

Travaux et Thèmes de Recherche

Pascal Lavaud

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Pourquoi le super ?	2
2	Travaux	3
2.1	Présentation générale	3
2.2	Thèse (cf. [1] et [2])	4
2.3	Cohomologie équivariante des superfibrés symplectiques (cf. [3])	5
2.4	Superpfaffien (cf. [4])	5
2.5	Fonctions généralisées invariantes sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ à valeurs dans un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -module (cf. [5])	5
3	Projets de recherche :	6
3.1	Cadre général :	6
3.2	Recherche actuelle en cours de rédaction	7
3.2.1	Stratification de l'espace des orbites d'une algèbre de Lie semi-simple réelle	7
3.2.2	fonctions généralisées invariantes sur une algèbre de Lie semi-simple	8
3.2.3	Isomorphisme de Thom	8
3.3	Autres Problèmes en cours :	8
3.3.1	Fonctions généralisées invariantes sur \mathfrak{g} à valeurs dans un \mathfrak{g} -module	8
3.3.2	Inverse de la forme d'Euler équivariante	9
3.3.3	$\mathfrak{osp}(1, 2)$	9
3.4	Autres questions ouvertes	9
3.4.1	Modification de la différentielle équivariante	9
3.4.2	Superpfaffien et transformée de Fourier	10

1 Introduction

Le cadre général de mon travail est l'étude des représentations unitaires des supergroupes de Lie et l'analyse harmonique sur les supergroupes. En particulier, je m'intéresse à l'étude des caractères des représentations unitaires des supergroupes en relation avec l'étude géométrique des orbites coadjointes.

1.1 Pourquoi le super ?

Depuis la fin des années 60 et le début des années 70 les physiciens ont porté une attention de plus en plus grande aux théories supersymétriques. Ces théories n'ont cessé depuis de se développer notamment en raison du rôle qu'elles pourraient avoir dans la grande unification des interactions fondamentales.

D'un point de vue mathématique le principe de base du "super" consiste simplement à graduer les différents objets que l'on considère sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En particulier, la supergéométrie est la géométrie des espaces dont l'algèbre des fonctions est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée et est commutative au sens gradué. C'est donc la géométrie non commutative la plus simple que l'on puisse imaginer. Par exemple, on peut ainsi considérer qu'une variété M munie du faisceau Ω_M des formes différentielles sur M est une supervariété \widehat{M} dont les fonctions sont les formes différentielles sur M . On voit sur cet exemple très simple que l'introduction du vocabulaire "super" permet d'éclairer d'un jour nouveau des objet connus.

Il est une notion propre au super qui mérite une attention particulière : c'est la notion de changement de parité (elle est liée à la notion de supersymétrie des physiciens). Si $V = V_0 \oplus V_1$ est un superspace vectoriel on note ΠV le superspace vectoriel tel que $(\Pi V)_0 = V_1$ et $(\Pi V)_1 = V_0$. En particulier, si V est symplectique (au sens super) alors ΠV est euclidien et réciproquement. Cela éclaire le parallélisme remarqué depuis bien longtemps entre les notions d'algèbre symplectique et euclidienne (cf. par exemple la dualité de Howe...).

En particulier (comme remarqué par Cherednik et Duflo), la représentation métaplectique et les opérateurs de Dunkl interviennent naturellement dans l'étude de certaines superalgèbres de Lie. Certaines de leur propriétés deviennent alors plus naturelles.

2 Travaux

2.1 Présentation générale

On sait que l'on peut fabriquer des fonctions généralisées invariantes sur une algèbre de Lie \mathfrak{g} en intégrant des formes différentielles équivariantes sur une G -variété M (cf. les travaux de Berline-Vergne, Duflo, Duistermaat-Heckmann...). En particulier, la formule de Kirillov relie les transformées de Fourier des orbites coadjointes de G dans \mathfrak{g}^* aux caractères des représentations unitaires irréductibles de G . Pour calculer de telles intégrales un outil puissant est fourni par la formule de localisation de Berline-Vergne.

