DEVOIR MAISON DE MATHéMATIQUES N^{0}2

1 BIO A À RENDRE LE LUNDI 15/10/12

Problème

Dans tout le problème on note E_n l'ensemble des entiers naturels x x tels que: $1 \leq x \leq n$, n étant un élément donné de $\mathbb{N}^*$.

On note $S_{n,p}$ le cardinal de l'ensemble des applications surjectives de E_n sur E_p.

I.

1) Calculer $S_{n,p}$ pour $p > n$. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, $S_{n,2}$.

2) Calculer $S_{p+1,p}$. Pour cela on utilisera en justifiant son existence, l'élément r de E_p ayant deux antécédents.

II. On suppose désormais que $p \leq n$.

1) Démontrer que si $0 \leq k < p$ on a $\sum\limits_{q=k}^{p} (-1)^q C_p^q C_q^k = 0$.

2) Etablir que $p^n = \sum\limits_{q=0}^{p} C_p^q S_{n,q}$.

3) En déduire la formule: $S_{n,p} = (-1)^p \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k k^n$.

4) En déduire que: $S_{n,p} = p\big(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}\big)$ si $p \geq 2$.

Retrouver alors $S_{p+1,p}$ puis montrer que l'on a:

$$S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)}{24}.(p+2)!$$

5) En s'inspirant du triangle de Pascal, montrer que l'on peut construire une table des $S_{n,p}$. Calculer $S_{n,p}$ pour $0 < p \leq 7$.