

DM DE MATHÉMATIQUES N°5

1 BIO 1 - À RENDRE LE 21/12/2012

Nota : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements et les énoncés des théorèmes entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Problème : Polynômes de Tchebycheff

Question préliminaire : On appelle fonction Arccosinus et l'on note \arccos la fonction :

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \arccos x, \end{aligned}$$

telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$ et pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos \theta) = \theta$.

Soit $x \in [-1, 1]$ calculer $\sin^2(\arccos x)$. En déduire $\sin(\arccos x)$.

Soit x un réel appartenant à $[-1, 1]$. Pour tout entier positif n , et pour tout x appartenant à $[-1, 1]$, on définit

$$P_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

1) a. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 .

b. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

c. En distinguant selon la parité de n et en utilisant la formule précédente, donner une expression de $P_n(x)$ sous une forme polynomiale.

2) a. Pour tout entier n positif, montrer la relation de récurrence :

$$(1) \quad P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

b. Montrer que P_n est un polynôme de degré n en la variable x . On l'appelle polynôme de Tchebychev (1821-1894).

c. Déterminer le coefficient de x^n dans $P_n(x)$.

d. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

3) En tant que polynôme on peut définir $P_n(x)$ sur \mathbb{R} . Rechercher les racines de $P_n(x)$ sur $[-1, 1]$.

En déduire les racines de P_n .

4) Montrer que les racines c_k de P'_n appartiennent à $[-1, 1]$ et les calculer ?