Il est naturel de chercher à étendre ces résultats à la situation "super". Je me suis donc intéressé à la généralisation au cadre supergéométrique de la cohomologie équivariante et de la formule de localisation de Berline-Vergne (cf. Thèse [1] et [2]). Le fait marquant de cette généralisation est l'obligation de considérer des formes équivariantes à coefficients généralisés. C'est à dire des fonctions généralisées invariantes sur \mathfrak{g} à valeurs dans les formes différentielles sur M . Dans la situation classique ces formes avaient été introduites par Kumar-Vergne.

Si $\mathcal{V} \rightarrow M$ est un fibré vectoriel euclidien G -équivariant, j'ai construit sous certaines conditions une forme de Thom équivariante à coefficients généralisés. Ici forme de Thom veut dire qu'elle est équivariante fermée, intégrable sur les fibres et d'intégrale 1. Cela m'a conduit à la notion de classe d'Euler équivariante. Classiquement, un représentant de cette classe est donné par le Pfaffien de la courbure d'une connexion équivariante sur \mathcal{V} . J'ai donc construit le superpfaffien qui est la généralisation "super" du pfaffien. Ensuite j'en ai fait une étude assez large. Là encore, l'introduction des fonctions généralisées est inévitable (cf. [4]).

A la suite de ce travail je me suis aperçu que l'on pouvait trouver des résultats analogues et plus simples à formuler pour la cohomologie des fibrés symplectiques. Ces résultats (en cours de rédaction [3]) me semblent nouveaux y compris dans le cadre non "super".

Par ailleurs, j'ai obtenu un inverse de la forme d'Euler équivariante définie comme une forme équivariante à coefficients généralisés sur $\mathfrak{so}(V)$ ou dans le cadre "super" $\mathfrak{osp}(V)$.

Revenons à l'analyse harmonique sur les supergroupes. Dans la théorie pour les groupes semi-simples, un rôle central est joué par les théorèmes de régularité et d'unicité d'Harish-Chandra pour les distributions propres

invariantes sur l’algèbre de Lie. L’exemple du Superpfaffien montre que le théorème de régularité est faux dans le cadre super. Une fonction généralisée sur un superespace vectoriel $V = V_0 \oplus V_1$ est une fonction généralisée sur V_0 à valeurs dans ΛV_1^* . Si V est une superalgèbre de Lie \mathfrak{g} , $V_0 = \mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie et $\Lambda V_1^* = \Lambda \mathfrak{g}_1^*$ est un \mathfrak{g}_0 -module. On est alors naturellement amené à considérer le problème plus général (non “super”) de l’étude des fonctions généralisées invariantes sur une algèbre de Lie à valeurs dans un \mathfrak{g} -module. Ce problème a été considéré une première fois par Bruhat dans l’étude des représentations induites. Dans le cas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ j’ai donné une description assez complète des fonctions généralisées invariantes sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ à valeurs dans un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -module. Dans ce cas particulier on peut voir que si le théorème de régularité est faux, on a quand même un théorème d’unicité. Ces résultats ont été publiés au Journal of Functional Analysis (cf. [1]).

Voici brièvement le détail de mes travaux puis mes projets de recherche.

2.2 Thèse (cf. [1] et [2])

Le but de ce travail est d’étendre à la situation supergéométrique la formule de localisation de Berline-Vergne à travers le formalisme de la cohomologie équivariante.

Résumé :

Dans la situation supergéométrique les formes différentielles usuelles forment un complexe non borné supérieurement, et ne peuvent être intégrées. Bernstein et Leites ont introduit la classe des formes pseudodifférentielles. Soit M une supervariété, les formes pseudodifférentielles sur M sont les fonctions sur $\widehat{M} = \Pi TM$ le fibré tangent sur lequel on a renversé la parité dans les fibres.

