$ *:*

$$\mathcal{I}Spf := \frac{1}{(-2\pi)^{\frac{n+m}{2}}} \int_V \exp(id_{\mathfrak{g}}\beta).$$

On a immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.1. *Soit* G *un supergroupe,* M *une* G*-supervariété et* $\mathcal{V}$ *un superfibré vectoriel* G*-équivariant au dessus de* M*. On suppose de plus que* $\mathcal{V}$ *est orienté et possède une superstructure euclidienne* G*-invariante. On suppose de plus que* $\mathcal{V}$ *possède une superconnexion* G*-invariante laissant toutes ces structures invariantes. On note* $F_{\mathfrak{g}}$ *sa courbure équivariante. On suppose enfin que les hypothèses* $(*)$ *et* $(**)$ *sont vérifiées. Soit* μ *le moment équivariant de* $\mathcal{V}$*. On suppose de plus qu'il existe un recouvrement de* M *par des ouverts de trivialisation de* $\mathcal{V}$ *tel que pour chacun des ouverts* W *il existe* $X \in \mathfrak{g}$ *tel que* $\mu(X)$ *soit inversible dans* $End(\mathcal{V}|_{U_0})_0$*. Ces hypothèses impliquent en particulier que* n *et* m *sont pairs. La forme équivariante suivante est alors un inverse de la superforme d'Euler :*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+m}{2}}} \mathcal{I}Spf(-iF_{\mathfrak{g}}).$$

On note $\mathcal{I}\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}$ la forme équivariante ainsi définie.
Remarque: Localement, si U est un ouvert de trivialisation de $\mathcal{V}$ et V une fibre générique, la courbure équivariante $F_{\mathfrak{g}}$ est une forme pseudodifférentielles équivariante (à coefficients $\mathcal{C}^\infty$) sur U à valeurs dans $\mathfrak{osp}(V)$. Les hypothèses faites assurent alors que, si U est assez petit, $\mathcal{I}Spf$ est bien défini sur l'image de $\mathfrak{g} \times U$ par $-iF_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{osp}(V)$.

PARTIE V

Formule de Localisation

1. Préliminaires

1.1. Introduction. Soit M une supervariété réelle munie d'une action d'un supergroupe connexe G et d'une superstructure euclidienne faible G-invariante notée $\mathcal{B}$. On suppose de plus que la variété sous jacente M_0 est orientée, ainsi que $(\widehat{M})_0$ (c'est-à-dire que M est totalement orientée). Soit α une forme équivariante fermée à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$, tel que $\overline{\exp(\mathbb{R}X)} \subset G_0$ soit compact. On calcule $\int_M \alpha$ sur un voisinage de X dans $\mathfrak{g}(X)$ comme somme d'intégrale sur les composantes connexes de la variété des zéros de X dans M. Pour cela il nous faut de plus supposer que le fibré normal $T_N(M(X))$ de la variété des zéros de X dans M est muni d'une superstructure euclidienne $G(X)$-invariante, est orienté et possède une superconnexion $G(X)$-invariante $\mathbb{A}$ laissant la superstructure euclidienne de $T_N(M(X))$ invariante.

De plus on suppose la condition $(*)$ vérifiée. C'est-à-dire , en reprenant les notations de la section **III.3** ($\tau : \mathfrak{osp}(T_N(M(X))) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^2(\Pi T_N(M(X)))$ et $\sigma^* : \mathcal{C}(\Pi T_N(M(X))) \to S(\Pi T_N(M(X))^*)$), que l'on suppose que la fonction $\widetilde{\sigma^* \circ \tau(\mathbb{A}^2)}$ sur $\Pi T_N(M(X))_0$ est négative.

On va tout d'abord préciser ce que l'on entend par variété des zéros de X dans M (on la note $M(X)$). Ensuite, on construit sur un voisinage ouvert de X dans $\mathfrak{g}$ une forme équivariante β telle que $d_{\mathfrak{g}}\beta$ soit inversible comme forme équivariante sur le complémentaire d'un voisinage ouvert de $M(X)$. On montre alors la formule de localisation dans le cas de zéros isolés, puis dans le cas général.

1.2. Notion de zéros de X. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$. Comme G agit sur M, on associe à X une dérivation X_M de $\mathcal{O}_M$.

Soit $X \in \mathfrak{g}_0$ tel que $\overline{\exp(\mathbb{R}X)} \subset G_0$ soit compact. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_M$ défini de la façon suivante. Pour tout ouvert U de M, $\mathcal{I}(U)$ est l'idéal engendré par :

$$\{X_M.f,\ f \in \mathcal{O}(U)\}.$$

On note j l'injection canonique de M_0 dans M. Le superfibré $T(M)$ sur M se relève en un fibré en superespaces vectoriels $j^*(T(M))$ sur M_0. Nous le noterons $\widetilde{T}(M)$. On a une application naturelle de $\mathcal{D}er(U)$ dans $\Gamma(U_0, \widetilde{T}(M))$; nous noterons $\tilde{\zeta}$ l'image d'une dérivation ζ par cette application.

Comme $\overline{\exp(\mathbb{R}X)}$ est compact, l'ensemble des zéros de $\widetilde{X_M}$ dans M_0 est une variété que l'on note $M(X)_0$.

Proposition 1.1. *Le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ définit une supervariété $M(X)$ de variété sous-jacente $M(X)_0$.*

On pose alors :

Définition 1.1. *On note $M(X)$ et on appelle variété des zéros de $X \in \mathfrak{g}_0$ dans M, la sous-supervariété définie par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ ci-dessous. Pour tout ouvert U de M, $\mathcal{I}(U)$ est l'idéal engendré par :*

$$\{X_M.f,\ f \in \mathcal{O}(U)\}.$$

Proposition 1.2. *Soit G un supergroupe connexe. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$ central dans $\mathfrak{g}$ tel que $\overline{\exp(\mathbb{R}X)} \subset G_0$ soit compact. Soit $M(X)$ la sous supervariété des zéros de X. Alors $M(X)$ est stable par G. C'est-à-dire que l'application $G \times M(X) \hookrightarrow G \times M \to M$ se factorise en $G \times M(X) \to M(X) \hookrightarrow M$. Ce qui peut encore se traduire en terme de faisceaux en disant que le faisceau $\mathcal{I}$ définissant $M(X)$ s'envoie par π^* (π étant l'application qui définit l'action de G) dans le faisceau d'idéaux qui définit $G \times M(X)$.*

Démonstration: Soit U un ouvert de M. Montrons tout d'abord que $\mathcal{I}(U)$ est stable par l'action de Y_M pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. En effet, on a $(X_M \circ Y_M - Y_M \circ X_M)f = 0$ pour tout $f \in \mathcal{O}(U)$ ($X \in \mathfrak{g}_0$ et $[X, Y] = 0$). Donc $Y_M(X_M.f) = X_M(Y_M.f) \in \mathcal{I}(U)$. Or comme $\mathcal{I}(U)$ est engendré par les $X_M.f$, $\mathcal{I}(U)$ est bien stable par l'action de Y_M et ce pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Or, par définition, $Y_M.f = j^*(Y\pi^*(f))$ si j est l'injection de $M \simeq \{e\} \times M$ dans M. Ce qui veut dire que si $f \in \mathcal{I}(U)$, $Y.\pi^*(f) \in \mathcal{O}(G)\widehat{\otimes}\mathcal{I}(U)$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Ceci implique le résultat car G est connexe. $\diamondsuit$

1.3. Construction d'une forme β telle que $d_{\mathfrak{g}}\beta$ soit inversible. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$, central et tel que $\overline{\exp(\mathbb{R}X)} \subset G_0$ soit compact. Soit $M(X)$ la variété des zéros du champ X_M. Soit α une forme équivariante fermée sur M définie sur un voisinage G-invariant U de X dans $\mathfrak{g}_0$ Nous allons montrer qu'en dehors d'un voisinage G-invariant quelconque de $M(X)$, si U est assez petit α est $d_{\mathfrak{g}}$-exacte. Pour tout voisinage ouvert G-invariant V de $M(X)$, et tout ouvert G-invariant relativement compact C de M, on construit une forme équivariante β définie sur U telle que

$d_{\mathfrak{g}}\beta$ soit inversible sur $N = (M \setminus \overline{V}) \cap C$. L'ouvert U est à préciser en fonction de X, de V et de C.

On sait associer à une application linéaire ψ de $\mathfrak{g}$ dans $\widehat{\Omega}(M)$ un élément de $\mathcal{O}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\widehat{\Omega}(M)$, soit (si $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ est une base homogène de $\mathfrak{g}$ et $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ sa base duale) : $\sum_{i=1}^{n} \psi(e_i)x_i + \sum_{j=1}^{m} \psi(f_j)\xi_j$. On définit alors une forme équivariante β en posant pour tout Y dans $\mathfrak{g}$, $\beta(Y) = \mathcal{B}(Y_M, .)$. Cette forme est bien équivariante car $\mathcal{B}$ est G-invariante. On a alors $d_{\mathfrak{g}}\beta(Y) = -i\mathcal{B}(Y_M, Y_M) + d\beta(Y)$. Soit U un ouvert de $\mathfrak{g}$. Pour voir que $d_{\mathfrak{g}}\beta$ est inversible comme fonction sur $\widetilde{U \times \widehat{N}}$) il faut voir que $\widetilde{d_{\mathfrak{g}}\beta}(\in \mathcal{C}^\infty(U_0 \times (\widehat{N})_0)^{\mathbb{C}})$ est partout non nulle. Or $\mathcal{B}(\widetilde{X_M, X_M}) > 0$ sur $M_0 \setminus M(X)_0$. Il suffit donc de préciser un ouvert autour de X tel que, pour tout Y dans cet ouvert, on ait $\mathcal{B}(\widetilde{Y_M, Y_M}) > 0$ sur $\widehat{N}$. On a le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Soit $X \in \mathfrak{g}_0$ central dans $\mathfrak{g}$ et tel que $\overline{\exp(\mathbb{R}X)} \subset G_0$ soit compact. Soit $M(X)$ la variété des zéros de X dans M. Soit V un voisinage ouvert G-invariant de $M(X)$, et C un ouvert G-invariant relativement compact de M. Il existe alors un ouvert G-invariant $U(C, V, X)$ autour de X dans $\mathfrak{g}$ tel que la fonction $\phi : (Y, m) \mapsto \mathcal{B}(\widetilde{Y_M, Y_M})_m$ soit strictement positive sur $U(C, V, X)_0 \times \widehat{N}_0$ avec $N = (M \setminus \overline{V}) \times C$.*

