DM DE MATHÉMATIQUES N°8

1 BIO 1 - À RENDRE LE 1/03/2013

Nota : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements et les énoncés des théorèmes entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Problème

Partie I. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n. Pour tout endomorphisme f de E on pose $f^0 = Id_E$, $f^1 = f$ et $f^{k+1} = f^k \circ f$ et

$$F_k = Im(f^k); \quad G_k = Ker(f^k).$$

1) Montrer que $F_{k+1} \subset F_k$ et $G_k \subset G_{k+1}$.

2)Soit $a_k = dim(G_k)$.

a)Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrer que $a_p = a_{p+1}$ si et seulement si $G_p = G_{p+1}$.

c) Montrer que s'il existe un entier p tel que $a_{p+1} = a_p$, alors la suite a_k est stationnaire à partir du rang p et $G_p = G_{p+1}$.

d) Montrer qu'un tel entier p existe. Dans la suite un tel entier p est fixé.

4) a) Montrer que $F_p = F_{p+1}$.

b) Montrer que pour tout x dans F_p, on a $f(x) \in F_p$.

c) Montrer que la restriction de f à F_p est un automorphisme de F_p.

(On appelle restriction de f à F_p l'application :

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : F_p &\longrightarrow F_p \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Partie II. Dans cette partie nous supposons $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1) Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}^2$ (donc $n = 2$). Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

2) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $dim(G_k) = k$.

3) Montrer que $F_k = G_{n-k}$.

4) Montrer que les endomorphismes $I - f$ et $I + f$ sont des automorphismes de E et calculer leur inverse en fonction de I et des puissances successives de f.

5) Pour tout $x_0 \neq 0$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, montrer que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.