J’ai fait une étude de la cohomologie et de la cohomologie équivariante de ces formes pseudodifférentielles lorsque M est muni de l’action équivariante d’un supergroupe G . En particulier j’ai montré que pour un superfibré vectoriel $\mathcal{V} \rightarrow M$ il n’existe pas en général de forme de Thom. Cependant, lorsque \mathcal{V} est muni d’une action “suffisamment non triviale” d’un supergroupe G on peut construire sur \mathcal{V} une forme de Thom équivariante à coefficients distributions (et non polynomiaux) sur la superalgèbre de Lie de G .

La formule de localisation de Berline-Vergne fait apparaître le pfaffien qui est une racine carrée polynomiale du déterminant sur $\mathfrak{so}(2n)$. L’analogie super du déterminant est le bérézinien qui n’est plus un polynôme mais une fraction rationnelle. J’ai alors construit une fonction généralisée sur $\mathfrak{osp}(2n, 2m)$ appelée superpfaffien qui est une racine carrée du bérézinien (là où celui-ci est défini).

Voici le résultat principal de ma thèse.

Soit G un supergroupe de Lie de superalgèbre de Lie \mathfrak{g} et M une G -supervariété munie d’une superstructure euclidienne G -invariante. Soit α une forme équivariante fermée à coefficients C^∞ ou dans les fonctions généralisées sur \mathfrak{g} . Soit $X \in \mathfrak{g}$. Il définit un champ de vecteurs X_M sur M . On peut localiser au voisinage de X l’intégrale de α sur M , qui est une fonction (généralisée) sur \mathfrak{g} , en une intégrale sur la variété $M(X)$ des zéros du champ de vecteurs X_M . Si les zéros sont isolés (c’est à dire $M(X)$ discrète), on note, pour tout p de $M(X)$, τ_p la représentation de \mathfrak{g} dans $T_p M$ et j_p l’injection de $\{p\}$ dans M . On a alors la formule suivante, valable sur un voisinage de X dans $\mathfrak{g}(X)$ (le centralisateur de X dans \mathfrak{g}) :

$$\int_M \alpha = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}+m} \sum_{p \in M(X)} \frac{j_p^*(\alpha)}{\tau_p^*(SPf)}$$

où SPf désigne le superpfaffien, $\dim(M) = (n, m)$. Dans le cas des zéros non isolés on a une formule analogue avec au lieu d’une sommation, une intégration sur $M(X)$, au lieu de $\tau_p^*(SPf)$, la classe d’Euler équivariante $\mathcal{E}_{\mathfrak{g}}$ du fibré normal $T_N(M(X))$ dans M à la sous-supervariété $M(X)$ et au lieu de (n, m) , (k, l) la dimension des fibres de $T_N(M(X))$.

Dans la dernière partie, j’ai étudié quelques exemples simples de transformées de Fourier d’orbites coadjointes de supergroupes G , et je les ai reliées aux caractères de représentations irréductibles unitaires de G .

2.3 Cohomologie équivariante des superfibrés symplectiques (cf. [3])

Je me suis ensuite intéressé à la cohomologie équivariante des superfibrés vectoriels munis non pas d'un superproduit scalaire mais plutôt d'une forme symplectique. L'intérêt d'une telle étude est que ce cadre est plus naturel pour l'étude des orbites coadjointes qui sont canoniquement munies d'une forme symplectique.

Résumé :

Soit G un supergroupe et $\mathcal{V} \rightarrow M$ un superfibré symplectique G -équivariant et globalement orienté. Soit $j : M \hookrightarrow \mathcal{V}$ l'injection de M dans \mathcal{V} à l'aide de la section nulle. Moyennant quelques conditions techniques supplémentaires j'ai construit une forme équivariante intégrable fermée α (à coefficients distributions) telle que $j^*\alpha = 1_M$, la fonction constante égale à 1 sur M . Soit $\widehat{\Omega}_{G,j}^{-\infty}(\mathcal{V})$ (resp. $\widehat{\Omega}_{G,j}^{-\infty}(M)$) l'ensemble des formes équivariantes intégrables à coefficients distributions sur \mathcal{V} (resp. M).