Démonstration: La fonction ϕ est continue, $(M\setminus\overline{V})\cap C$ est inclus dans $(M\setminus V)\cap\bar{C}$ qui est compact et $\mathcal{B}(\widetilde{X_M, X_M})_m > 0$ pour tout m dans $(M\setminus V)_0\times\overline{C}_0$. Il existe donc $a > 0$ tel que $\mathcal{B}(\widetilde{X_M, X_M})_m > a$ pour tout m dans $(M\setminus V)_0\times\overline{C}_0$. On a $\phi^{-1}([a, +\infty])$ ouvert dans $(M\setminus\overline{V})\cap C$, et la relative compacité de $(M\setminus\overline{V})\cap C$ assure que l'on peut trouver U tel que $U_0 \times N_0 \subset \phi^{-1}([a, +\infty])$. Or ϕ est une fonction G-invariante et N est un espace G-invariant, donc si l'on pose $U(C, V, X) := G.U$, $U(C, V, X)$ est un voisinage ouvert G-invariant de X dans G et $U(C, V, X)_0 \times N_0 \subset \phi^{-1}([a, +\infty])$. $\diamondsuit$

Finalement on a :

Lemme 1.2. *On garde les hypothèses et les notations précédentes.Soit $X \in \mathfrak{g}_0$. Soit $M(X)$ la variété des zéros de X dans M. Soit V un voisinage ouvert G-invariant de $M(X)$ et C un ouvert G-invariant relativement compact de M. Alors $d_{\mathfrak{g}}\beta$ est inversible comme fonction sur $U(C, V, X) \times ((M \setminus \overline{V}) \cap C)$.*

On en déduit :

LEMME 1.3. *Soit α un forme équivariante fermée à coefficients généralisés définie sur $U(C,V,X)$ et à support dans $(M\setminus\overline{V})\cap C$. Alors α est $d_{\mathfrak{g}}$-exacte. De plus si α est intégrable, α est $d_{\mathfrak{g}}$-exacte dans $\widehat{\Omega}^{-\infty}_{G,\int}(M)$.*

Démonstration: Il suffit d'écrire : $\alpha = d_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\beta\alpha}{d_{\mathfrak{g}}\beta}\right)$ et de remarquer que $\frac{\beta\alpha}{d_{\mathfrak{g}}\beta}$ est intégrable car $\frac{\beta}{d_{\mathfrak{g}}\beta}$ est localement une fraction rationnelle sans pôles dans $M\setminus\overline{V}$.$\diamondsuit$

Remarque: Le lemme reste vrai dans l'algèbre des formes équivariantes à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ car β est à coefficients $\mathcal{C}^\infty$.

2. Formule de localisation

2.1. Cas des coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et des zéros isolés. Comme au paragraphe précédent, on considère un supergroupe connexe G et une G-supervariété M munie d'une superstructure euclidienne faible G-invariante. On suppose de plus que M et $\widehat{M}$ sont orientées, c'est-à-dire que M est totalement orientée (dans la situation classique ces deux conditions sont identiques). On fixe un ouvert G-invariant relativement compact C de M. On fixe X dans $\mathfrak{g}_0$ tel que $\overline{\exp(\mathbb{R}X)}\subset G_0$ soit compact. On suppose que X est central dans $\mathfrak{g}$. Si tel n'est pas le cas au lieu de considérer $\mathfrak{g}$ on considère le centralisateur $\mathfrak{g}(X)$ de X dans $\mathfrak{g}$ au lieu de $\mathfrak{g}$, et la composante neutre du stabilisateur $G(X)$ de X dans G (son algèbre de Lie est $\mathfrak{g}(X)$). On suppose de plus que $T_N(M(X))$, le fibré normal à $M(X)$ dans M est orienté, muni d'une superstructure euclidienne et possède une superconnexion G-invariante $\mathbb{A}$ laissant la superstructure euclidienne de $\Pi T_N(M(X))$ invariante. De plus en reprenant les notations des sections précédentes ($\tau : \mathfrak{osp}(T_N(M(X)))\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}^2(\Pi T_N(M(X)))$ et $\sigma : \mathcal{C}(\Pi T_N(M(X)))\longrightarrow S(\Pi T_N(M(X)))$), on suppose que la fonction $\widetilde{\sigma\circ\tau}(\mathbb{A}^2)$ est négative sur $\Pi T_N(M(X))$ (condition $(*)$).

Nous considérons maintenant une forme équivariante intégrable α à support inclus dans C. Soit V un voisinage ouvert G-invariant de $M(X)$ qui soit G-isomorphe à un ouvert de $T_N M(X)$. La donnée de V est équivalente à la donnée d'un ouvert V_0 de M_0 assez petit. Or comme M_0 est munie d'une structure euclidienne G_0-invariante, un tel ouvert existe. On introduit de plus un voisinage ouvert V_a de $M(X)$ dans M tel que $\overline{V}_a\subset V$. On note $U(C,V_a,X)$ le voisinage ouvert G-invariant de X construit à la section précédente. On considère $\alpha\in\widehat{\Omega}^{\infty}_{G,\int}(M,U(C,V_a,X))$ à support inclus dans C.

On pose, pour tout t de $\mathbb{R}$, $\phi_t(x)=\exp(-itx)$. Si β est la forme construite à la sous section précédente, $d_{\mathfrak{g}}\beta$ est paire et on peut définir $\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)$. Soit ψ_t la fonction différentiable sur $\mathbb{C}$ telle que $\psi_t(x)=\frac{(1-\phi_t(x))}{x}$ pour $x\neq 0$ et $\psi_t(0)=-it\exp'(0)=-it$. On pose $\gamma_t=\beta\psi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)$. On a $(1-\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta))\alpha=d_{\mathfrak{g}}(\gamma_t\alpha)$. On a donc $\int_M \alpha = \int_M \phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha$ et ce quel que soit t dans $\mathbb{R}$ donc en particulier $\int_M \alpha$ est égal à la limite lorsque t tend vers l'infini de $\int_M \phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha$. Ces intégrales ont un sens car $\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)$ est $\mathcal{C}^\infty$ bornée et α est intégrable. De plus, si α et $\int_M \alpha$ admettent une restriction à $\mathfrak{g}(X)$ alors il en est de même pour $\phi_t(\beta')\alpha$, $\gamma'_t\alpha$ et leurs intégrales.

Soit $\chi_1 + \chi_2 = 1$ une partition de l'unité telle que χ_1 soit égale à 1 sur V_a et nulle sur le complémentaire de V. On a alors :

$$\int_M \phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha = \int_{C\setminus\overline{V}_a} \chi_2\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha + \int_V \chi_1\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha.$$

Par construction de $U(C, V_a, X)$, la fonction $\widetilde{\iota\beta}$ admet un minorant strictement positif sur $\overline{C \setminus \overline{V}_a}$. Par conséquent

$$\lim_{t\to\infty} \int_{C\setminus\overline{V}_a} \chi_2\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha = 0$$

Le calcul est donc ramené à celui de l'intégrale de $\chi_1\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha$ sur V.

A présent on suppose que les zéros de X sont isolés. Soit p un tel zéro. On peut supposer que $M(X) = \{p\}$ et que V est un voisinage de p. L'ouvert V peut être choisi G-isomorphe à un ouvert V' de T_pM. Soit ρ ce G-isomorphisme. On est ramené à calculer la limite de l'intégrale de $\rho^*(\chi_1\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha)$ sur V'. On transporte grâce à ρ la forme $\mathcal{B}$ sur V en une forme $\mathcal{B}'$ sur V'. On note δ_t la contraction de rapport $\frac{1}{\sqrt{t}}$ sur T_pM. La limite cherchée est alors :

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\delta_t(V')} \delta_t^*\rho^*(\chi_1\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha).$$

On note j_p l'injection de l'origine dans $T_p(M)$. On a alors

$$\begin{array}{lcc} \lim_{t\to\infty} & \delta_t(V') & = & T_pM, \\ \lim_{t\to\infty} & \delta_t^*\rho^*(\chi_1) & = & 1, \\ \lim_{t\to\infty} & \delta_t^*\rho^*(\alpha) & = & j_p^*(\alpha). \end{array}$$

Enfin $\lim_{t\to\infty} t\delta_t^*\rho^*(\mathcal{B})$ est un superproduit scalaire $\mathcal{B}_0$ sur T_pM. Plus précisément, on pose :

$$\begin{aligned} a_{i,j} =& \rho^*(\mathcal{B})(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}), \\ b_{i,j} =& \rho^*(\mathcal{B})(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}), \\ c_{i,j} =& \rho^*(\mathcal{B})(\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}), \\ d_{i,j} =& \rho^*(\mathcal{B})(\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}). \end{aligned}$$

Ce sont des fonctions sur T_pM. Le super produit scalaire $\mathcal{B}_0$ est alors défini par les coefficients $j_p^*a_{i,j}, j_p^*b_{i,j}, j_p^*c_{i,j}$ et $j_p^*d_{i,j}$. Il est G invariant puisque à coefficients constants. Soit β_0 la forme équivariante sur T_pM définie par $\beta_0(X) = \mathcal{B}_0(X,.)$ pour X dans $\mathfrak{g}$. Alors on a :

$$\lim\nolimits_{t\to\infty} \quad \delta_t^*\rho^*(\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)) \quad = \quad \phi_1(d_{\mathfrak{g}}\beta_0).$$

Par conséquent,

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\delta_t(V')}\delta_t^*\rho^*(\chi_1\phi_t(d_{\mathfrak{g}}\beta)\alpha) = j_p^*\alpha\int_{T_pM}\exp(-id_{\mathfrak{g}}\beta_0).$$

Or la forme sous l'intégrale du membre de droite est équivariante fermée. Le calcul de cette intégrale a déjà été fait à la section **III.2.2**. On a donc obtenu :

THÉORÈME 2.1. *Soit M une supervariété réelle orientée munie d'une action d'un supergroupe connexe G et d'une superstructure euclidienne G-invariante notée $\mathcal{B}$. Soit α une forme équivariante fermée à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$, tel que $\overline{\exp(\mathbb{R}X)} \subset G_0$ est compact et tel que α soit définie au voisinage de X. On suppose que les zéros de X dans M sont isolés.*

Soit $p \in M(X)$. On note τ_p la représentation de $\mathfrak{g}$ dans T_pM. Il existe un voisinage ouvert W de X dans $\mathfrak{g}(X)$ sur lequel on a l'égalité (entre fonctions $\mathcal{C}^\infty$) :

$$\int_M \alpha = (2\pi)^{\frac{n+m}{2}}\sum_{p\in M(X)}\frac{j_p^*(\alpha)}{\tau_p^*(Spf)}.$$

Démonstration: On reprend les notations précédentes. Comme les points fixes sont isolés, $\tau_p(X)$ est inversible au voisinage de X. On note $O(p)$ l'ouvert $\tau_p^{-1}U$ (l'ouvert U de $\mathfrak{osp}T_pM$ a été introduit lors de la définition du superpfaffien). On considère $W = U(X, V_a, C) \cap \mathcal{O}(p)$. Sur W, Spf est $\mathcal{C}^\infty$ et inversible et comme $j_p^*(\exp(-id_{\mathfrak{g}}\beta_0)) = 1$ et que les hypothèses impliquent que n est pair, on obtient la formule annoncée. ♢

.

