

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°1

1 BIO 1 - 26/9/12 - 2 HEURES

Exercice 1

Ecrire la négation des phrases suivantes

- (a) $\forall x, \exists n (x \leq n)$.
- (b) $\exists M, \forall n, (|u_n| \leq M)$.
- (c) $\forall x, \forall y, (xy = yx)$.
- (d) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, (|u_n| < \epsilon)$.
- (e) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathbb{R}, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$.

Exercice 2

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x + 2y, x^2)$$

- (a) f est-elle injective?
- (b) f est-elle surjective?
- (c) déterminer $f < \mathbb{R}^2 >$.

Exercice 3

On rappelle que si E est un ensemble, on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .
Décrire les ensembles:

$$\mathcal{P}(\emptyset) \quad \mathcal{P}(\{1\}) \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})).$$

Exercice 4

On pose $S = \{0, 1\}$. Décrire toutes les applications $f : S \rightarrow S$ en donnant pour chacune $f(0)$ et $f(1)$ puis préciser lesquelles sont injectives, lesquelles sont surjectives et lesquelles sont bijectives.

Exercice 5

Soient A, B et C des propositions. Montrer que:

- (a) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \{(A \wedge B) \vee [(\neg A) \wedge (\neg B)]\}$.
- (b) $[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [B \vee (A \Rightarrow C)]$.
- (c) $\{A \Rightarrow [B \vee (\neg C)]\} \Leftrightarrow [(C \wedge A) \Rightarrow B]$.