Le morphisme de restriction j^* de $\widehat{\Omega}_{G,j}^{-\infty}(\mathcal{V})$ dans $\widehat{\Omega}_{G,j}^{-\infty}(M)$ induit une injection au niveau de la cohomologie mais celle-ci n'est en général pas surjective. Son "inverse" est donné par la multiplication par α .

Soit $\Pi\mathcal{V}$ le superfibré vectoriel obtenu en inversant la parité dans les fibres. La forme d'Euler équivariante sur $\Pi\mathcal{V}$ peut alors se calculer à l'aide d'une intégrale faisant intervenir la forme α .

Cette dernière permet d'obtenir une formule qui localise l'intégrale d'une forme équivariante fermée intégrable sur \mathcal{V} en une intégrale sur M .

Lorsque la structure supersymplectique sur \mathcal{V} détermine une structure supereuclidienne sur $\Pi\mathcal{V}$, la construction de α est reliée à celle d'une forme de Thom sur $\Pi\mathcal{V}$ à l'aide d'une "transformation de Fourier" entre $\widehat{\Omega}(\mathcal{V})$ et $\widehat{\Omega}(\Pi\mathcal{V})$.

2.4 Superpfaffien (cf. [4])

Dans ma thèse la fonction superpfaffien joue un rôle central dans les formules obtenues. En particulier, on sait que la forme d'Euler d'un fibré vectoriel orienté équivariant est égale, à une constante multiplicative près, au pfaffien de la courbure d'une connexion équivariante sur ce fibré. On peut montrer qu'une telle relation existe toujours dans la situation supergéométrique.

Cela donne une motivation suffisante pour une étude plus approfondie du superpfaffien. Voici un résumé de cette étude qui fait l'objet d'un article.

Résumé :

Si V est un espace vectoriel euclidien orienté on sait définir sur $\mathfrak{so}(V)$ le pfaffien qui est une racine carrée polynomiale du déterminant. Le pfaffien de $X \in \mathfrak{so}(V)$ peut être défini comme l'intégrale de Berezin de $v \mapsto \exp(\frac{1}{2}(Xv, v))$ sur l'espace vectoriel V considéré comme impair. Cette définition a un prolongement naturel au cas où $V = \widehat{V}_0 \oplus V_1$ est un superspace vectoriel muni d'une forme bilinéaire superantisymétrique non dégénérée telle que sa restriction à V_1 soit un produit scalaire. Cependant ce prolongement n'est alors valable que comme fonction sur un ouvert de $\mathfrak{spo}(V)$. On peut néanmoins modifier la définition en considérant l'intégrale sur V de $v \mapsto \exp(-\frac{i}{2}(Xv, v))$. On obtient alors une fonction généralisée sur $\mathfrak{spo}(V)$ qui est C^∞ sur l'ouvert des éléments inversibles et telle que sur cet ouvert son carré soit égal, à une constante multiplicative près, au "berezinien" (qui n'est défini que pour des éléments inversibles).

Après avoir ainsi défini le superpfaffien j'ai étudié ses principales propriétés. En particulier, j'ai montré que, à conjugaison et multiplication par ± 1 près, le superpfaffien est l'unique racine carrée du déterminant qui soit invariante, homogène et harmonique.

2.5 Fonctions généralisées invariantes sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ à valeurs dans un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -module (cf. [5])

Le problème général est le suivant. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle et V un \mathfrak{g} -module. Il s'agit de décrire l'ensemble des fonctions généralisées \mathfrak{g} -

invariantes sur \mathfrak{g} à valeurs dans V .

Dans un premier temps, j’ai considéré le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2\mathbb{R})$. Le problème principal consiste à trouver les fonctions à support dans le cône nilpotent. J’ai pu donner une réponse assez complète à cette question tant du point de vue local que global. Ces résultats ont été publiés au Journal of Functionnal Analysis.