2.2. Formule de localisation pour les zéros non-isolés. On a ramené dans la section **2.2** l'intégrale à un voisinage G-invariant de $M(X)$ dans M. Or un tel voisinage est isomorphe à un voisinage ouvert de $M(X)$ dans $T_N(M(X))$. Ici au lieu d'appliquer la proposition **III.1.2**, nous allons appliquer la proposition **III.4.2**. On se fixe comme précédemment un ouvert C de M relativement compact, et on intègre des formes équivariantes à support dans C. Pour pouvoir appliquer la proposition **III.4.2** il nous faut savoir que X est bien dans l'ouvert sur lequel une forme de Thom (et donc une forme d'Euler) est définie pour le fibré $T_N(M(X) \cap C)$. C'est-à-dire qu'il faut vérifier que X est dans l'ouvert

$\mu^{-1}(\widehat{\Omega}(M(X)\cap C, U^{T_N M(X)|_{M(X)\cap C}}))$, où μ est le moment équivariant de $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$. On a le lemme :

LEMME 2.1. *Le sous ensemble* $U = \mu^{-1}(\widehat{\Omega}(M(X)\cap C, U^{T_N M(X)|_{M(X)\cap C}}))$ *de* $\mathfrak{g}$ *est ouvert et contient* X.

Démonstration: Comme C est relativement compact, l'espace $\widehat{\Omega}(M(X)\cap C, U^{T_N M(X)|_{M(X)\cap C}})$ est un ouvert. Donc, puisque μ est continue, U est ouvert. D'autre part $\mu(X)$ est un élément de $\mathcal{O}(M(X), End(T_N(M(X))))$, et comme $M(X)$ est la variété des zéros de X, l'action de X sur les fibres de $T_N(M(X))$ est inversible et donc $\mu(X)\in U^{T_N M(X)|_{M(X)\cap C}}$. ♢

On peut alors énoncer le théorème :

THÉORÈME 2.2. *Soit* M *une supervariété réelle orientée munie d'une action d'un supergroupe connexe* G *et d'une superstructure euclidienne faible* G*-invariante notée* $\mathcal{B}$. *On suppose que* $\widehat{M}$ *est orientée. Soit* α *une forme équivariante fermée à coefficients* $\mathcal{C}^\infty$ *définie sur un ouvert* G*-invariant de* $\mathfrak{g}$. *Soit* $X\in\mathfrak{g}_0$, *tel que* $\exp(\mathbb{R}X)\subset G_0$ *est compact et tel que* α *soit définie au voisinage de* X.*que le fibré normal* $T_N(M(X))$ *de la variété des zéros de* X *dans* M *est muni d'une superstructure euclidienne* $G(X)$*-invariante, est orienté et possède une superconnexion* G*-invariante* $\mathbb{A}$ *laissant la superstructure euclidienne de* $\Pi T_N(M(X))$ *invariante.*

De plus on suppose la condition $(*)$ *vérifiée. C'est-à-dire , en reprenant les notations des sections précédentes* ($\tau : \mathfrak{osp}(T_N(M(X))) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^2(\Pi T_N(M(X)))$ *et* $\sigma : \mathcal{C}(\Pi T_N(M(X))) \to S(\Pi T_N(M(X)))$), *que l'on suppose que la fonction* $\widetilde{\sigma\circ\tau(\mathbb{A}^2)}$ *sur* $\Pi T_N(M(X))_0$ *est négative.*

On désigne par j *l'injection de* $M(X)$ *dans* M, *et* $\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}$ *la classe d'Euler équivariante du fibré normal* $T_N(M(X)\cap C)$ *dans un ouvert relativement compact* C *de* M. *Soit* α *une forme équivariante fermée intégrable à support dans* C. *Alors on a sur un voisinage de* X *dans* $\mathfrak{g}(X)$, *comme égalité de fonctions* $\mathcal{C}^\infty$:

$$\int_M \alpha = \int_{M(X)} \frac{j^*\alpha}{\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}}.$$

Démonstration: Comme celle des zéros isolés, elle analogue à celle du cas non super (Cf. par exemple [BGV92]). On peut noter que l'intégrale de droite est une somme d'intégrales sur les composantes connexes de $M(X)\cap C$ qui sont en nombre fini. ♢

PARTIE VI

Transformées de Fourier d'orbites coadjointes : exemples

1. Transformée de Fourier d'orbites coadjointes

Soit G un supergroupe connexe. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit M_f l'orbite coadjointe passant par $f \in \mathfrak{g}_0^*$. Sur M_f on a la superforme symplectique ω_f déterminée par la forme $\widetilde{\omega}_f = f([.,.])$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$, $\mathfrak{g}_f$ étant l'algèbre de Lie du stabilisateur de f (cf. [Kos77]). On définit grâce à ω_f une orientation de $(M_f)_0$ donc de M_f. On suppose également que l'on a orienté $\widehat{M_f}$ de manière G-invariante. Cette dernière condition équivaut à supposer que l'on s'est donné une orientation de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)_1$ qui soit $(G_f)_0$-invariante. Si $\exp(\omega_f)$ est à décroissance rapide le long des fibres de $\widehat{M_f}$, on peut définir $\widehat{\pi}_*(\exp(\omega_f))$ ($\widehat{\pi}$ étant la projection de $\widehat{M_f}$ sur M_f et $\widehat{\pi}_*$ la transformation de Baranov-Schwarz cf. **I.4.2.2**). C'est une forme volume de type $(1,0)$ sur M_f, cela définit donc, étant donné que l'on a orienté M_f, une mesure sur M_f. Soit j l'injection de M_f dans $\mathfrak{g}^*$. On a alors une mesure $j_*\Big(\widehat{\pi}_*(\exp(\omega_f))\Big)$ sur $\mathfrak{g}^*$. Si elle est tempérée, on peut en calculer la transformée de Fourier. On dira alors que l'orbite est tempérée si les deux conditions ci-dessus ($\exp(\omega_f)$ à décroissance rapide le long des fibres et $j_*\widehat{\pi}_*(\exp(\omega_f))$ tempérée) sont vérifiées. Pour définir la transformée de Fourier dans ce cas, on va introduire quelques notations.

On note pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\mu(X)$ la forme linéaire sur $\mathfrak{g}^*$ telle que que $\mu(X)(g) = (-1)^{|X||Y|}g(X)$. On interprète μ comme une fonction sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathfrak{g}^*)$. Soit $(y_1, \ldots, y_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ sa base duale, alors, on a :

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \eta_j \xi_j.$$

On note μ_f l'application linéaire et la fonction associée qui envoie $X \in \mathfrak{g}$ sur $\mu(X)|_{M_f}$. On a alors sur M_f une structure hamiltonienne d'application moment μ_f. Pour ces constructions on pourra consulter Kostant[Kos77].

On note alors pour tout $f \in \mathfrak{g}_0^*$:

$$\alpha_f = i\mu_f + \omega_f.$$

C'est une forme G-équivariante fermée (cela se montre comme dans la situation classique). Il en est alors de même de $\exp(\alpha_f)$.

DÉFINITION 1.1. *Si* $\exp(\alpha_f)$ *est une fonction à décroissance rapide le long des fibres de* $\widehat{M}_f$*, et si* $j_*\widehat{\pi}_*(\exp(\alpha_f))$ *est une mesure tempérée, on appelle transformée de Fourier de* M_f *la fonction généralisée sur* $\mathfrak{g}$ *:*

$$\Phi_f := \int_{\widehat{M}_f} \exp(\alpha_f).$$

Remarques: D'une part la condition $\exp(\alpha_f)$ à décroissance rapide le long des fibres équivaut à $\exp(\omega_f)$ à décroissance rapide (car $\exp(i\mu_f)$ est de module 1). D'autre part on a :

$$\int_{\widehat{M}_f} \exp(\alpha_f) = \int_{\mathfrak{g}^*} \exp(i\mu_f) j_*\widehat{\pi}_*(\exp(\omega_f)).$$

La condition d'être à décroissance rapide pour $\exp(\alpha_f)$ sélectionne un certain nombre d'orbites. Précisons lesquelles. La forme ω_f détermine pour chaque point m de $(M_f)_0$ une forme quadratique sur $T_m(M_f)_1$. La forme $\exp(\alpha_f)$ sera alors à décroissance rapide si cette forme quadratique est définie négative pour tout m. Comme M_f est une orbite de la représentation coadjointe, il suffit de vérifier que la forme quadratique définie par $\overline{\omega}_f$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$, est définie négative.

Les orbites pour lesquelles on peut définir une transformée de Fourier sont donc les orbites tempérées définies par un f de $\mathfrak{g}_0^*$ tel que pour tout $X \in \mathfrak{g}_1$, on ait :

$$f([X, X]) \leq 0.$$

Remarque: Si on a $f([X, X]) \geq 0$ sur $\mathfrak{g}_1$, il suffit pour définir une transformée de Fourier de modifier un peu la théorie en considérant $d_{\mathfrak{g}} = d + i\iota$, et on est alors amené à considérer $\alpha_f = i\mu_f - \omega_f$.

