DM DE MATHéMATIQUES N°6

1 BIO 1 - À RENDRE LE 7/1/2013

Nota : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements et les énoncés des théorèmes entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Suite de Fibonacci. *On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par :*

$$\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \end{cases}$$

(1) (a) *Calculer les 10 premiers termes de la suite.*

(b) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.*

(c) *Montrer que (F_n) est strictement croissante pour $n \geq 2$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n \geq n-1$. En déduire que (F_n) est divergente.*

(2) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.*

(a) *Calculer les 10 premiers termes de cette suite. Qu'en déduit-on intuitivement sur sa convergence ?*

(b) *Montrer que :*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}. \end{cases}$$

(c) *Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Construire les points M_n ($n \in \mathbb{N}^*$) de $\mathcal{C}$ d'abcisse u_n ; qu'en déduit-on intuitivement sur la convergence de (u_n) ?*

(d) *Soit l la solution positive de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$. Calculer l.*

(i) *Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} - lF_n = \frac{(-1)^n}{l^n}$.*
En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - l = \frac{(-1)^n}{F_n l^n}.$$

(ii) *Déduire à l'aide de la question (**??**) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.*

Vérifier que la limite obtenue correspond aux résultats intuitifs des questions précédentes.