Résumé :

Voici le résultat principal de cet article. Soit \mathcal{S}_n l’ensemble des fonctions généralisées \mathfrak{g} à valeurs dans la représentation irréductible de dimension n de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ qui sont invariantes et à support contenu dans un demi-cône nilpotent de \mathfrak{g} . Alors

1. lorsque n est pair, $\mathcal{S}_n = \{0\}$.
2. lorsque n est impair on obtient un espace vectoriel de dimension infinie de base $\{\square^n \phi\}_{n \in \mathbb{N}}$ où \square est l’opérateur de Casimir sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{S}_n$ est non nulle et de degré d’homogénéité -3 .

3 Projets de recherche :

3.1 Cadre général :

Le projet qui m’occupe principalement en ce moment (en collaboration avec M. Duflo) est de comprendre les caractères des représentations unitaires irréductibles de certains supergroupes. Il s’agit de relier les caractères des représentations irréductibles et les transformées de Fourier des orbites coadjointes dans ce cadre “super”. Le cas de $\mathfrak{osp}(1, 2)$ est spécialement intéressant : d’une part il joue un rôle analogue à celui de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ dans la situation classique, et d’autre part (comme remarqué par Cherednik et Duflo) il intervient naturellement dans l’étude des opérateurs de Dunkl.

J’ai en particulier montré que les représentations irréductibles unitarisables d’une superalgèbre de Lie classique sont de plus bas ou de plus haut poids.

Pour le calcul des caractères, la méthode générale est la suivante. Soit G un supergroupe de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Soit M une orbite coadjointe de G reliée à une représentation ρ de G . La transformée de Fourier \mathcal{F}_M de M est une fonction généralisée sur \mathfrak{g} dont on peut calculer la restriction à \mathfrak{g}_0 (à l’aide des résultats de l’article : *Equivariant cohomology of supersymplectic vector bundles*). On obtient alors une somme (avec coefficients) de transformées de Fourier d’orbites coadjointes de G_0 (le groupe de Lie sous-jacent à G) qui correspond à une décomposition de la restriction de ρ à G_0 . Dans les cas favorables, on sait alors à l’aide de la “formule de Kirillov” relier cette somme avec le caractère de $\rho|_{G_0}$.

Pour pouvoir en déduire que la formule obtenue reliant les restrictions de \mathcal{F}_M et du caractère de ρ à \mathfrak{g}_0 s’étend à \mathfrak{g} on a besoin de théorèmes d’unicité

sur les fonctions généralisées invariantes vérifiant des équations différentielles invariantes.

3.2 Recherche actuelle en cours de rédaction

Dans les questions précédentes la cohomologie équivariante intégrable des fibrés vectoriels joue un rôle central. Il est naturel de se demander si on a un “isomorphisme de Thom” entre la cohomologie équivariante d’un super-fibré vectoriel équivariant et celle de sa base, tant dans le cas supereuclidien que dans le cas supersymplectique. Cela semble être le cas mais les démonstrations classiques sont inopérantes ici.

Le cas crucial n’est pas un problème “super” : c’est le cas de la **cohomologie équivariante à coefficients généralisés d’un fibré symplectique**. La construction d’un “isomorphisme de Thom” dans ce cadre est intimement lié à une décomposition de l’espace des fonctions généralisées invariantes sur $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ dans laquelle on puisse maîtriser le front d’onde des fonctions généralisées. Cette décomposition est elle même intrinsèquement liée à une compréhension fine de l’espace des orbites de $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ sous l’action de son groupe adjoint. J’ai donc été amené successivement à comprendre les trois problèmes suivants que je suis en train de rédiger.

3.2.1 Stratification de l’espace des orbites d’une algèbre de Lie semi-simple réelle

J’ai obtenu une nouvelle stratification de l’espace des orbites adjointes dans \mathfrak{g} liée à l’ordre dans l’ensemble des orbites induit par la notion d’adhérence. J’ai ainsi introduit une notion de “profondeur” d’une orbite et on note \mathfrak{g}_k l’ensemble des orbites de profondeur $k \geq 0$. Cette description a des rapports importants avec la notion de classe de décomposition.