2. Cas d'un supergroupe de Heisenberg

2.1. Transformée de Fourier. Soit G un supergroupe de Heisenberg, c'est-à-dire un supergroupe G connexe simplement connexe tel que sa superalgèbre de Lie soit une superalgèbre de Heisenberg. Plus précisément on considère le cas spécial de superalgèbre de Heisenberg où $\mathfrak{g}$ est une superalgèbre de Lie telle que $\mathfrak{g}_0$ soit central de dimension 1 ($\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}Z$), et telle que l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_1$ de dimension m soit muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive telle que pour tout X et pour tout Y dans $\mathfrak{g}_1$, on ait $[X, Y] = (X, Y)Z$. Soit $f \in \mathfrak{g}_0^*$, $f = \lambda Z^*$ ($Z^*(\mathfrak{g}_1) = 0$ et $Z^*(Z) = 1$). Soit M_f l'orbite coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ passant par f. Elle est isomorphe comme espace affine à l'espace $\mathfrak{g}_1^*$ car on a $\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g}_0$. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$, alors $\mathfrak{g}(X) = \mathfrak{g}$. On suppose de plus $\widehat{M}_f$ orientée, ce qui revient à supposer $\mathfrak{g}_1$ orientée. La formule de localisation est inefficace ici pour calculer la transformée de Fourier de M_f. Cependant on peut la calculer directement. On note $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ une base orientée de $\mathfrak{g}_1$, et $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ la base duale associée. Les η_i sont des générateurs de l'anneau des fonctions sur M_f (i.e. $S(\mathfrak{g}_1)$, $\mathfrak{g}_1$ étant pris avec sa parité). On pose $\alpha_{i,j} = (\eta_i, \eta_j)$. On a alors pour $X = \sum \eta_i a_i$:

$$X_{M_f} = \lambda \sum_{i,j} \alpha_{i,j} a_i \frac{\partial}{\partial \eta_i},$$

et

$$\iota = \lambda \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \xi_i \frac{\partial}{\partial d\eta_j}.$$

On pose encore $(\alpha_{i,j})^{-1}_{\{i,j\}} = (\beta_{i,j})_{\{i,j\}}$. On a alors :

$$\omega_f = \frac{1}{2\lambda} \sum_{i,j} \beta_{i,j} d\eta_i d\eta_j.$$

Enfin, on a :

$$\mu_f = \lambda Z^* + \sum_i \eta_i \xi_i = f + \sum_i \eta_i \xi_i.$$

Pour pouvoir intégrer $\exp(i\mu_f + \omega_f)$ on suppose que $\lambda < 0$. On en tire :

$$\begin{aligned}\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) &= i^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} e^{i\lambda Z^*} \xi_1 \dots \xi_m \int \exp(\omega_f) D(d\eta_1, \dots, \eta_m) \\ &= i^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} |2\lambda|^{\frac{m}{2}} \sqrt{\left| det\Big(\alpha_{i,j}\Big)_{\{i,j\}} \right|} (\sqrt{\pi})^m \xi_1 \dots \xi_m.\end{aligned}$$

Ce qui se simplifie si l'on suppose $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ orthonormée pour $-f([.,.])$ en :

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) = i^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} (2\pi)^{\frac{m}{2}} e^{if} \xi_1 \dots \xi_m.$$

On peut remarquer la similitude avec le cas d'une superalgèbre de Heisenberg classique. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}'$ une algèbre de Heisenberg de centre $\mathfrak{g}_0$ et avec $dim(\mathfrak{g}') = 2$. Soit Z une base de $\mathfrak{g}_0$ et (E, F) une base de $\mathfrak{g}'$ avec $[E, F] = Z$. On pose $z = Z^*$, $x = E^*$ et $y = F^*$. soit $f = \lambda z$ alors on a (M_f est l'orbite de coadjointe passant par f) pour $\lambda \neq 0$:

$$< \int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f), \phi >= \frac{2\pi}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda z} \phi(z, 0, 0) dz.$$

Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Heisenberg avec $dim(\mathfrak{g}_1) = 2$. Soit $\phi = \phi_0(z) + \phi_1(z)\xi_1 + \phi_2(z)\xi_2 + \phi_{12}\xi_1\xi_2$ une fonction à support compact sur $\mathfrak{g}$. On suppose (η_1, η_2) orthonormée pour $(.,.)$, ce qui est l'analogue de $[E, F] = Z$, et possédant l'orientation de $\mathfrak{g}_1$. Le calcul fait ci-dessus donne alors :

$$< \int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f), \phi >= 2\pi|\lambda| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_0 z}\phi_0(z)dz.$$

2.2. Calcul des caractères des représentations irréductibles complexes d'un supergroupe de Heisenberg réel. On calcule maintenant les caractères des représentations irréductibles unitaires de G, et on les compare à la transformée de Fourier de M_f pour un $f \in \mathfrak{g}_0^*$ correspondant.

2.2.1. *Cas m pair (m = 2d).* On note tout d'abord qu'il suffit de travailler avec la superalgèbre de Heisenberg associée. De plus, on suppose toujours que $\mathfrak{g}_1$ est orientée. Se donner une représentation irréductible complexe d'une algèbre de Heisenberg réelle, c'est se donner une représentation irréductible de son complexifié. Or celles-ci sont paramétrées par $\mathfrak{g}_0^*$. A chaque $f \in \mathfrak{g}_0^*$ on fait correspondre l'unique (modulo le changement de parité Π) représentation irréductible de $C(\mathfrak{g}_1, \frac{-i}{2}\widetilde{\omega}_f(.,.))$, l'algèbre de Clifford de $\mathfrak{g}_1$ muni de la forme bilinéaire $\frac{-i}{2}\widetilde{\omega}_f(.,.) = \frac{-i}{2}f([.,.])$. Plus précisément la représentation ρ_f considérée est l'injection de $\mathfrak{g}$ dans $C(\mathfrak{g}_1, \frac{-i}{2}\widetilde{\omega}_f) \simeq End(S_f)$ (S_f est l'espace des spineurs de $C(\mathfrak{g}_1, \frac{-i}{2}\widetilde{\omega}_f)$) qui envoie $\mathfrak{g}_1$ sur lui même et Z sur $if(Z)$. De plus, on sait que puisque $\widetilde{\omega}_f$ est définie, on peut munir S_f d'une superstructure riemannienne qui en fasse une représentation unitaire. On peut considérer ρ_f comme un élément de $C(\mathfrak{g}_1, \frac{-i}{2}\widetilde{\omega}_f)_{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}$, et même de $(\mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_1)_{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}$. On note exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. On a alors :

$$Str(\rho_f \circ \exp) = Str\Big(\exp_{C(\mathfrak{g}_1, \frac{-i}{2}\widetilde{\omega}_f)_{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}}(\rho_f)\Big)\Big).$$

D'où d'après le corollaire **II.2.2**, si $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ est une base de $V \otimes \mathbb{C}$ orthonormée orientée pour $\frac{-i}{2}\widetilde{\omega}_f$:

$$\begin{aligned} Str(\rho_f \circ \exp) &= (-2i)^d \int_{\mathfrak{g}_1^*} \exp_{S(\mathfrak{g}_1^*)}(\sigma(\rho_f)) \\ &= (2i)^d e^{if}\xi_1 \ldots \xi_m. \end{aligned}$$

D'où si $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est une base de V orthonormée orientée pour $-f([.,.])$

$$\begin{aligned} Str(\rho_f \circ \exp) &= (2i)^d \Big(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\Big)^m e^{if}\xi_1 \ldots \xi_m, \\ &= (-1)^d e^{if}\xi_1 \ldots \xi_m. \end{aligned}$$

On a donc prouvé la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit G un supergroupe de Heisenberg d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que $dim(\mathfrak{g}_1) = 2d$ et $\mathfrak{g}_1$ orientée. Soit $f \in \mathfrak{g}_0^*$, $f \neq 0$ tel que $f([.,.])$ soit définie* *négative sur $\mathfrak{g}_1$. On a la relation suivante entre la transformée de Fourier de l'orbite coadjointe M_f passant par f et la trace de la représentation complexe irréductible déterminée par f :*

$$Str(\rho_f \circ \exp) = \frac{1}{(i\sqrt{2\pi})^m} \int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f).$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$Str(\rho_f \circ \exp) = \frac{(-2i)^d}{(2e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\pi})^m} \int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f).$$

2.2.2. *Cas m impair ($m = 2d-1$)* . Tout se passe pour l'essentiel comme dans le cas m pair. Cette fois-ci la représentation S_f est isomorphe à ΠS_f. Elle est donc unique (au sens strict). La supertrace est donc nulle. Par contre le corollaire **II.3.2** nous donne la formule suivante pour la trace "étrange" Qtr si $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est une base de V orthonormée orientée pour $-f([.,.])$:

$$\begin{aligned} Qtr(\rho_f \circ \exp) &= (-2i)^d \int_{\mathfrak{g}_1^*} \exp_{S(\mathfrak{g}_1^*)}(\sigma(\rho_f)) \\ &= (-2i)^d (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Big(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\Big)^m e^{if} \xi_1 \ldots \xi_m. \end{aligned}$$

On a donc la proposition suivante analogue à la proposition 1.1 :

Proposition 2.2. *Soit G un supergroupe de Heisenberg d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que $dim(\mathfrak{g}_1) = m = 2d+1$ et $\mathfrak{g}_1$ orientée. Soit $f \in \mathfrak{g}_0^*$, $f \neq 0$ tel que $f([.,.])$ soit définie négative sur $\mathfrak{g}_1$. On a la relation suivante entre la transformée de Fourier de l'orbite coadjointe M_f passant par f et la trace "étrange" de la représentation complexe irréductible déterminée par f :*

$$Qtr(\rho_f \circ \exp) = \frac{(-2i)^d}{(2e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\pi})^m} \int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f).$$

3. Cas d'une superalgèbre pseudo-abélienne

3.1. Transformée de Fourier. On peut étendre ce qui précède au cas d'une supergroupe de Lie G tel que son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit pseudo-abélienne. C'est-à-dire le cas où $\mathfrak{g}_0$ est centrale mais de dimension quelconque. Dans ce cas on a $\mathfrak{g}_0 = \oplus \mathbb{R} Z_k$. On a donc n formes bilinéaires symétriques sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_1$, $(.,.)_k$ telles que pour tout X, Y dans $\mathfrak{g}_1$, $[X,Y] = \sum (X,Y)_k Z_k$. On pose de façon analogue au cas précédent $\alpha_{i,j}^k = (\eta_i, \eta_j)_k$ avec toujours $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ base de $\mathfrak{g}_1$.

Soit maintenant $f \in \mathfrak{g}_0^*$. On a $f = \sum \lambda_k Z_k^*$, d'où $\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g}_0 \oplus (\mathfrak{g}_f)_1$. ainsi l'orbite coadjointe de M_f est isomorphe à $\mathfrak{g}_1/(\mathfrak{g}_f)_1$. On a si $X = \sum a_i\eta_i$:

$$X_{M_f} = \sum_{i,j,k} \lambda_k \alpha_{i,j}^k a_i \frac{\partial}{\partial \eta_j},$$

d'où :

$$\iota = \sum_{i,j,k} \lambda_k \alpha_{i,j}^k \xi_i \frac{\partial}{\partial \eta_j}.$$

On pose $\widetilde{\omega}_f = f([.,.])|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f}$ et $\alpha_{i,j} := \widetilde{\omega}_f(\eta_i, \eta_j) = \sum_k \lambda_k \alpha_{i,j}^k$. On suppose maintenant que la base $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ est telle que $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ soit, après passage au quotient, une base orientée de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$. On pose comme précédemment $(\alpha_{i,j})^{-1}_{\{1\leq i,j\leq r\}} = (\beta_{i,j})_{\{1\leq i,j\leq r\}}$. On a alors :

$$\omega_f = \sum_{i,j} \frac{\beta_{i,j}}{2} d\eta_i d\eta_j,$$

et l'application moment :

$$\mu_f = f + \sum_{j=1}^m \eta_j \xi_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i^* + \sum_{j=1}^m \eta_j \xi_j.$$

Pour pouvoir intégrer $\exp(i\mu_f + \omega_f)$ on impose ω_f et donc $\widetilde{\omega}_f$ définie négative sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g}_1/(\mathfrak{g}_f)_1$. On pose enfin $det(\omega_f) = det\Big((\beta_{i,j})_{\{i,j\}}\Big)$. On a alors :

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) = i^r(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} (\sqrt{2\pi})^r \frac{e^{if}\xi_1 \dots \xi_r}{\sqrt{|det(\omega_f)|}}.$$

Ce qui se simplifie si $(\eta_1, \dots \eta_r)$ est orthonormée pour $-\widetilde{\omega}_f$ en :

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) = i^r(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} (2\pi)^{\frac{r}{2}} e^{if}\xi_1 \dots \xi_r.$$

3.2. Représentations irréductibles et caractères de G. Comme dans le cas où $\mathfrak{g}_0 = 1$, les représentations irréductibles complexes de $\mathfrak{g}$ pseudoabélienne sont données par un élément de $\mathfrak{g}^*$ et la représentation irréductible de $C(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f, \widetilde{\omega}_f)$.

