DS DE MATHEMATIQUES N°2

1 BIO 1 - 14/11/2012

Nota : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements et les ennoncés des théorèmes entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Karl et Pascal jouent au jeu suivant. Karl lance deux pièces équilibrées. S'il obtient deux piles, Karl gagne. Sinon Pascal lance à son tour les deux pièces et gagne s'il obtient deux faces. Dans le cas contraire, Karl recommence à lancer les deux pièces. S'il obtient deux piles, il gagne, sinon c'est au tour de Pascal et ainsi de suite jusqu'à l'obtention du gagnant du jeu.
Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose K_k : " Karl gagne au $(2k+1)$ ème lancer " et P_k : " Pascall gagne au $(2k)$ ème lancer "

(1) Quelle est la probabilité que Karl gagne au premier coup ?
(2) Quelle est la probabilité que Pascal gagne au deuxième coup ?
(3) Quelle est la probabilité que Karl gagne au troisième coup ?
(4) Quelle est la probabilité k_n que Karl gagne au coup numéro $2n+1$?
(5) Quelle est la probabilité p_n que Pascal gagne au coup numéro $2n$?
(6) Calculer la probabilité qu'un joueur gagne avant le $5^{ème}$ coup.
(7) Un joueur à gagné avant le $5^{ème}$ coup. Calculer la probabilité que cela soit Karl.

Exercice 2

Un lot de n pièces contient une pièce défectueuse. Un robot les teste une par une, jusqu'à détecter la pièce défectueuse. Il effectue le $n$ème test, dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse.
Soit X_k l'événement : "Le robot a effectué k tests".
Déterminer $p(X_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Indication On pourra introduire les événements A_j : "la pièce défectueuse est obtenue au $j$ème tirage", $1 \leq j \leq n$.

Exercice 3

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n > 3$).
On fait n tirages de ces boules.
A est l'événement : les trois premiers tirages donnent les boules $1-2-3$ dans cet ordre.
B est l'événement : au cours des n tirages on trouve la séquence $1-2-3$ dans cet ordre.
C est l'événement : au cours des n tirages on tire les boules $1-2-3$ *consécutivement* mais dans un *ordre quelconque*.

1

Dans cette question les tirages sont sans remise.

1.1. Calculer le nombre de tirages possibles de n boules.

1.2. Calculer la probabilité des événements A, B, C.

2

Dans cette question les tirages sont avec remise.

2.1. Calculer le nombre de tirages possibles de n boules.

2.2. Calculer la probabilité de l'événement A.

Exercice 4

Custer a conduit son armée à l'entrée d'un canyon. Un doute lui vient à l'esprit. Il estime qu'il y a 40% de chances pour que Sitting Bull lui tende une embuscade dans ce défilé. Il consulte alors séparément ses deux éclaireurs. Le premier, un blanc qui se trompe une fois sur deux, lui déclare qu'il n'y a pas de danger. Le deuxième, un indien qui communique une information fausse une fois sur trois, lui annonce un guet-apens.

a) Calculer, avec les éléments dont dispose Custer, la probabilité pour qu'il y ait une embuscade.

b) sachant qu'une fois sur trois, pour tromper l'ennemi, Custer fait le contraire de ce que lui indiquent les probabilités, calculer la probabilité pour Sitting Bull, qui a disposé toutes ses forces dans ce canyon, d'infliger une cuisante défaite à Custer.

(L'issue du combat éventuel ne fait pas de doute.)