Ce travail est assez long et se décompose de la façon suivante :

1. Description d’une section transverse d’une orbite nilpotente dans le cône nilpotent \mathcal{N} dans le cas complexe ;
2. Puis dans le cas réel ;
3. Description de la stratification annoncée ;
4. Lien pour une algèbre de rang r avec la projection de Kostant sur \mathbb{R}^r à l’aide de générateurs de l’algèbre des polynômes invariants sur \mathfrak{g} .

3.2.2 fonctions généralisées invariantes sur une algèbre de Lie semi-simple

Ensuite j'ai utilisé les variétés de décomposition précédentes (qui forment une filtration de \mathfrak{g}) pour obtenir une décomposition de l'espace des fonctions généralisées sur \mathfrak{g} . Si $\mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_r$ est la filtration obtenue, On décompose $\phi \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ en une somme de fonctions ϕ_k chacune étant à support dans \mathfrak{g}_k . Pour cela on définit ϕ_k sur $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_{k+1}$ à support dans $\mathfrak{g}_k \setminus \mathfrak{g}_{k+1}$ puis (c'est le point le plus délicat) on la prolonge à \mathfrak{g} .

3.2.3 Isomorphisme de Thom

Enfin à l'aide des informations obtenues sur les fonctions généralisées invariantes on peut dans le cas où V est un espace symplectique et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$, obtenir un isomorphisme de Thom entre la cohomologie équivariante intégrable à coefficients généralisés de V et $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Puis généraliser la construction à un fibré équivariant symplectique quelconque moyennant certaines contraintes techniques

3.3 Autres Problèmes en cours :

3.3.1 Fonctions généralisées invariantes sur \mathfrak{g} à valeurs dans un \mathfrak{g} -module

J'ai remarqué qu'une fonction généralisée invariante sur une superalgèbres de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ est en particulier une fonction généralisée \mathfrak{g}_0 -invariante sur \mathfrak{g}_0 à valeurs dans $\Lambda \mathfrak{g}_1^*$. Cela m'a amené, comme je l'ai dit plus haut, à considérer le problème suivant qui n'est pas "super" et d'intérêt plus général :

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle et V un \mathfrak{g} -module. Il d'agit de décrire l'ensemble des fonctions généralisées \mathfrak{g} -invariantes sur \mathfrak{g} à valeurs dans V . Le problème principal étant de déterminer les fonctions à support dans le cône nilpotent de \mathfrak{g} .

Actuellement je suis en train de considérer le cas \mathfrak{g} simple. À la suite de mon article sur le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ([2]), ce problème a été également considéré par A. Bouaziz ("Sur les distributions covariantes dans les algèbres de Lie réductives." J. Funct. Anal. 257 (2009), no. 10, 3203–3217).

3.3.2 Inverse de la forme d'Euler équivariante

Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré vectoriel G -équivariant. Pour beaucoup d'applications (en particulier la formule de localisation), il serait utile d'avoir un inverse d'une forme d'Euler équivariante de \mathcal{V} comme forme équivariante à coefficients généralisés sur toute l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G .

Dans le cas d'un superespace vectoriel V muni d'une superstructure euclidienne et de l'action de $\mathfrak{osp}(V)$ il s'agit de construire un inverse pour le produit des fonctions généralisées du superpfaffien. La première étape de ce travail consiste à construire une fonction généralisée invariante sur $\mathfrak{so}(V)$ qui soit un inverse du pfaffien, puis de généraliser cette construction à $\mathfrak{osp}(V)$. Ce travail est maintenant en cours de rédaction.

3.3.3 $\mathfrak{osp}(1, 2)$

Comme je l'ai dit plus haut l'étude des représentations unitaires de $\mathfrak{osp}(1, 2)$ et de leurs caractères est particulièrement intéressante. Le cas de la série discrète me semble maintenant, au vu des résultats déjà obtenus, accessible. C'est-à-dire qu'il me semble que l'on peut écrire une "formule de Kirillov" pour les représentations unitaires irréductibles correspondantes.

Le cas le plus intéressant pour lequel je n'ai encore aucune réponse est le cas de la représentation métaplectique. C'est là qu'interviennent les opérateurs de Dunkl.