3.2.1. *Cas r pair ($r = 2d$).* Si r est pair ($r = 2d$), on obtient, pour le caractère sur G (supergroupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ pseudo-abélienne) composé avec exp, la formule :

$$\begin{aligned} Str(\rho_f \circ \exp) &= (-2i)^d (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \Big(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\Big)^r e^{if}\xi_1 \dots \xi_r, \\ &= (-1)^d e^{if}\xi_1 \dots \xi_r, \end{aligned}$$

D'où un même rapport (toujours avec $r = 2d$) entre cette supertrace et la transformée de Fourier de M_f :

$$\begin{aligned} Str(\rho_f \circ \exp) &= \frac{(-2i)^d}{(2e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\pi})^m} \int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f), \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^d} \int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f). \end{aligned}$$

3.2.2. *Cas r impair ($r = 2d+1$).* Si r est impair la représentation obtenue est alors égale à la représentation avec changement de parité. On a des relations similaires au cas $dim(\mathfrak{g}_0) = 1$:

$$Qtr(\rho_f \circ \exp) = (-2i)^d (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \Big(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\Big)^r e^{if} \xi_1 \dots \xi_r,$$

et

$$Qtr(\rho_f \circ \exp) = \frac{(-2i)^d}{(2e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\pi})^m} \int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f).$$

4. Cas pseudo-abélien tordu par l'action d'un tore

Soit $\mathfrak{a}$ une superalgèbre de Lie pseudo-abélienne et T un tore d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ agissant (de manière semi-simple) sur $\mathfrak{a}_1$ de sorte que les formes bilinéaires $(.,.)_k$ définies plus haut soient toutes T-invariantes (on vérifie que cela ne dépend pas de la base $(Z_1, \dots, Z_n)$ de $\mathfrak{a}_0$ choisie). On étend l'action de T à $\mathfrak{a}$ de manière triviale sur $\mathfrak{a}_0$. On pose alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$. L'action de $\mathfrak{t}$ sur $\mathfrak{a}$ et les crochets dans $\mathfrak{t}$ (trivial) et dans $\mathfrak{a}$ munissent naturellement $\mathfrak{g}$ d'une structure de superalgèbre de Lie. On note G un supergroupe connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. C'est le produit semi-direct de T et d'un supergroupe A d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$.

4.1. Transformée de Fourier. Soit $f \in \mathfrak{g}_0^*$. On a $\mathfrak{g}_f \supset \mathfrak{g}_0$, M_f est donc de dimension $(0, r)$. On écrit $f = f' + f''$ avec $f'' \in \mathfrak{a}_0^*$ et $f' \in \mathfrak{t}^*$. On suppose toujours que pour tout X dans $\mathfrak{g}_1$, $f([X, X]) \leq 0$

Si $f'' = 0$, alors $\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g}$ (car $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$), et $M_f = \{f\}$. On conserve les mêmes notations que précédemment pour ω_f, $\widetilde{\omega}_f$ et μ_f. Dans ce cas, on a :

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) = e^{if}.$$

On a de façon générale $\mathfrak{g}_f = \mathfrak{a}_{f''} \oplus \mathfrak{t}(\supset \mathfrak{g}_0)$. L'orbite M_f est donc isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$. On suppose donnée une orientation de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$. On veut calculer la transformée de Fourier de l'orbite au voisinage de X dans $\mathfrak{g}(X)$. Ici $\mathfrak{g}_0$ n'est pas central dans $\mathfrak{g}$. En fait, si l'on écrit $X = X' + X''$ avec $X'' \in \mathfrak{a}_0$ et $X' \in \mathfrak{t}$, on a $\mathfrak{g}(X) = \mathfrak{g}(X') = \mathfrak{g}_0 \oplus Ker_{\mathfrak{g}_1}(ad(X'))$. Distinguons maintenant deux cas suivant que $\mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}_f$ ou non.

Supposons dans un premier temps $\mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}_f$. Dans ce cas on a $M_f(X) = \{f\}$. On note τ la représentation de $\mathfrak{g}(X)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$. Comme $\mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}_f$, $\tau(X)$ est inversible, et comme $-\widetilde{\omega}_f$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$, nécessairement, $dim(M_f) = dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f) = (0,m)$ avec m pair (i.e. $m = 2d$). Afin d'écrire la formule de localisation pour la transformée de Fourier de M_f au voisinage de X dans $\mathfrak{g}(X)$, il nous faut de plus une forme symplectique $\mathfrak{g}(X)$-invariante sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$. Une telle forme nous est donnée par $\mathcal{B}(.,.) := \widetilde{\omega}_f(ad(X).,.)$. Cela nous fournit en outre une orientation de $\widehat{M}_f$. On pose $\epsilon(X) = 1$ si cette orientation est égale à celle choisie à priori et $\epsilon(X) = -1$ dans le cas contraire. La formule de localisation donne alors au voisinage de X dans $\mathfrak{g}(X)$:

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) = \epsilon(X)(2\pi)^d \frac{e^{if}}{Spf \circ \tau}.$$

Or comme $\mathcal{B}(ad(X).,.)$ est un produit scalaire, on a

$$\Big(Spf \circ \tau(X)\Big)^{-1} = \frac{1}{i^d}\sqrt{|det(\tau(X))|},$$

On note $Spf_{-\widetilde{\omega}_f}$ le superpfaffien obtenu avec la forme supersymplectique $-\widetilde{\omega}_f$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$ (c'est simplement le pfaffien ordinaire définit sur $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f, -\widetilde{\omega}_f)$). On a alors la relation suivante :

$$\epsilon(X)\Big(Spf \circ \tau(X)\Big)^{-1} = Spf_{-\widetilde{\omega}_f}\tau(X).$$

On en déduit :

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) = (2\pi)^d\Big(Spf_{-\widetilde{\omega}_f} \circ \tau\Big)e^{if}.$$

On ne suppose plus maintenant que $\mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}_f$. La variété des zéros de X, $M_f(X)$ est isomorphe à $\mathfrak{g}(X)/(\mathfrak{g}(X) \cap \mathfrak{g}_f)$. De plus on a $M_f = M_f(X) \times N$ avec N isomorphe à $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_f + \mathfrak{g}(X))$. C'est-à-dire M_f est isomorphe au fibré normal à $M_f(X)$ dans M_f, et ce en tant que fibré $\mathfrak{g}(X)$-équivariant. En effet on a une représentation τ de $\mathfrak{g}(X)$ dans N car $[\mathfrak{g}(X), \mathfrak{g}_f] \subset \mathfrak{g}_f \oplus \mathfrak{g}(X)$ ($[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}(X)] \subset \mathfrak{g}(X)$, $[(\mathfrak{g}_f)_1, \mathfrak{g}(X)_1] \subset \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_f$ et enfin comme $\mathfrak{g}(X)_0 \subset \mathfrak{g}_f$, $[\mathfrak{g}(X)_0, \mathfrak{g}_f] \subset \mathfrak{g}_f$).

Les mêmes raisonnements que plus haut permettent de définir une superstructure euclidienne $\mathfrak{g}(X)$-invariante sur N (c'est-à-dire une forme symplectique $\mathfrak{g}(X)$-invariante sur l'espace vectoriel N), une orientation sur $\widehat{N}$ (remarque : la donnée de ω_f donne une orientation de N, $M_f(X)$ et M_f), et assurent $dim(N) = 2d$. On pose comme précédemment $\epsilon(X) = \pm 1$ suivant que cette orientation correspond à l'orientation donnée à priori ou non. On note τ la représentation de $\mathfrak{g}(X)$ sur N. La forme d'Euler équivariante de M_f (qui est un fibré équivariant trivial sur $M_f(X)$ donc il a une connexion G-invariante triviale de courbure nulle) est alors $\mathcal{E}_{\mathfrak{g}} = \frac{Spf\circ\tau}{(-2\pi)^d}$. La formule de localisation donne sur un voisinage ouvert U de X dans $\mathfrak{g}(X)$:

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) = (-2\pi)^d \Big(Spf_{-\widetilde{\omega}_f} \circ \tau\Big) \int_{M_f(X)} \Big(\exp(i\mu_f + \omega_f|_{M_f(X)})\Big).$$

Soit $X \in \mathfrak{g}_0$, on note $\mathfrak{h}(X)$ le centralisateur de $\mathfrak{g}(X)_1$ dans $\mathfrak{g}(X)$ (on a $X \in \mathfrak{h}(X)$). L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(X)$ est pseudo-abélienne, et, si $f = f' + f''$, $M_f(X)$ est l'orbite de $f'' \in \mathfrak{a}_0^* \subset \mathfrak{h}(X)^*$ dans $\mathfrak{h}(X)^*$ pour l'action coadjointe du sous groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(X)$. L'intégrale du second membre se calcule alors comme précédemment. On pose $dim(M_f(X)) = r$ et on suppose choisi une base $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ de $\mathfrak{g}_1$ telle que après passage au quotient, $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ soit une base orientée, orthonormée de $\mathfrak{g}(X)/(\mathfrak{g}(X)\cap\mathfrak{g}_f)$. On note $(\xi_1, \dots \xi_m)$ la base duale associée. On obtient la formule suivante sur un voisinage ouvert U' de X dans $\mathfrak{h}(X)$ inclus dans $U \cap \mathfrak{h}(X)$:

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f) = i^{r+m}(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}(2\pi)^{\frac{r+m}{2}}\Big(Spf_{-\widetilde{\omega}_f} \circ \tau\Big)e^{if}\xi_1 \dots \xi_r.$$

