CORRIGé DU DM DE MATHÉMATIQUES N°8

1 BIO 1

Problème

Partie I. 1) Soit $y \in F_{k+1} = Im(f^k)$. Alors il existe $x \in E$ tel que :

$$y = f^{k+1}(x) = (f^k \circ f)(x) = f^k\big(f(x)\big).$$

Donc $y \in Im(f^k) = F_k$. Comme c'est vrai pour tout y dans F_{k+1}, on a $F_{k+1} \subset F_k$.

Soit $x \in G_k$, alors $f^k(x) = 0$. Donc :

$$f^{k+1}(x) = (f \circ f^k)(x) = f\big(f^k(x)\big) = f(0) = 0.$$

Donc $x \in G_{k+1}$. Comme c'est vrai pour tout x dans G_k, on a $G_k \subset G_{k+1}$.

2)a) Si $a_p = a_{p+1}$ cela signifie $dim(G_p) = dim(G_{p+1})$. Or $G_p \subset G_{p+1}$. On en déduit donc $G_p = G_{p+1}$.

Supposons que $a_p = a_{p+1}$. On sait que $a_{p+1} \leq a_{p+2}$. Montrons que $a_{p+2} \leq a_{p+1}$. Cela montrera alors par récurrence que la suit (a_k) est stationnaire à partir du rang p.

Pour cela il suffit de montrer que $G_{p+2} \subset G_{p+1}$.

Soit $x \in G_{p+2}$. Alors $f^{p+2}(x) = 0$. Or $f^{p+2}(x) = f^{p+1}(f(x))$. Donc $f(x) \in G_{p+1}$.

Or $a_p = a_{p+1}$ et $G_p \subset G_{p+1}$ impliquent que $G_p = G_{p+1}$.

Donc $f(x) \in G_p$. Donc $f^{p+1}(x) = f^p(f(x)) = 0$. Donc $x \in G_{p+1}$. Finalement on a bien $G_{p+2} \subset G_{p+1}$.

b) Comme $G_k \subset G_{k+1}$, on a $a_k \leq a_{k+1}$. Donc la suite (a_k) est croissante.

Supposons que pour tout k $a_k \neq a_{k+1}$ alors $a_{k+1} > a_k$, donc $a_{k+1} \geq a_k + 1$. On en déduit par réccurence que $a_k \geq a_0 + k \geq k$. En particulier cela implique que $a_{n+1} \geq a_n$.

Or $G_{n+1} \subset E$, donc $a_{n+1} = dim(G_n) \leq dim(E) = n$. Il y a donc contradition. Donc il existe p tel que $a_p = a_{p+1}$.

4) a) D'après le théorème du rang on a :

$$\begin{aligned} dim(F_p) &= dim(E) - dim(G_p) = n - a_p \\ &= n - a_{p+1} = dim(E) - dim(G_{p+1}) = dim(F_{p+1}). \end{aligned}$$

Or comme $F_p \subset F_{p+1}$, on a $F_p = F_{p+1}$.

b) Soit $x \in F_p$ alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Donc $f(x) = f(f^p(y)) = f^{p+1}(y) \in F_{p+1} = F_p$.

c)$\widetilde{f}$ est bien une application de F_p dans lui même. De plus pour $x, y = inF_p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a (comme f est linéaire) $\widetilde{f}(x + \lambda y) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = \widetilde{f}(x) + \lambda \widetilde{f}(y)$. Donc $\widetilde{f}$ est un endomorphisme de F_p.

De plus si $x \in Ker(\widetilde{f})$, on a $f(x) = 0$. Soit $y \in E$ tel que $f^p(y) = x$ alors $f^{p+1}(y) = f(f^p(y)) = f(x) = 0$. Donc $y \in G_{p+1} = G_p$, donc $x = f^p(y) = 0$. Donc $Ker(f) = \{0\}$.

Donc $\widetilde{f}$ est injective or un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est injective si et seulement si il est bijectif. Donc $\widetilde{f}$ est un automorphisme de F_p.

Partie II. 1) Il suffit de prendre pour f l'endormorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2)On a vu à la Partie précédente que la suite des $\big(a_k\big)$ est croissante et que si $a_p = a_{p+1}$ elle est stationnaire pour $k \geq p$.

Comme $f^n = 0$ on a $G_n = E$. Comme $f^{n-1} \neq 0$, on a $G_{n-1} \neq E = G_n$ donc pour tout $k < n$ on a $a_k < a_{k+1}$.

Donc $n = a_n \geq a_{n-1} + 1 \geq \cdots \geq a_0 + n$.

Or $a_0 \geq 0$ donc $a_0 = 0$ et toutes les égalités ci-dessus sont des égalités. c'est à dire que pour tout $k \leq n$ on $a_n = a_{n-k} + k$. Autrement dit $a_k = k$.

3) Pour tout $y \in F_k$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^k(x)$. On a alors $f^{n-k}(y) = f^{n-k}(f^k(x)) = f^n(x) = 0$. Donc $y \in G_{n-k}$. Donc $F_k \subset G_{n-k}$.

De plus on a :

$$dim(F_k) = n - dim(G_k) = n - k = dim(G_{n-K})$$

Donc $F_k = G_{n-k}$.

4) Comme ce sont des endomorphismes de E qui est de dimension finie, il suffit de montrer q'ils sont injectifs.

Soit $x \in Ker(I - f)$. Alors $x - f(x) = 0$ c'est à dire $f(x) = x$. Alors pour tout k on a $f^k(x) = 0$. Donc en particulier $x = f^n(x) = 0$. Donc $I - f$ est injectif.

De même si $x \in Ker(I + f)$ on a $f(x) = -x$ et $f^k(x) = (-1)^k x$, donc $x = (-1)^n f^n(x) = 0$.

De plus on a :

$$(I - f)(I + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}) = I - f^n = I;$$
$$(I + f)(I - f + f^2 + \cdots + (-1)^{n-1} f^{n-1}) = I + (-1)^{n-1} f^n = I.$$

On en déduit :

$$(I - f)^1 = I + f + f^2 + \cdots + f^{n-1};$$
$$(I + f)^{-1} = I - f + f^2 + \cdots + (-1)^{n-1} f^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k.$$

5) a)Montrons que c'est une famille libre.

Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\lambda_1 x_0 + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(x_0) = 0$. Alors en appliquant f^{n-1} à cette égalité on obtient :

$$\lambda_1 f^{n-1}(x_0) = 0.$$

Or $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. donc $\lambda_1 = 0$.

De même en appliquant alors f^{n-2} à l'égalité on obtient :

$$\lambda_1 f^{n-2}(x_0) + \lambda_2 f^{n-1}(x_0) = \lambda_2 f^{n-1}(x_0) = 0. = 0. \tag{1}$$

D'où $\lambda_2 = 0$.

En réitérant l'opération on obtient :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0. \tag{2}$$

Donc la famille est libre.

Or toute famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base. Donc $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E.