3.4 Autres questions ouvertes

3.4.1 Modification de la différentielle équivariante

Par ailleurs, il semble intéressant de considérer la cohomologie équivariante obtenue pour la différentielle $d - \iota$ au lieu de $d - i\iota$. L'intérêt d'une telle étude est qu'il semble possible dans ce cadre d'obtenir pour des formes équivariantes fermées intégrables une formule de localisation sous des hypothèses moins contraignantes. En contrepartie on se heurte d'une part à quelques problèmes de définitions des objets mis en jeu et d'autre part à de nouvelles difficultés techniques. Si la formule de localisation obtenue dans le cadre de ma thèse semble convenir à l'étude des représentations unitaires de supergroupes, le nouveau cadre en projet pourrait convenir à une classe plus large de représentations.

3.4.2 Superpfaffien et transformée de Fourier

Une dernière question attire mon attention. Il est facile de remarquer que le superpfaffien dans le cas de $\mathfrak{sp}(2n)$ peut s'écrire comme la transformée de Fourier d'une orbite nilpotente. Une telle formule n'a plus de sens pour le pfaffien sur $\mathfrak{so}(2m)$ ni plus généralement pour le superpfaffien sur $\mathfrak{spo}(2n, 2m)$. La grande similitude existant par ailleurs dans le cadre "super" entre les cas symplectiques et euclidiens me pousse à trouver un cadre permettant de rendre compte des différents cas.

Pascal Lavaud

IMJ - Groupes Représentations et Géométrie

port : 06 86 46 54 62

mél : lavaud@math.jussieu.fr

Articles et travaux :

- [5] *Invariant generalized functions on $sl(2, R)$ with values in a $sl(2, R)$ -module.* (J. Funct. Anal. 219, No.1, 226-244 (2005))
- [4] *Superpfaffian.* (Article soumis au Journal of Lie Theory, e-print : math.-GR/0402067)
- [3] *Equivariant cohomology of supersymplectic vector bundles.* (en préparation)
- [2] *Equivariant Cohomology and Localization Formula in Supergeometry.* (e-print : math.DG/0402068)
- [1] *Formule de localisation en supergéométrie,* Thèse de doctorat.

Eléments de bibliographie

F.A. Berezin. *Introduction to Superanalysis.* MPAM D. Reidel Publishing Company, 1987.

N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators.* Springer-Verlag, 1992.

I. N. Bernstein and D. A. Leites. Integration of differential forms on supermanifolds. *Functional Analysis*, 11 :70–71, 1977.

A. Bouaziz. Integration of differential forms on supermanifolds. *Functional Analysis*, 257,10 : 3203–3217,2009.

J. Funct. Anal. 257 (2009), no. 10, 3203–3217

- Michel Duflo and Michèle Vergne. *Orbites coadjointes et cohomologie équivariante*, volume 82 of *Progress in Mathematics*, pages 11–60. Birkäuser, 1988.
- H. Furutsu and K. Nishiyama Classification of Irreducible Super-Unitary Representations of $\mathfrak{su}(p, q/n)$ *Communications in mathematical physics*, 141 :475–502, 1991.
- Harish-Chandra. Invariant differential operators and distributions on a semi-simple lie algebra. *American Journal of Mathematics*, 86 :534–564, 1964.
- B. Kostant. Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization. In *LNLM 570*, pages 177–306. Springer-Verlag, 1977.
- S. Kumar and M. Vergne. Equivariant cohomology with generalized coefficients. *Astérisque*, 215 :109–188, 1993.
- V. Mathai and D. Quillen. Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. *Topology*, Volume 25, No 1 :85–110, 1986.
- K. Nishiyama Characters and Super-Characters of Discrete Series Representations for Orthosymplectic Lie Superalgebras *Journal of Algebra*, 141 :399–419, 1991.
- T. Voronov. Geometric integration theory on supermanifolds. In *Mathematical Physics Reviews*, volume Volume 9, Part 1. Harwood Academic Publishers, 1991.