4.2. Représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ et caractères des représentations de $\mathfrak{g}$ associées. Une représentation complexe irréductible de $\mathfrak{g}$ est donnée par un élément de $\mathfrak{g}_0^*$. Soit $f \in \mathfrak{g}_0^*$, on écrit $f = f' + f''$, avec $f' \in \mathfrak{t}^*$ et $f'' \in \mathfrak{a}_0^*$. La donnée de f' permet de définir une représentation $V_{f'}$ unitaire irréductible de dimension 1 de $\mathfrak{t}$ sur laquelle on fait agir $\mathfrak{a}$ de manière triviale. La donnée de f'' permet de définir une représentation irréductible $V_{f''}$ de $\mathfrak{a}$ comme précédemment. Or $\mathfrak{t}$ agit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$ en préservant $\widetilde{\omega}_f$. On a donc un morphisme de $\mathfrak{t}$ dans $C(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''} \otimes \mathbb{C}$, $\frac{-i}{2}f''([.,.]))$. On fait donc agir $\mathfrak{t}$ sur $V_{f''}$ par composition de ce morphisme et de l'action de $C(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''} \otimes \mathbb{C}, \frac{-i}{2}f''([.,.]))$. On pose alors $V_f := V_{f'} \otimes V_{f''}$. Si la forme bilinéaire $f([.,.])$ est définie sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''}$, cette représentation est unitaire. On note ρ_f (resp. $\rho_{f'}$, resp. $\rho_{f''}$) la représentation de G dans V_f (resp. $V_{f'}$, resp. $V_{f''}$). On a comme fonction sur G :

$$Str \circ \rho_f = (Str \circ \rho_{f'})(Str \circ \rho_{f''}).$$

Si exp désigne l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G, on a :

$$Str \circ \rho_{f'} \circ \exp = e^{if'}.$$

Reste donc à calculer $Str \circ \rho_{f''} \circ \exp$. On garde les mêmes notations que précédemment pour les fonctions coordonnées sur $\mathfrak{a}$. En fait pour vérifier la compatibilité avec la formule de Kirillov là où l'on sait calculer la transformée de Fourier de l'orbite correspondant à f, il suffit de connaître cette fonction sur un voisinage de X dans $\mathfrak{g}(X)$ pour X dans $\mathfrak{g}_0$. On écrit $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''} = \mathfrak{q}\oplus\mathfrak{p}$ (avec $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}(X)/(\mathfrak{g}(X)\cap(\mathfrak{g}_{f''})_1)$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_{f''} + \mathfrak{g}(X))$), la somme étant orthogonale pour $f''([.,.])$. La représentation de $\mathfrak{g}(X)$ dans $V_{f''}$ est un élément de $C^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''}\otimes\mathbb{C}, \frac{-i}{2}f''([.,.]))_{\mathcal{O}(\mathfrak{h}(X))}$. Plus précisément, soient $(e_1,\dots,e_r)$ une base de $\mathfrak{q}$ et $(f_1,\dots,f_{2d})$ une base de $\mathfrak{p}$, on a si on considère les e_i et les f_j comme des éléments de $C(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''}\otimes\mathbb{C}, \frac{-i}{2}f''([.,.])) \subset End(V_{f''})$:

$$\rho_{f''} = f'' + \sum_{i=1}^{r} e_i\xi_i + \sum_{j=1}^{d} f_{2j-1}f_{2j}x_j,$$

où les ξ_i sont des fonctions coordonnées sur $\mathfrak{g}_1$ (duales d'une base $(e'_1,\dots,e'_r)$ de $\mathfrak{g}(X)_1$ qui donne $(e_1,\dots,e_r)$ après passage au quotient) et les x_i sont des éléments de $\mathcal{O}(\mathfrak{t}) \subset \mathcal{O}((\mathfrak{h}(X))_0)$. On pose $\rho_{f''} = \rho_1 + \rho_2$ avec $\rho_1 = f'' + \sum_{i=1}^{r}\xi_i e_i$ et $\rho_2 = \sum_{j=1}^{d} x_j f_{2j-1}f_{2j}$. On a $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$. On note $\widetilde{\omega}_f$ la forme $f([.,.])$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$. On note enfin $J, j^{\frac12}$ et H les fonctions sur $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''})$ définies à la section **II.2**. On note ad la représentation de $\mathfrak{h}(X)$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''}$ issue de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Sa restriction à $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}(X)$ est nulle. De plus, soit $X \in \mathfrak{h}(X)$, alors $ad(X)|_{\mathfrak{q}} = 0$. Donc $(H\circ ad)|_{\mathfrak{q}} = Id_{\mathfrak{q}}$. On pose pour alléger la notation $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''}, \frac{-i}{2}\widetilde{\omega}_{f''})_{\mathcal{O}(\mathfrak{h}(X))}$ et $S = S(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{f''})_{\mathcal{O}(\mathfrak{h}(X))}$ et on note σ l'isomorphisme de superespaces vectoriels entre $\mathcal{C}$ et S. On obtient la formule suivante grâce à la commutation de ρ_1 et ρ_2, au fait que $(H\circ ad)|_{\mathfrak{q}} = Id_{\mathfrak{q}}$ et aux formules de la section **II.2** :

$$\sigma(\exp_{\mathcal{C}}(\rho_{f''})) = (j^{\frac12}\circ ad)Det(H^{\frac12}\circ ad)\Big((H^{\frac12}\circ ad).\exp_S(\sigma(\rho_{f''}))\Big).$$

On note encore $\rho_{f''}$ la représentation de G déduite de la représentation $\rho_{f''}$ de $\mathfrak{g}$ et exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. On obtient sur un voisinage ouvert U de X dans $\mathfrak{h}(X)$ grâce à la proposition **II.2.3** si $(e_1,\dots,e_r)$ est orthonormée orientée pour $-\widetilde{\omega}_f$:

-si $r = 2d$:

$$\begin{aligned} Str\circ\rho_{f''}\circ\exp &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\Big(\frac{e^{\frac{i3\pi}{4}}}{\sqrt2}\Big)^r(-2i)^d(j^{\frac12}|_U)\Big(Spf_{-\widetilde{\omega}_f}\circ\tau\Big)\Big|_U e^{if''}\xi_1\dots\xi_r,\\ &= (j^{\frac12}|_U)\Big(Spf_{-\widetilde{\omega}_f}\circ\tau\Big)\Big|_U e^{if''}\xi_1\dots\xi_r.\end{aligned}$$

-si $r = 2d-1$:

$$\begin{aligned} Qtr\circ\rho_{f''}\circ\exp &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\Big(\frac{e^{\frac{i3\pi}{4}}}{\sqrt2}\Big)^r(-2i)^d(j^{\frac12}|_U)\Big(Spf_{-\widetilde{\omega}_f}\circ\tau\Big)\Big|_U e^{if''}\xi_1\dots\xi_r.\\ &= -\sqrt2 e^{\frac{-i3\pi}{4}}(j^{\frac12}|_U)\Big(Spf_{-\widetilde{\omega}_f}\circ\tau\Big)\Big|_U e^{if''}\xi_1\dots\xi_r.\end{aligned}$$

Remarque: τ est ici la représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}(X)+\mathfrak{g}_f)$, c'est bien le même que dans la sous-section précédente.

On obtient finalement :

THÉORÈME 4.1. *On a sous les conditions précédentes pour tout X dans $\mathfrak{g}_0$ sur un voisinage ouvert U de X dans $\mathfrak{h}(X)$:*

-si $r=2d$:

$$Str\circ\rho_f\circ\exp|_U=\Big(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\Big)^r\frac{(-2i)^d j^{\frac{1}{2}}|_U}{i^m(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}(2\pi)^{\frac{r+m}{2}}}\int_{M_f}\exp(i\mu_f+\omega_f)\Big|_U.$$

-si $r=2d-1$:

$$Qtr\circ\rho_f\circ\exp|_U=\Big(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\Big)^r\frac{(-2i)^d j^{\frac{1}{2}}|_U}{i^m(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}(2\pi)^{\frac{r+m}{2}}}\int_{M_f}\exp(i\mu_f+\omega_f)\Big|_U.$$

5. Transformées de Fourier d'orbites coadjointes de supergroupes basiques classiques

Soit G un supergroupe de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On suppose que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est basique classique et que $\mathfrak{g}$ contient une sous superalgèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}(=\mathfrak{h}_0)$ soit compacte.

On note $\mathcal{B}$ une forme bilinéaire supersymétrique paire G-invariante et non-dégénérée de $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est basique classique). On se donne $f\in\mathfrak{h}^*(\subset\mathfrak{g}^*$ grâce à $\mathcal{B})$ tel que pour tout X dans $\mathfrak{g}_1$ on ait $f(X^2)\leq 0$. On note M_f l'orbite coadjointe de f dans $\mathfrak{g}^*$. On a $M_f\simeq G/G_f$ où G_f est le stabilisateur de f dans G. On note $\mathfrak{g}_f$ la superalgèbre de Lie de G_f. On suppose que $\mathfrak{g}_f=(\mathfrak{g}_f)_0$, et que G_f est connexe compact. Soit $H_f\in\mathfrak{h}$ tel que $f=\mathcal{B}(H_f,.)$. Alors $\mathfrak{g}_f=Ker(ad(H_f))$ et $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_f\oplus Im(ad(H_f))$ car l'action adjointe de H_f sur $\mathfrak{g}$ est semi-simple. On pose $\mathfrak{r}:=Im(ad(H_f))$. Comme G_f est un groupe compact Il existe sur $\mathfrak{r}_0$ un produit scalaire G_f-invariant. De plus $\mathcal{B}$ fournit un forme symplectique G_f-invariante sur l'espace vectoriel $\mathfrak{r}_1$. On en déduit une superstructure euclidienne G_f-invariant sur $\mathfrak{r}$ que l'on note $(.,.)$. Donc M_f possède une superstructure euclidienne G-invariante. On reprend les notations de la section **VI .1** pour α_f,μ_f et ω_f. Pour calculer la transformée de Fourier de M_f il nous faut de plus supposer que M_f est tempérée.

On note W le groupe de Weil de G_0 et on pose $W_f=\{w\in W, w.f=f\}$. On se place maintenant au voisinage d'un élément X régulier de $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire tel que $\mathfrak{g}(X)=\mathfrak{h}$. Les points fixes de X sont alors isolés, et plus précisément comme dans la situation classique analogue on a :

$$M_f(X)=\{w.f, w\in W/W_f\}.$$

On note encore ω_f la superstructure symplectique sur M_f et μ_f l'application moment associée. On peut dans ce cas appliquer la formule de localisation à la transformée de Fourier de M_f. En effet toutes les hypothèses sont remplies. En particulier la condition $(*)$ est ici triviale puisque le fibré normal au dessus d'une composante connexe de $M_f(X)$ est un espace vectoriel, il possède donc une superconnexion triviale $\mathfrak{g}(X)(=\mathfrak{h})$-invariante. Il suffit simplement de calculer $\tau^*_{w.f}(Spf)$ pour tout $w \in W/W_f$ où $\tau_{w.f}$ est la représentation de $\mathfrak{g}(X)$ dans $T_{w.f}M_f \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{w.f}$. On note Δ le système de racines de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Pour $\alpha \in \Delta$ on pose $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \forall H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, [H,X] = \alpha(H)X\}$. Comme $\mathfrak{h}_0$ est compacte on a $\Delta \subset i\mathfrak{h}_0^*$. On définit pour toute racine α, $H_\alpha \in i\mathfrak{h}_0$ tel que pour tout $H \in \mathfrak{h}_0$ $\alpha(H) = \mathcal{B}(H_\alpha, H)$. On note comme d'habitude Δ_0 l'ensemble des racines α telles que $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_0 \cap \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ et Δ_1 l'ensemble des racines α telles que $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_1 \cap \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$.

