

DM DE MATHÉMATIQUES N°3

1 BIO 1 - À RENDRE LE12/11/2012

Problème

Une entreprise recrute un employé. n candidats se présentent.

On suppose que l'on peut les classer sans ex-aequo, de 1 à n .

Ils sont convoqués un par un, et l'on suppose que tous les ordres de passages sont équiprobables. La direction constitue avec les m premiers, un échantillon de référence. Elle refuse systématiquement les m premiers et décide d'engager le premier des candidats suivants qui se révélera meilleur que ceux de l'échantillon des m premiers.

S'il n'y en a pas l'entreprise n'engage personne.

a) Calculer la probabilité que le meilleur des n candidats soit le j^{me} à se présenter, ($1 \leq j \leq n$). Par la suite, on notera E_j , l'événement : "le meilleur des n candidats est le j^{me} à se présenter".

b) On définit l'événement $F_{k,m}$ par : "le meilleur des k premiers candidats figure parmi les m candidats de l'échantillon".

Calculer $P(F_{k,m})$ la probabilité de l'événement $F_{k,m}$.

c)(i) Calculer $P(E_k \cap F_{k-1,m})$.

(ii) En déduire que les événements E_k et $F_{k-1,m}$ sont indépendants.

Ce résultat vous paraît-il prévisible ?

d)(i) On note G l'événement : "la direction recrute le meilleur candidat".

Montrer que, pour $m+1 \leq k \leq n$: $P(G|E_k) = \frac{m}{k+1}$.

(ii) On pose $p_n = P(G)$. En utilisant convenablement la formule des probabilités totales, montrer que :

$$p_n = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right).$$

e) Calculer la probabilité que l'on ne recrute personne.

f) Calculer la probabilité que le j^{me} candidat soit recruté.