On pose $\Delta_f^+ = \{\alpha \in \Delta, if(H_\alpha) > 0\}$. On pose pour toute racine α, $\mathfrak{g}^{i\alpha} = (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$. On a :

$$\mathfrak{r} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_f} \mathfrak{g}^{i\alpha}.$$

Soit α dans Δ_f^+. Soit X_α dans $\mathfrak{g}_\alpha$. Alors $\overline{X_\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. On pose :

$$e_\alpha = X_\alpha + \overline{X_\alpha} \qquad \text{et} \qquad f_\alpha = i(X_\alpha - \overline{X_\alpha}).$$

Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \neq \mathfrak{psl}(2,2)$, les vecteurs e_α et f_α forment une base de $\mathfrak{g}^{i\alpha}$. On peut alors choisir les X_α de sortent que la base de $\mathfrak{r}$ constituée des e_α et des f_α soit orthonormée et que l'élément $\prod_{\alpha \in (\Delta_f^+)_0} e_\alpha \wedge f_\alpha$ détermine la même orientation de $\mathfrak{r}_0$ que ω_f. Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = (2,2)$, ce qui précède demeure pour $\mathfrak{g}_0$. Par contre, il y a deux racines impaires, soit α et β, et elles vérifient $dim(\mathfrak{g}^{i\alpha}) = dim(\mathfrak{g}^{i\beta}) = (0,4)$. Dans ce cas Il faut choisir une base (X_α, X'_α) de $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. (X_β, X'_β) de $\mathfrak{g}_\beta$) et on obtient une base $(e_\alpha, e'_\alpha, f_\alpha, f'_\alpha)$ de $\mathfrak{g}^{i\alpha}$ ($(e_\beta, e'_\beta, f_\beta, f'_\beta)$ de $\mathfrak{g}^{i\beta}$). Là encore, les choix peuvent être ajustés de sorte que ces bases soient symplectiques.

Si $\alpha \in \Delta_1$ alors par hypothèse on a $f(e_\alpha^2) \leq 0$. Or $f(e_\alpha^2) = -\lambda_\alpha^2 f([X_\alpha, X_{-\alpha}]) = -\lambda_\alpha^2 \mathcal{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) f(H_\alpha)$, donc $\mathcal{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \in i\mathbb{R}^-$. D'autre part on a $\mathcal{B}(e_\alpha, f_\alpha) = 2i\lambda_\alpha^2 \mathcal{B}(X_\alpha, X_{-\alpha})$ et le choix de $\lambda_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2i\mathcal{B}(X_\alpha, X_{-\alpha})}}$ assure $\mathcal{B}(e_\alpha, f_\alpha) = 1$.

Si $\alpha \in \Delta_0$ alors $\mathcal{B}(e_\alpha, e_\alpha) = \mathcal{B}(f_\alpha, f_\alpha) = -2\lambda_\alpha^2 \mathcal{B}(X_\alpha, X_{-\alpha})$. De plus, si α et β sont deux racines distinctes avec $\alpha \neq \pm\beta$, alors $\mathcal{B}(\mathfrak{g}_{i\alpha}, \mathfrak{g}^{i\beta}) = 0$ $\mathfrak{g}^{i\alpha}$. On définit alors un produit scalaire $\mathfrak{h}$-invariant en posant pour $(\mathfrak{g}^{i\alpha}, \mathfrak{g}^{i\beta}) = 0$ pour $\alpha, \beta \in \Delta_f^+$ et $\alpha \neq \beta$ et $(.,.)\Big|_{\mathfrak{g}^{i\alpha}} = \alpha_\alpha \mathcal{B}\Big|_{\mathfrak{g}^{i\alpha}}$ où $\epsilon_\alpha = \frac{-\mathcal{B}(X_\alpha, X_{-\alpha})}{|\mathcal{B}(X_\alpha, X_{-\alpha})|}$. Le choix de $\lambda_\alpha = \frac{1}{\sqrt{-2\epsilon_\alpha \mathcal{B}(X_\alpha, X_{-\alpha})}}$ assure alors que la base (e_α, f_α) est orthonormée. De plus avec ce choix $f([e_\alpha, f_\alpha]) = if(H_\alpha) > 0$. L'élément $\prod_{\alpha \in \Delta_f} e_\alpha \wedge f_\alpha$ détermine donc la même orientation de $\mathfrak{r}_0 \simeq T_f M_f$ que ω_f.

On a pour tout Y dans $\mathfrak{h}_0$, $\tau_f(Y).e_\alpha = -i\alpha(Y) f_\alpha$ et $\tau_f(Y).f_\alpha = i\alpha(Y) e_\alpha$. Pour la représentation $\tau_{\omega.f}$ de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{r}$, on a en posant $dim(\mathfrak{r}) = (2n, 2m)$, $Y \in U_{(n,n)}$

(l'ouvert $U_{p,q}$ a été défini à la partie **II**). Finalement on a, pour tout Y dans un voisinage de X dans $\mathfrak{h}_0$:

$$\int_{M_f} \exp(i\mu_f + \omega_f)(Y) = (-2i\pi)^n \sum_{w \in W/W_f} \exp(w.f(Y)) \frac{\prod_{\alpha \in (\Delta_f)_1^+} iw.\alpha(Y)}{\prod_{\alpha \in (\Delta_f)_0^+} iw.\alpha(Y)}.$$

5.1. Transformée de Fourier de $SU(2,4)$ au voisinage d'un élément singulier de $\mathfrak{h}$. On considère le supergroupe $SU(2,4)$ de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2,4)$. On a alors $\mathfrak{su}(2,4)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,4) = A_{2,4}$. On réalise $\mathfrak{su}(2,4)$ comme la superalgèbre de Lie de matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathfrak{su}(2), D \in \mathfrak{su}(4)$ et $C = i^t\overline{B}$. On considère la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ des matrices diagonales imaginaires pures de trace nulle. On la munit de la forme bilinéaire supersymétrique non-dégénérée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-invariante notée $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}(X,Y) = str(XY)$ pour tout X et tout Y dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On note δ_i la forme linéaire qui envoie une matrice M de $\mathfrak{h}$ sur le $i^{\text{ème}}$ coefficient de A, et ϵ_j celle qui envoie M sur le $j^{\text{ème}}$ coefficient de D. Un système positif de racines paires de $\mathfrak{sl}(2,4)$ est donné par

$$\Delta_0^+\{\delta_2 - \delta_1, \epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_1, \epsilon_4 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_2, \epsilon_4 - \epsilon_2, \epsilon_4 - \epsilon_3\},$$

et de racines impaires

$$\Delta_1^+ = \{\epsilon_1 - \delta_1, \epsilon_2 - \delta_1, \epsilon_3 - \delta_1, \epsilon_4 - \delta_1, \epsilon_1 - \delta_2, \epsilon_2 - \delta_2, \epsilon_3 - \delta_2, \epsilon_4 - \delta_2\}.$$

Soit $\alpha \in \Delta$. On reprend les notations de la section précédente. On peut préciser $X_\alpha, e_\alpha, f_\alpha$. En effet, on peut imposer $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ et prendre :

$$e_\alpha = X_\alpha + X_{-\alpha}, \qquad f_\alpha = i(X_\alpha - X_{-\alpha}).$$

Soit $f \in \mathfrak{h}^*$. On note $\mathfrak{g}_f$ le stabilisateur de f dans $\mathfrak{g}$. On suppose f typique, c'est-à-dire $\mathfrak{g}_f = (\mathfrak{g}_f)_0$. On suppose également que pour tout X dans $\mathfrak{g}_1$ on a $f(X^2) \leq 0$. On pose $\Delta_f = \{\alpha \in \Delta, \mathfrak{g}^{i\alpha} \subset \mathfrak{g}_f\}$. Comme f est typique, $\Delta_f = (\Delta_f)_0$. En particulier, on a G_f compact.

On pose $\mathfrak{r} = \bigoplus_{\alpha \notin \Delta_f} \mathfrak{g}^{i\alpha}$. C'est un supplémentaire $\mathfrak{g}_f$-invariant de $\mathfrak{g}_f$ isomorphe à l'espace tangent de M_f en f. La forme $\mathcal{B}$ restreinte à l'espace vectoriel $(\mathfrak{r}_f)_1$ définit une forme symplectique G_f-invariante. Comme G_f est compact, il existe sur $\mathfrak{r}_0$ un produit scalaire G_f-invariant. Finalement il existe sur $\mathfrak{r}$ un superproduit scalaire G_f-invariant. On a donc une superstructure euclidienne G-invariante sur M_f.

De plus comme G et G_f sont compact, M_f est une supervariété compacte et donc la transformée de Fourier de M_f a un sens et est une fonction de $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ et non seulement une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$. On la note $\mathcal{F}(M_f)$. Comme $\mathcal{F}(M_f) \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$, la valeur de $\mathcal{F}(M_f)$ en un élément singulier H de $\mathfrak{h}$ est égale à la limite de $\mathcal{F}(M_f)(H')$ pour $H' \to H$, H' régulier.

On calcule la transformée de Fourier de M_f au voisinage de $H \in \mathfrak{h}$. On note $G(H)$ le stabilisateur de H dans G. C'est un supergroupe connexe de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}(H)$ le centralisateur de H dans $\mathfrak{g}$. La variété $M_f(H)$ des zéros de H est alors isomorphe à $G(H)/(G(H) \cap G_f)$. On pose encore $n_f(H) := \{Y \in \mathfrak{g}, [Y, H] \in \mathfrak{g}_f\}$. L'espace tangent en f à $M_f(H)$ est alors isomorphe à $\mathfrak{g}(H)/(\mathfrak{g}(H) \cap \mathfrak{g}_f)$ et la fibre de son fibré normal $T_N(M_f(H))$ en f est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_f(H)$. On pose enfin pour alléger l'écriture $G_f(H) := G(H) \cap G_f$ et $\mathfrak{g}_f(H) := \mathfrak{g}(H) \cap \mathfrak{g}_f$.

On pose $\mathfrak{r}' = \bigoplus_{\alpha \in D, \mathfrak{g}^{i\alpha} \not\subset \mathfrak{n}_f(H)} \mathfrak{g}^{i\alpha}$. C'est un supplémentaire $\mathfrak{g}_f(H)$-invariant de $\mathfrak{n}_f(H)$ dans $\mathfrak{g}$.

D'autre part, $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}(H)$ est un supplémentaire $\mathfrak{g}_f(H)$-invariant de $\mathfrak{g}_f(H)$ dans $\mathfrak{g}(H)$. La fibration $G(H) \longrightarrow G(H)/G_f(H)$ admet donc une superconnexion $G_f(H)$-invariante et par conséquent le fibré $T_N(M_f(H))$ également.

Pour appliquer la formule de localisation il nous faut maintenant une structure euclidienne $G_f(H)$-invariante sur $T_N(M_f(H))$ et vérifier la condition $(*)$. Pour cela nous allons particulariser f et H (en particulier $(*)$ n'est pas automatiquement réalisée pour f et H quelconques dans $\mathfrak{h}^*$ et $\mathfrak{h}$).

On considère $f \in \mathfrak{h}^*$ tel que $f = i(\delta_1 + \delta_2 + 2\epsilon_1 + 3\epsilon_2 + 4\epsilon_3 + 5\epsilon_4)$. On a alors $\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g}^{i(\delta_2 - \delta_1)} \oplus \mathfrak{h}$, c'est-à-dire les matrices telles que $B = C = 0$ et D diagonale. De plus on a $f(X^2) < 0$ pour tout X non nul dans $\mathfrak{g}_1$.

On note h_i la matrice $(6, 6)$ qui a des zéros partout et un 1 sur le $i^{(\grave{e}me)}$ élément de la diagonale. On considère $H = h_1 + 2h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 \in \mathfrak{h}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}(H) =& \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_1+\epsilon_1)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_1+\epsilon_2)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_1+\epsilon_3)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_1+\epsilon_4)} \\
& \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_1-\epsilon_2)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_1-\epsilon_3)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_1-\epsilon_4)} \\
& \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_2-\epsilon_3)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_2-\epsilon_4)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_3-\epsilon_4)}, \\
\mathfrak{r}' =& \mathfrak{g}^{i(\delta_2+\epsilon_1)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_2+\epsilon_2)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_2+\epsilon_3)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_2+\epsilon_4)}. \\
\mathfrak{q} =& \mathfrak{g}^{i(\delta_1+\epsilon_1)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_1+\epsilon_2)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_1+\epsilon_3)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\delta_1+\epsilon_4)} \\
& \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_1-\epsilon_2)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_1-\epsilon_3)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_1-\epsilon_4)} \\
& \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_2-\epsilon_3)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_2-\epsilon_4)} \oplus \mathfrak{g}^{i(\epsilon_3-\epsilon_4)},
\end{aligned}$$

Le fibré $T_N(M_f(H))$ est donc un fibré totalement impair. La restriction de $-\mathcal{B}$ à $\mathfrak{r}'$ est alors un superproduit scalaire $\mathfrak{g}_f(H)$-invariant sur $\mathfrak{r}'$. Par conséquent le fibré $T_N(M_f(H))$ est muni d'une superstructure euclidienne $G_f(H)$-invariante.

On a alors pour $X \in \mathfrak{r}'_1 = \mathfrak{r}'$ et $Y \in \mathfrak{q}_1$;

$$-\mathcal{B}([Y^2, X], X) = -2\mathcal{B}(Y^2, X^2) \leq 0.$$

En effet, on a :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ L_X \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & {}^t\overline{L}_X \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix},$$

où $L_X = (x_1, \ldots, x_4)$ est une un matrice complexe $(1, 4)$. De même on a :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} L_Y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} {}^t\overline{L}_Y & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix},$$

où $L_Y = (y_1, \ldots, y_4)$ est également une un matrice complexe $(1, 4)$. On a alors :

$$-\mathcal{B}(X^2, Y^2) = -\sum_{1 \leq i,j \leq 4} (x_i y_i)\overline{(x_j y_j)}.$$

Or les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont 0 et 4. La forme hermitienne qu'elle définit est donc positive. Ceci implique le résultat.

La condition $(*)$ est donc vérifiée.

Il faut en fait vérifier ces condition en remplaçant f par wf et ce pour tout $w \in W/W_f$. Or pour tout w on a $\mathfrak{g}_{wf} = \mathfrak{g}_f$ et tout ce que l'on vient de dire demeure inchangé.

On peut donc appliquer la formule de localisation pour calculer la transformée de Fourier de M_f au voisinage de H dans $\mathfrak{g}(H)(= \{X \in \mathfrak{g}, [X, H] = 0\} \subset \mathfrak{n}_f(H))$.

On note $M_f(H)^0$ la composante connexe de $M_f(H)$ contenant f. On note $\mathcal{E}_{wf}$ la forme d'Euler $G(H)$ équivariante du fibré $T_N(M_{wf}(H)^0)$ et j_w l'injection de $M_{wf}(H)^0$ dans M_{wf}. On a alors la formule :

$$\int_{M_f} \exp(\alpha_f) = (2\pi)^{\frac{n+m}{2}} \sum_{w \in W/W_f} \int_{M_{wf}(H)^0} \frac{j_w^*(\exp(\alpha_{wf}))}{\mathcal{E}_{wf}},$$

où (n, m) est la dimension des fibres de $T_N M(H)_0$.

On identifie $M_f(H)^0$ avec $G(H)/G_f(H)$. On note $\hat{f}$ la restriction de f à $\mathfrak{g}(H)$. On peut alors identifier $M_f(H)^0$ avec l'orbite coadjointe de $G(H)$ dans $\mathfrak{g}(H)$ passant par $\hat{f}$. On la note $M_{\hat{f}}$ On peut alors écrire au voisinage de H dans $\mathfrak{g}(H)$:

$$\int_{M_f} \exp(\alpha_f) = (2\pi)^{\frac{n+m}{2}} \sum_{w \in W/W_f} \int_{M_{\hat{f}}} \frac{\exp(\alpha_{\hat{f}})}{\mathcal{E}_{wf}}.$$

Bibliographie

[Bat79] M. Batchelor. The structure of supermanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 253 : 329–338, 1979.

[Ber87] F.A. Berezin. *Introduction to Superanalysis.* MPAM D. Reidel Publishing Company, 1987.

[BGV92] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators.* Springer-Verlag, 1992.

[BL77a] I. N. Bernstein and D. A. Leites. Integral forms and the stokes formula on supermanifolds. *Functional Analysis*, 11 : 55–56, 1977.

[BL77b] I. N. Bernstein and D. A. Leites. Integration of differential forms on supermanifolds. *Functional Analysis*, 11 : 70–71, 1977.

[BL81] I. N. Bernstein and D. A. Leites. Opérateurs différentiels invariants et représentations irréductibles des superalgèbres de lie de champs de vecteurs. *Selecta Math. Soviets*, pages 143–160, 1981.

[BS84] M. A. Baranov and A.S. Schwarz. Cohomologies of supermanifolds. *Functional Analysis*, 18(3) : 69–70, 1984.

[BV83a] N. Berline and M. Vergne. *Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation*, pages 53–67. Birkhäuser, 1983.

[BV83b] N. Berline and M. Vergne. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes. *Duke Mathematical Jounal*, pages 539–549, 1983.

[DeW84] B. DeWitt. *Supermanifolds.* Cambridge University Press, 1984.

[DG70] M. Demazure and P. Gabriel. *Groupes Algébriques, Tome I.* Masson, 1970.

[DV88] Michel Duflo and Michèle Vergne. *Orbites coadjointes et cohomologie equivariante*, volume 82 of *Progress in Mathematics*, pages 11–60. Birkäuser, 1988.

[DV93] M. Duflo and M. Vergne. Cohomologie équivariante et descente. *Astérisque*, 215 : 1–108, 1993.

[Gru94] C. Gruson. Description de certains groupes classiques. *Annales de l'institut Fourier*, Tome 44, Fascicule 1 : 39–63, 1994.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977.

[HHL89] J. Hilgert, K. H. Hofmann, and J. D. Lawson. *Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups.* Oxford University Press, 1989.

[Hör83] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Srpinger-Verlag, 1983.

[Jak94] H.P. Jakobsen. The full set of unitarizable highest weight modules of basic classical lie superalgebras. In *Memoirs of the AMS, Number 532*. AMS, 1994.

[Kac77a] V. G. Kac. Characters of typical representations of classical lie superalgebras. *Communications in Algebra*, pages 889–897, 1977.

[Kac77b] V. G. Kac. Lie superalgebras. *Advances in Mathematics*, 26 : 8–96, 1977.

[Kir76] A.A. Kirillov. *Elements of the Theory of representations*. Springer-Verlag, 1976.

[Kos77] B. Kostant. Graded manifolds, graded lie theory and prequantization. In *LNM 570*, pages 177–306. Springer-Verlag, 1977.

[KV93] S. Kumar and M. Vergne. Equivariant cohomology with generalized coefficients. *Astérisque*, 215 : 109–188, 1993.

[Lei80] D. A. Leites. Formulas for the caracters of irreductible finite-dimensional representations of simple lie superalgebras. *Functional Analysis*, 14 : 35–38, 1980.

[MQ86] V. Mathai and D. Quillen. Superconnections, thom classes, and equivariant differential forms. *Topology*, Volume 25, No 1 : 85–110, 1986.

[Nee93] K-H Neeb. Invariant subsemigroups of lie groups. In *Memoirs of the AMS, Number 499*. AMS, 1993.

[Nee94] K-H Neeb. The classification of lie algebras with invariant cones. *Journal of Lie theory*, 4 : 139–183, 1994.

[Par96] P. Paradan. *Formule de localisation en cohomologie équivariante*. PhD thesis, Université de Paris VII, 1996.

[Pen86] I. B. Penkov. Characters of typical irreducible finite dimensional $\mathfrak{q}_n$-modules. *Functional Analysis*, 20 : 37–45, 1986.

[Pen88] I. B. Penkov. Classical lie supergroups and lie superalgebras, and their representations. Prépublications de l'institut Fourier, 1988.

[SZ95] A. Schwartz and O. Zaboronsky. Supersymetry and lacalization. 1995.

[Var84] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. Springer-Verlag, 1974, 1984.

[Ver97] M. Vergne. Quantization of algebraic cones and vogan's conjecture. à paraitre au *Pacific Journal of Mathematics*, 1997.

[Vor91] T. Voronov. Geometric integration theory on supermanifolds. In *Mathematical Physics Reviews*, volume Volume 9, Part 1. Harwood Academic Publishers, 1991.

[VZ88] F. F. Voronov and A. V. Zorich. Integration on vector bundles. *Functional Analysis*, 22 : 14–25, 1988.